

高精度三次元フリーメッシュ法*
(回転自由度を有する四面体要素の開発)松原 仁*¹, 伊良波 繁雄*²
富山 潤*³, 矢川 元基*⁴Three-Dimensional Free Mesh Method
with Drilling Degrees of Freedom
(Development of TET Element Included Drilling Degrees of Freedom)Hitoshi MATSUBARA, Shigeo IRAHA*⁵,
Jun TOMIYAMA and Genki YAGAWA*⁶ Department of Civil Engineering and Architecture, University of the Ryukyus,
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami gun. Okinawa, 903 0129 Japan

In this paper, the solid tetrahedron element with drilling degrees of freedom is presented. This element has only four nodes. Each node has three translational components and three drilling ones. By using this element, the high level of analytical accuracy can be obtained. On the other hand, the free mesh method creates tetrahedron elements locally around every nodal point. Consequently, the element with intermediate nodes is not available to the free mesh method. However, the proposed solid tetrahedron element with drilling degrees of freedom is especially effective to the free mesh method, because it has no intermediate nodes. In this paper, the feature of accuracy of this element is shown through several numerical examples, and the effectiveness of the free mesh method is also described.

Key Words: Highly Accuracy Element, Drilling Degrees of Freedom, Isoparametric Element, Tetrahedral Element, Free Mesh Method

1. 結 論

近年, あらゆる構造物が大形化・複雑形状化する傾向にあり, その応力状態を評価するためには実験や数値計算が必要である。しかし, 実験ではコストや, 労力, 技術的に困難な場合がある。一方, 計算機性能の著しい発展に伴い, 大規模な三次元解析が, 固体問題, 熱伝導問題, 流体問題などのようなさまざまな工学分野の諸問題に適用されてきており, 数値計算技術への期待が高くなっている。また, 要素自動分割システム, メッシュレス法などの普及により, その適用および応用範囲はいちだんと広がりを見せている。しかし, 有限要素法やフリーメッシュ法⁽¹⁾などのような要素を必要とする解析法では, その精度は使用要素に極めて依存し, 高精度な解析精度をもつ要素の必要性が求められている⁽²⁾。

一般に, 三次元有限要素解析で複雑形状の問題を扱

う場合, 六面体要素を用いると要素の有する性能を活かしたような自動要素分割を, 複雑形状に対して行うことは困難である⁽³⁾。一方, 四面体要素を用いれば, 基本的にどのような複雑形状に対しても自動要素分割が可能で, 適用範囲も広い。しかし, 有限要素法で四面体要素を用いた場合, 一次要素を用いれば, 一次要素当たりの自由度は12と少なくなり計算のコストは低い, 精度の面で問題がある。二次であれば一次要素当たり30自由度を持つことになり, 解析規模が大きくなるに従い計算のコストが極めて高くなる。また, フリーメッシュ法では, 節点周りに局所的な要素生成を行うため, 中間節点を有するような二次要素を用いることは, 局所要素生成アルゴリズムの制約により困難であり⁽⁴⁾。従来, 四面体一次要素(Constant strain tetrahedral element: C-TET)が用いられ, 解析対象によっては精度的な問題が指摘されてきた。

フリーメッシュ法の高精度化に関する既存の研究として, 二次元問題に対しては, 関東⁽⁵⁾, 三次元問題に対しては, 顔ら⁽⁶⁾がフリーメッシュ法を混合形成によって定式化し, その高精度化を行い良好な結果を得ている。しかし, 混合形式理論による急激に応力に変化する問題, すなわち, 複合材料等の応力解析への適用は有効ではないといわれている⁽⁷⁾。また, 有限要素法,

* 原稿受付 2003年3月27日。

¹ 琉球大学大学院(☎903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原1)。² 正員, 琉球大学工学部。³ 琉球大学工学部。⁴ 正員, 東京大学大学院(☎113-8654 東京都文京区本郷7-3-1)。

