

非線形伝熱プロセスのロバストデジタル制御*

佐久間 康弘^{*1}, 宮里 智樹^{*1}, 玉城 史朗^{*2}
金城 寛^{*3}, 山本 哲彦^{*2}Design of a Robust Digital Controller
for a Nonlinear Heat-Transfer ProcessYasuhiro SAKUMA, Tomoki MIYAZATO, Shiro TAMAKI,
Hiroshi KINJO and Tetsuhiko YAMAMOTO

In this paper, we propose a systematic controller design which treats problems of system identification and robust controller design, for a nonlinear heat-transfer process. First, we construct a convenient parametric model of the object possessing the nonlinear characteristic. Then, by using the modelling error between the real system and the model as the dominant design parameter, we construct a robust control system based on a mixed-sensitivity approach. This method avoids the need to linearize of a nonlinear system and provides robustness against nonlinear input. The effectiveness of the control method is verified by both numerical simulation and direct experiment for producing a constantly rising temperature of a microheater.

Key Words: Robust Control, Digital Control, Identification, Nonlinear Heat-Transfer Process, ARMA Model, Temperature Control System

1. はじめに

マイクロヒータの温度制御系は、分析化学の分野における熱蛍光年代測定システム⁽¹⁾や、化学物質の定量分析等に用いられている。また、その制御技術は他の分野での応用も期待されている。分析化学の分野では、その研究目的によって一定速度で温度を上昇させる定速昇温制御(サーボ系設計問題)や、一定温度に任意時間保持する制御(最適レギュレータ問題)が必要となる⁽¹⁾。しかし、汎用的な市販のプログラマブル温度制御系では、定常偏差やオーバーシュート等が大きくなり、要求される仕様を満たさない場合がある。その温度制御系設計問題の困難さは、マイクロヒータ自体が抵抗体であるため温度特性が入力に強く依存する非線形特性を持つこと、また、制御系自身にむだ時間が存在するため安定した制御性能が得られないことなどに起因する⁽²⁾。実際、プロセス制御系で一般に広く用いられているPID制御系を適用しても性能の劣化は否めない。

ところで、一般に非線形システムの特性はさまざまであり、制御系設計においては個々のシステムに依存した線形化を行わざるを得ないのが現状である。さらには、その非線形補償が実現不可能な場合もあり、これらの要因が非線形システムの制御系設計問題を困難

なものとしている。従って、非線形システムの線形化を行うことなく制御系の設計が可能であれば、簡便な設計法となり得る。さらに、設計された制御系が非線形特性に対するロバスト性を保持するならば、より有用かつ実用的な制御系となることが期待される。

本研究では、非線形システムに対するロバスト制御系設計の一例として、入力項に非線形特性を有するマイクロヒータの温度制御系設計問題を考え、モデリングから制御系設計までの系統的設計法を提案する。

制御系設計では、まず、非線形システムを簡便な形式のパラメトリックな線形離散時間モデルでモデル化し、そのモデル化誤差を補償するような周波数重みを設計パラメータとして与え、ロバスト安定性の保証や感度低減化⁽³⁾⁽⁴⁾を試みる。設計は以下の手順で進められる。

- 同定試験を行い、システムの線形パラメトリックモデル(ARMAモデル)を求める⁽⁵⁾⁽⁶⁾。
- 離散時間モデルを連続時間モデルに変換する。
- 混合感度問題を用いてコントローラを設計する。このときの周波数重みはモデル化誤差を評価して設定する。
- 設計されたコントローラを離散時間システムに変換する。

本手法では、非線形システムに対し線形化を行なうこ

* 原稿受付 1994年12月19日。

^{*1} 琉球大学大学院 (〒903-01 沖縄県西原町千原1)。^{*2} 正員, 琉球大学工学部。^{*3} 琉球大学工学部。

となく制御系設計が行なえ、さらに、設計された制御系はシステムの非線形特性に対しロバスト性を保証する。

本論文は以下のように構成される。まず、2章で対象とする非線形システムのパラメトリックなシステム同定問題を取扱う⁽⁵⁾⁽⁶⁾。次に、同定された離散時間モデルを連続時間系に変換し、 H_{∞} 制御問題の中の混合感度問題を導入しロバスト制御系の設計を行う。そして、4章において、数値シミュレーションおよび実験により本設計法の有効性を確認する。

なお、設計を進める上で必要となるすべての計算は制御系CADであるMATLABを用いた⁽⁷⁾。

2. 制御対象の非線形特性とモデリング

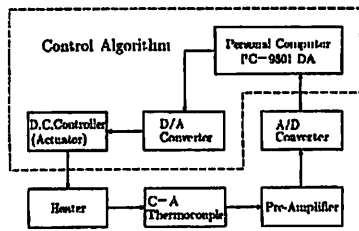


図1 マイクロヒータ昇温装置

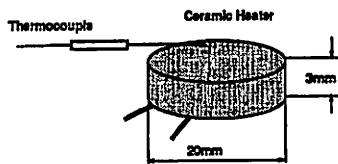


図2 マイクロヒータの概略

図1にマイクロヒータ温度制御系の全体図を示す。ここでの制御目的はヒータの表面温度を目標温度に一致させるようなフィードバック制御系を構成することである。図2にマイクロヒータの概略を示す。このヒータ表面は銀の薄板で覆われており、温度の均一性が保たれるようになっている。温度測定は、熱電対を銀板にろう付けして行う。温度制御は、直流電流制御をパーソナルコンピュータの指示により行なう。

2.1 システムの非線形特性と同定モデルの選択
まず、このヒータの動特性を把握するためにそれぞれの入力レベルに対するステップ応答試験を行なった。このシステムのステップ応答を図3に示す。

この図3からシステムは一次遅れ系の挙動を示しており、その時定数は約200~290sの範囲で変動している。また、それぞれの入力レベルとステップ応答の定常値は比例しないことがわかる。すなわち、この応答曲線より、システムは入力に関し非線形特性を有する

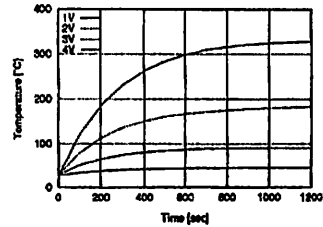


図3 各ステップ入力に対するステップ応答

ことがわかる。本論での制御系設計では、非線形特性をコントローラのロバスト性に補償するという立場に基づく。従って、以下では、同定試験を行って制御系設計に必要な線形のモデルを構成する。同定モデルとしては制御系設計の簡便さを考慮してARMAモデルを採用する⁽⁸⁾⁽⁹⁾。すなわち、ヒータに印加される電流を入力 u 、表面温度を出力 y 、および、その推定値を \hat{y} とすると次式を得る。

$$\hat{y}_i = -a_1 y_{i-1} - \dots - a_p y_{i-p} + b_1 u_{i-1} + \dots + b_p u_{i-p} \quad \dots (1)$$

ここでは、最小自乗規範に基づきパラメータ $a_i, b_i (i = 1, \dots, p)$ を決定する。すなわち、出力誤差を $e_t = y_t - \hat{y}_t$ と定義すると評価規範は次式となる。

$$J = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad \dots (2)$$

なお、この最小化問題は正規方程式の求解に帰着する。

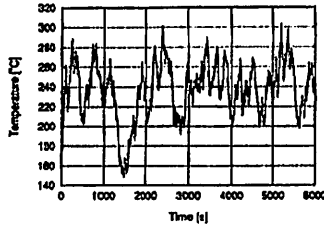
2.2 システム同定試験 サンプルングタイムを10sと選択し、図4に示すような最大周期511, 振幅 $3V \pm 2V$ のM系列信号を試験入力として同定試験を行った⁽⁹⁾。また、モデルの次数決定にはAICを用いた⁽⁶⁾。実験の結果ARMAモデルは以下のように得られた。

$$\hat{y}_i = -a_1 y_{i-1} - a_2 y_{i-2} + \alpha(b_1 u_{i-1} + b_2 u_{i-2}) \quad \dots (3)$$