E-mail: k038603@eve.u-rykyu.ac.jp

フリーメッシュ法両方に関して、三次元固体力学問題において高精度解をもたらす「要素」という観点からの研究はあまり行われていない¹³⁾。

以上のような状況を踏まえ、三次元解析における高精度フリーメッシュ法の確立を目的とし、著者らが提案した回転自由度を有する平面三角形要素¹⁴⁾の誘導方法を三次元に拡張し、回転自由度を有する4節点四面体要素(Tetrahedral element with drilling degree of freedoms: D-TET)を開発した。本論文では、D-TETの定式化およびフリーメッシュ法の局所要素への適用について議論する。

そのために、まず2章においてD-TETの定式化を行い、3章で既存フリーメッシュ法について述べ、本要素をフリーメッシュ法に適用する。4章では本要素の精度的特長について述べ、最後に5章で結論を述べる。

2. 回転自由度を有する
4節点四面体要素

ここでは、10節点アイソパラメトリック要素(10-nodes Isoparametric tetrahedral element: I-TET)を利用して、D-TETを定式化する。

2-1 10節点アイソパラメトリック四面体要素(I-TET) 図1に体積座標系でのI-TETと各節点の座標を示す。I-TETの詳細な説明は文献(6)に詳しいのでここでは簡単に説明する。

I-TETの要素剛性マトリックス($[k']$)は体積座標を用いて、

$$[k'] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \int_0^{1-\xi_1-\xi_2} [B]^T [D] [B] \times \det[J] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots \dots \dots (1)$$

と表すことができる。ここで、 $[B]$ はひずみマトリックス、 $[D]$ は応力マトリックス、 $[J]$ はヤコビアンマトリックスである。また、本研究では、式(1)の体積積分は、ガウスの数値積分法¹⁷⁾により計算した。

2-2 回転自由度を有する四面体要素(D-TET) 高精度な解を得ることのできるI-TETは、四面体の

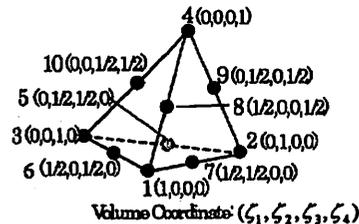


Fig.1 Isoparametric TET element

各辺の中間に節点を持つために、直接フリーメッシュ法へは適用できない。このために、本研究では新たに導入した頂点の回転角(図2参照)を用いてI-TETの中間節点変位を消去した。具体的にはI-TETの各辺を仮想的にはり要素と仮定し、中間節点変位と頂点の回転角の関係式を利用する。

局所座標系は、図2のように*i, j*辺の軸方向*x**と仮定し、*x**に直交する面上に*y**, *z**をとる。このとき、*x, y*平面と*x*, y**平面が接する線上に*y**軸をとり、*y**軸の正の方向は、*z**が増加するとき、*z*軸の*z*値も同時に増加するように仮定する。局所座標系での*i*点での*z**軸まわりのモーメントによる回転角を $\theta_{z^*}^i$ 、*y**軸まわりのモーメントによる回転角を $\theta_{y^*}^i$ とし、*j*点でも同様にモーメントによる回転角を $\theta_{z^*}^j$ 、 $\theta_{y^*}^j$ とする。これらの*i, j*点の回転角による*i, j*間の変位は、局所座標系での*x**方向の変位を $u_{x^*,ij}^*$ 、*y**方向の変位を $v_{y^*,ij}^*$ 、*z**方向の変位を $w_{z^*,ij}^*$ とし、3次式で仮定すると、

$$\left. \begin{aligned} u_{x^*,ij}^* &= 0 \\ v_{y^*,ij}^* &= +\theta_{z^*}^i l_{ij} (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + \theta_{y^*}^i l_{ij} (\xi^3 - \xi^2) \\ w_{z^*,ij}^* &= -\theta_{y^*}^i l_{ij} (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) - \theta_{z^*}^i l_{ij} (\xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

のようになる。式(2)で、 l_{ij} は辺*i, j*の長さ、 $\xi = x^*/l_{ij}$ である。また、式(2)では、*i, j*点に作用する局所座標系でのねじりモーメントによる変位は無視すると仮定している。