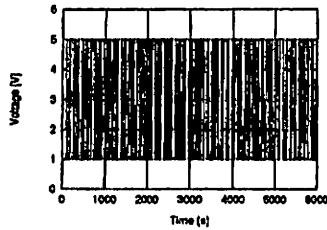
$$a_1 = -0.96318, \quad a_2 = 0.010815$$

$$b_1 = 3.6677, \quad b_2 = 1.2711$$

ここで、3Vにおけるステップ応答実験データの定常値レベルに一致させるため、モデルのDCゲイン α の調整を行なった結果 $\alpha = 0.55$ を得た。そのステップ応答の比較を図5に示す。この図より、同定モデルは実システムに比較して時定数が短くなっていることがわかる。また、1Vおよび4Vのステップ入力に対しても同様な比較を行った。その結果を図6、図7に示す。



(a) 表面温度



(b) 試験入力

図4 M 系列信号

これらの図より 3V のステップ応答にモデルの DC ゲインを一致させた場合、ゲインは±50 パーセント程度変動しており、また、時定数も 30 パーセント程度変動していることがわかる。

3. ロバスト制御系の設計

上述のモデルはモデル化誤差を含むので、ここではそれによる影響を減少させるようなロバスト制御系を構成する。制御系の設計では、パラメータ変動に対するロバスト安定性を保持し、かつ目標値信号に対する追従特性を良好とする混合感度問題を導入する⁽²⁾⁽⁴⁾。また、本研究で用いた H_∞ 制御問題を解くアルゴリズムは連続時間システム用を用いるため、システム同定で用いた離散時間システムを連続時間システムに変換し設計を進める。変換方法には、サンプリング区間で入力を一定と仮定したときの連続時間状態方程式と、離散時間状態方程式の等価変換法を用いた⁽⁹⁾。さらに、制御系の実装では計算量は少ないほうが望ましいため、等価変換法により制御器を離散化して実現した。本設計での設計手順を以下に示す。

(Step 0): 制御対象の線形パラメトリックモデル P を同定する。

(Step 1): 求めた離散時間モデルを連続時間モデルに変換する (付録参照)。

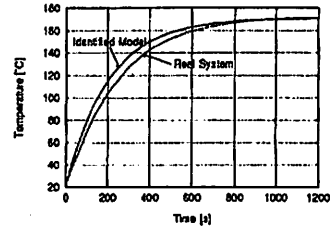


図5 ステップ応答 3V に対する比較

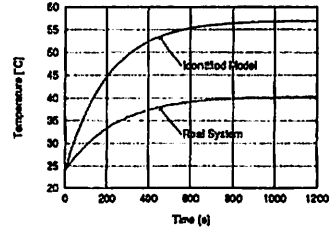


図6 ステップ応答 1V に対する比較

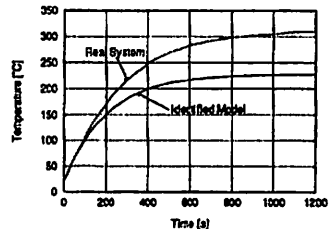


図7 ステップ応答 4V に対する比較

(Step 2): 設計仕様を定め一般化制御対象 G を求める (拡大系の作成)。

(Step 3): 混合感度問題を解き、中心解を求める。

(Step 4): 得られた制御器を離散時間系に変換する。

以下では順を追って設計法を説明する。

3-1 連続時間での H_∞ 制御系の設計

3-1.1 離散時間モデルの連続時間モデルへの変換

(3) 式を

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_{t+1} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}_t + \alpha \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_t \\ y_t = [1 \quad 0] \boldsymbol{w}_t \end{cases} \dots (4)$$

と表現する。サンプリングタイムを 10s としたとき、等価変換 (付録参照) を用いると連続時間システムは次式のようなになる。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad \dots (5)$$

ここに、 A, b, c は以下となる。

$$A = \begin{bmatrix} 4.1210 \times 10^{-4} & 4.7084 \times 10^{-1} \\ -5.0922 \times 10^{-3} & -4.5309 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -6.2269 \times 10^{-2} \\ 3.2770 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \quad 0]$$

この連続時間システムのボード線図を図8に示す。

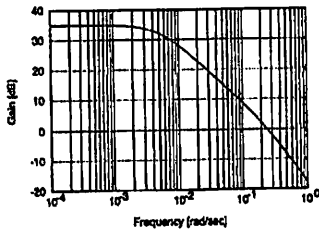


図8 モデルのボード線図 (連続時間)

3.1.2 評価規範と一般化制御対象

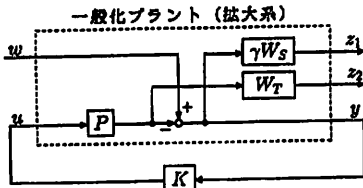


図9 混合感度問題

連続時間系に変換されたシステムの伝達関数は(5)式より次式で与えられる。

$$P = \frac{-0.0623s + 0.1261}{s^2 + 0.4527s + 0.0022} \quad \dots (6)$$

このとき、混合感度問題における評価関数は次式で記述される⁽⁹⁾⁽⁴⁾。

$$\left\| \frac{\gamma W_S S}{W_T T} \right\|_{\infty} < 1 \quad \dots (7)$$

ここで、 S, T は感度関数、相補感度関数と呼ばれるもので、コントローラを K とすると次式で定義される⁽⁹⁾⁽⁴⁾。

$$S := \frac{1}{1 + PK} \quad \dots (8)$$

$$T := \frac{PK}{1 + PK} \quad \dots (9)$$

また、 W_S, W_T はそれぞれ感度関数、相補感度関数の重みである。よく知られているように W_S は低周波数領域での追従特性の向上をはかり、また、 W_T は高周波数領域でのロバスト安定性を保証するように決定される。これらの重み関数の意味付けは H_{∞} 制御のテキストの中で述べられているが⁽⁹⁾⁽⁴⁾⁽¹⁰⁾、ここでは以下のように決定した。まず、感度関数 S の周波数重み W_S は低い周波数領域でゲインが大きくなるように、

$$W_S = \frac{0.1}{s + 0.0001} \quad \dots (10)$$

と選ぶ。次に、相補感度関数の重み関数は以下のように設定した。まず、ステップ応答実験結果からシステムは一次遅れ系の挙動を示すため、重み関数を評価するための公称モデル P_{nom} を一次遅れ系と設定し次式で記述する。

$$P_{nom} = \frac{\alpha}{1 + T_n s} \quad \dots (11)$$

次に、摂動を含むシステムを P_{real} とおく。ここで、システムのDCゲインの変動を δ_1 、時定数の変動を δ_2 とし、以下のような乗法的な摂動を考える。

$$\Delta_1 = -\frac{\delta_1}{\alpha} \quad \dots (12)$$

$$\Delta_2 = \frac{\delta_2 s}{1 + (T_n - \delta_2)s} \quad \dots (13)$$

ここに、 T_n はシステムの時定数である。上式より摂動を含む実システムは

$$P_{real} = (1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)P$$

$$= (1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1\Delta_2)P \quad \dots (14)$$

と表される。実験データより得られる $T_n = 260, \alpha = 0.55, \delta_1 = 0.225, \delta_2 = 60$ を上式に代入すると

$$|\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1\Delta_2|$$

$$< |\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_1\Delta_2|$$

$$= \left| \frac{0.225}{0.55} \right| + \left| \frac{60s}{1 + 200s} \right| + \left| \frac{0.225}{0.55} \right| \cdot \left| \frac{60s}{1 + 200s} \right|$$

$$< |2.5s| \quad \dots (15)$$

となる。よって、相補感度関数の周波数重みを

$$W_T = \frac{2.5s}{1} \quad \dots (16)$$

と選ぶ。

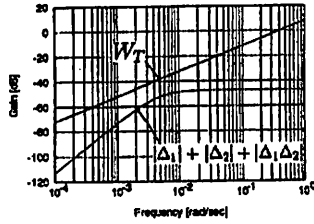


図 10 重み関数 W_T のボード線図

上述のようにして求めた周波数重み関数を用いて、図 9 のように一般化プラントを設定する。この拡大系の伝達関数は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_S & \gamma W_S P \\ 0 & -W_T P \\ 1 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \dots (17)$$