式(2)より、*ij*辺の中間節点変位は、 $\xi=1/2$ を代入することにより求めることができ、これをマトリックス表示すると次式となる。

$$\left\{ \begin{aligned} u_{x^*,ij}^* \\ v_{y^*,ij}^* \\ w_{z^*,ij}^* \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 & 0 & -l_{ij}/8 \\ 0 & -l_{ij}/8 & 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 \end{bmatrix} \{ \theta^* \}$$

$$\therefore \{ \theta^* \} = \{ \theta_{z^*}^i, \theta_{y^*}^i, \theta_{z^*}^j, \theta_{y^*}^j, \theta_{z^*}^i, \theta_{y^*}^j \}^T \dots \dots \dots (3)$$

ここで、式(3)の右辺のマトリックスを $[l'_{ij}]$ とする。式(3)は局所座標系での式であるから、左辺は全体座

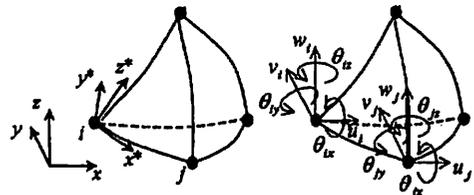


Fig.2 TET element included drilling degree of freedom

標系での節点変位、右辺の回転に関する項は全体座標系での節点の回転角($\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}, \theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz}$)を用いて次のように全体座標系に変換する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} \{u_{M,i}, v_{M,i}, w_{M,i}\}^T &= [t_{ij}] [t_{ij}] \{\theta\} \\ [t_{ij}] [t_{ij}] &= [\lambda]^T [t_{ij}] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ \{\theta\} &= \{\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}, \theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここで、 $(u_{M,i}, v_{M,i}, w_{M,i})$ は全体座標系での中間節点変位を表し、 $[\lambda]$ は局所座標系から全体座標系への座標変換マトリックスである。

中間節点変位は、式(4)で求めた回転角に加え、各頂点をもつ全体座標系での軸方向の変位の影響も受ける。そこで頂点の全体座標系での変位($u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j$)の影響を考慮すると、全体座標系での中間節点変位(u_m, v_m, w_m)は、次式となる。

$$\left\{ \begin{aligned} u_m \\ v_m \\ w_m \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} (u_i + u_j)/2 + u_{M,i} \\ (v_i + v_j)/2 + v_{M,i} \\ (w_i + w_j)/2 + w_{M,i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

I-TETでの頂点および辺中央の変位の内、辺中央だけの変位を式(5)を用いて変形し、全変位間の関係を示すと次のように表すことができる。

$$\{\delta\} = [T] \{\delta\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\{\delta\}$ はI-TETの節点変位ベクトル、 $\{\delta\}$ はD-TETの節点変位ベクトルであり、節点*i*での変位

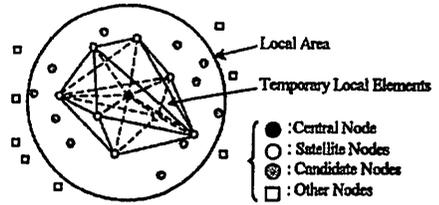


Fig. 3 Concept of free mesh method

ベクトルを示すと、 $(u_i, v_i, w_i, \theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz})$ となり、図2に示すように一節点当たり6個の自由度を有することになる。

よって、本要素のひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\delta\}^T [T]^T [B]^T [D] [B] [T] \{\delta\} dv \dots\dots\dots (7)$$

と表すことができ、D-TETの要素剛性マトリックス $[k]$ は、

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \dots\dots\dots (8)$$

と導くことができる。なお、D-TETの形状関数は通常のI-TETと同一である。

ここで、注目すべきことは、本要素は一要素当たり、24個の自由度を有しており、I-TETと比較すると、6個減少していることである。

具体的な $[T]$ は $[t_{ij}]$ を用いて、

$$[T] = \begin{bmatrix} [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{12}] & [e_{1/2}] & [t_{21}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{13}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{31}] & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{14}] & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{41}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{23}] & [e_{1/2}] & [t_{32}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{34}] & [e_{1/2}] & [t_{43}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{24}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{42}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができる。ただし、 $[t_{ij}]$ の*i, j*は四面体の頂点の節点番号であり、その他の各マトリックス成分は次のようになる。