次に一般化プラントの状態空間モデルは次式で与えられる。

$$G = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 4.1210 \times 10^{-4} & -4.7084 \times 10^{-1} & 0 \\ -5.0922 \times 10^{-3} & -4.5309 \times 10^{-1} & 0 \\ -1.0 & 0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -6.2269 \times 10^{-2} \\ 3.2770 \times 10^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.80 \times 10^{-1} \\ 1.0303 \times 10^{-3} & 1.1771 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [-1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5567 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = 1.0, \quad D_{22} = 0$$

3-1.3 混合感度問題の解

このシステムに対し Doyle の方法⁽¹¹⁾を適用した結果、以下の H_∞ コントローラ (中心解) を得る。

$$\begin{cases} \dot{x}^c = A_c x^c + b_c y \\ u = c_c x^c \end{cases} \quad \dots (19)$$

ここで、 A_c, b_c, c_c は以下となる。

$$A_c = \begin{bmatrix} -7.8076 \times 10^{-1} & 1.0089 \times 10^0 & -3.4014 \times 10^0 \\ 9.2544 \times 10^{-1} & -1.2249 \times 10^0 & 4.4993 \times 10^0 \\ 1.3037 \times 10^0 & -6.5843 \times 10^{-1} & -9.6631 \times 10^0 \end{bmatrix}$$

$$b_c = \begin{bmatrix} -7.1508 \times 10^{-1} \\ -8.4772 \times 10^{-1} \\ -4.1382 \times 10^0 \end{bmatrix}$$

$$c_c = [-2.1708 \times 10^0 \quad 3.1404 \times 10^0 \quad -1.4653 \times 10^1]$$

また、(7) 式で与えられる評価関数を図 11 に示す。

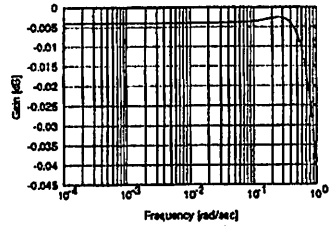


図 11 評価関数のボード線図

次に、感度関数と相補感度関数をそれぞれ図 12、図 13 に示す。

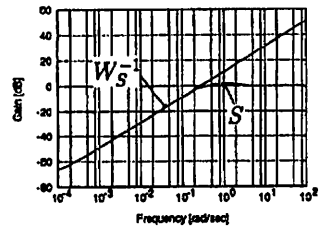


図 12 感度関数 S と重み関数 W_S^{-1} のボード線図

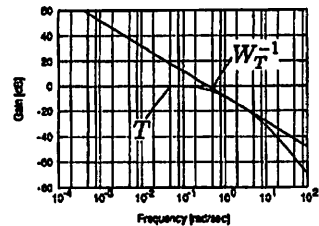


図 13 相補感度関数 T と重み関数 W_T^{-1} のボード線図

3-1.4 離散型コントローラ

さて、(19) 式をサンプリングタイム $1s$ で離散化したコントローラは次式で与えられる。

$$\begin{cases} x_{k+1}^c = A_{cd} x_k^c + b_{cd} y_k \\ u_{k+1} = c_{cd} x_{k+1}^c \end{cases} \quad \dots (20)$$

ここで、 A_{cd}, b_{cd}, c_{cd} は以下となる。

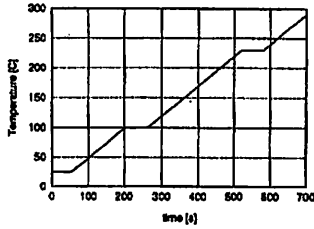
$$A_{cd} = \begin{bmatrix} 5.7642 \times 10^{-1} & 4.2416 \times 10^{-1} & -1.4459 \times 10^{-2} \\ 5.2219 \times 10^{-1} & 4.7483 \times 10^{-1} & 4.8589 \times 10^{-2} \\ 4.4728 \times 10^{-2} & 2.2518 \times 10^{-2} & -8.0350 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$b_{cd} = \begin{bmatrix} -3.0315 \times 10^{-1} \\ -1.4717 \times 10^0 \\ -3.6703 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

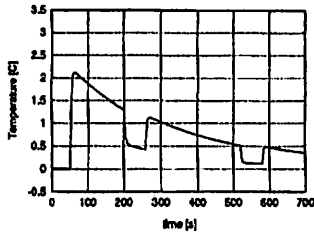
$$c_{cd} = [-2.1706 \times 10^0 \quad 3.1404 \times 10^0 \quad -1.4653 \times 10^1]$$

4. シミュレーションおよび実験結果

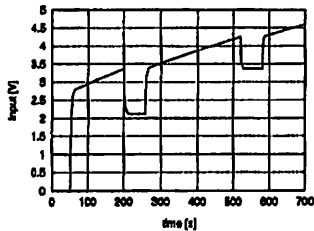
であることが確認できた。以上のシミュレーション結果より、ここで提案したロバスト制御系が、対象とする実システムに適用可能であることが予想される。



(a) 階段状の目標値に対する出力



(b) 目標値に対する誤差



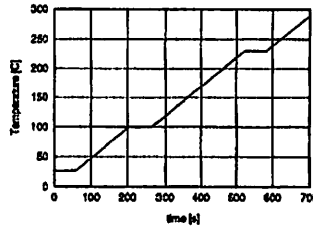
(c) 制御入力

図 14 シミュレーション結果

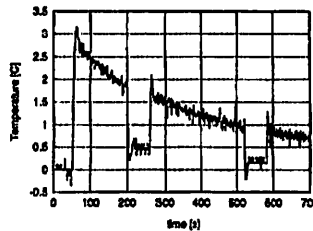
ここで設計された H_{∞} 制御系の有効性をシミュレーションおよび実験により確認する。まず、シミュレーションで制御対象として用いた非線形システムの伝達関数を次式で与える⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\begin{cases} T_n \dot{y} = -y + f(u) \\ f(u) = 20.3535u^2 - 7.7419u \end{cases} \quad \dots (21)$$

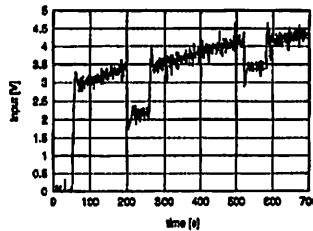
上式の非線形システムは、実システムの動特性を十分正確に反映しているモデルである。なお、ここでは、過渡応答および追従特性に対する制御性能を検証することを目的とする。従って、目標温度として、ランプ状に昇温したのち一定温度を保持するような軌道を与えた。その制御結果を図 14(a),(b),(c) に示す。立ち上がりにおける過渡的な温度偏差は温度上昇とともに減少していることがわかる。また、制御入力も十分滑らか



(a) 階段状の目標値に対する出力



(b) 目標値に対する誤差



(c) 制御入力

図 15 実験結果

次に、前述のシミュレーション結果を踏まえて、制御実験を行なった。目標値信号は、シミュレーションと同様に設定した。その実験結果を図 15(a),(b),(c) に示す。実験結果においても、過渡的な温度偏差は温度上昇とともに減少している。また、ノイズの影響による多少の乱れが生じているが、最終的な温度偏差は約 1%以内であり、良好な制御性能を保持していることが検証できた。また、実験結果はシミュレーションと同様な結果が得られていることから、ここで我々が提案する設計法は (21) 式で記述されるような特性をもつ非線形システムに適用可能であることが確認できた。

5. まとめ

本研究では、入力に非線形要素を含むマイクロヒータを制御対象とし、そのロバストデジタル温度制御系を構成した。ここでは、非線形システムを線形のARMAモデルでモデリングを行い、非線形項による影響をパラメータ変動とみなすことにより H_∞ 混合感度問題を導入してロバスト制御系を設計した。本設計法は、非線形システムに対し線形化を行なうことなく制御系の設計が行なえ、さらに、設計された制御系がシステムの非線形特性に対しロバスト性を保持するため、簡便で実用的な設計法となる。シミュレーションおよび実験結果より、入力に非線形特性を有するシステムに対し、提案したロバスト制御系が有効であることが確認できた。また、ここで提案した手法は、システム同定からロバスト制御系の設計まで系統的に行うことが可能であるため、あるクラスの非線形システムに対する統一的手法であると位置づけることができる。

文 献

- (1) 山口, 上里, 玉城, 山本, 金城, 平良, 棚原: 定速昇温装置のロバスト制御, 日本機械学会論文集 (C 編), 58 巻 553 号, pp.2657/2663 (1992)
- (2) 玉城, 大城, 山本, 金城, 平良, 棚原: 熱蛍光法を用いた年代測定システムの開発, 計測自動制御学会論文集, Vol.30, No.10, 1216/1224 (1994)
- (3) 英多勉: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- (4) 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, コロナ社 (1994)
- (5) 中澤高好: 信号解析とシステム同定, コロナ社 (1988)
- (6) 足立修一: ユーザーのためのシステム同定理論, 計測自動制御学会 (1992)
- (7) MATLAB 基本システムおよび Robust 制御 Tool Box, サイバネットシステム (1990)
- (8) 相良, 和田, 中野: デジタル制御の基礎, コロナ社 (1992)
- (9) Jer-Nan Jang: Applied System Identification, Prentice-Hall (1994)
- (10) 第 14 回システム制御情報学会講習会テキスト「 H_∞ 制御の基礎」(1992)
- (11) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khagonekar and B.A.Francis: State-Space Solutions to Standard H_∞ and H_2 Control Problems, IEEE Trans. AC, 34-8, 831/847 (1989)

付録 A. 連続時間システムから離散時間システムおよび離散時間システムから連続時間システムへの変換

ここでは、サンプリング区間内で制御入力が一固定であると仮定したときの等価変換を用いて、両者の係数行列間の関係式を示す。まず、連続時間システムの状態空間表現を次式で記述する。

$$\dot{x} = A_c x + B_c u. \quad \dots (A1)$$

ここに、初期値を $x(t_0)$ とすると、時刻 t における解は

$$x(t) = e^{A_c t} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)} B_c u(\tau) d\tau \dots (A2)$$

となる。今、サンプリングタイムを Δt とし、サンプリング区間内で入力 u が一定、すなわち

$$u(\tau) = u(k\Delta t), k\Delta t \leq \tau < (k+1)\Delta t \dots (A3)$$

を仮定する。このとき、 $t_0 = k\Delta t$ と $t = (k+1)\Delta t$ を (A2) 式に代入すると次の離散時間システムを得る。

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad \dots (A4)$$

ここに、 x_k, u_k, A_d, B_d は以下で定義される。

$$x_k = x(k\Delta t) \quad \dots (A5)$$

$$u_k = u(k\Delta t) \quad \dots (A6)$$

$$A_d = e^{A_c \Delta t} \quad \dots (A7)$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t} e^{A_c r} B_c dr \quad \dots (A8)$$

従って、連続時間システムの状態空間モデルが与えられ、サンプリングタイムを指定したときの離散時間システムの係数行列 A_d, B_d は (A7), (A8) 式より求まる。

次に、離散時間システムの状態空間モデルとサンプリングタイムが与えられたとき、連続時間システムの係数行列 A_c, B_c は以下の手順で求まる。まず、(A7) 式より、 A_c と A_d の関係は

$$A_c = \frac{\ln A_d}{\Delta t} \quad \dots (A9)$$

となる。さらに、 A_c が正則であると仮定すると (A8) 式より、

$$\begin{aligned} B_d &= \int_0^{\Delta t} e^{A_c r} B_c dr \\ &= A_c^{-1} \left[e^{A_c r} \right]_0^{\Delta t} B_c \\ &= [e^{A_c \Delta t} - I] A_c^{-1} B_c \\ &= [A_d - I] A_c^{-1} B_c \quad \dots (A10) \end{aligned}$$

となる。従って、上式より B_c は次式で与えられる。

$$B_c = A_c [A_d - I]^{-1} B_d \quad \dots (A11)$$