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [e_{1/2}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

以上のようにD-TETの剛性マトリックスはI-TETの剛性マトリックスの両側から式(9)で示した変換マトリックスとその転置マトリックスを乗じることにより、簡単に作成することができる。

3. フリーメッシュ法

3.1 基本的アルゴリズム フリーメッシュ法⁽¹⁾は、有限要素法を基本概念として開発された手法で、有限要素

素法のように、グローバルな要素情報を必要とせず、要素-節点コネクティビティーを必要としない、よって、メッシュレス法の容易さと、有限要素法の解析精度の両方を兼ね備えた解析手法である。

フリーメッシュ法では、図3に示すように解析領域内に配置された各節点(中心節点)ごとに、その付近の節点(衛星節点)を集めてローカルな領域で一時的に四面体要素を作成する。これらの一時的な四面体要素の要素剛性マトリックスから中心節点に寄与する行成分のみを全体剛性マトリックスに足し合わせる。これをすべての節点で行い、全体剛性マトリックスを作成し、連立一次方程式を解く。

このようにフリーメッシュ法はローカルな要素生成、全体剛性マトリックスの作成および求解までをシームレスに行うことができ、解析者の負担を極めて軽減することができる。

3.2 D-TETを用いたフリーメッシュ法 D-TETは、四面体頂点にのみ自由度を有するから、フリーメッシュ法への移植は容易である。具体的には、局所要素作成時に、仮想的に四面体要素の中間節点座標を求め、一時的に作成したT-TETの要素剛性マトリックスを本要素の剛性マトリックスに変換すればよい。

しかし、本要素は要素内に積分点を持つため、節点ひずみ・応力についての議論が必要である。そこで、本研究では、式(11)に示すように、衛星要素の体積(w_e)を重みとして、中心節点に最も近い積分点のひずみ(ϵ_{ni})・応力(σ_{ni})の平均を取り、節点ひずみ(ϵ_n)・応力(σ_n)を補間評価した(ただし、1点積分の場合は、局

所要素重心点の要素ひずみ・応力の平均をとる)。また、図4には、本手法の概念図を示した。ただし、簡便なため、二次元領域での表示である。

$$\epsilon_n = \frac{\sum w_e \epsilon_{ni}}{\sum w_e}, \quad \sigma_n = \frac{\sum w_e \sigma_{ni}}{\sum w_e} \dots\dots\dots (11)$$

4. 精度評価

4.1 片持りの曲げ・ねじり問題 ここでは、図5に示すように、片持りの自由端にせん断力およびねじりモーメントが作用した場合のD-TETの精度の特長を、C-TETを用いた既存フリーメッシュ法と比較検討しながら述べる⁽⁶⁾⁽⁹⁾。

精度を検証するために、曲げ問題の場合は、自由端の載荷軸方向変位および、はり中央上端の軸方向応力の精度比較を横長比4:1, 20:1の2種類で、はり理論解と比較する。また、ねじり問題の場合は、自由端面四隅の点の円周方向変位(はりの圆心を中心とする円周)について、理論解と比較する。

図7に曲げ問題に対しての自由度と正規化変位・応力との関係を示し、図8にはねじり問題についての自由度と正規化変位の関係を示す。図中のGPはガウス積分点の個数を変えている。なお、積分点の座標位置に関しては、文献(7)に詳しい説明があるので、ここでは割愛する。

変位に関して、図7より横長比が大きくなるにつれて、本要素とC-TETとの理論解への収束の差が大きくなるのがわかる。また、応力については、はり高さ方向の節点数が3~5点(はり高さ方向の有限要素分割の3~4要素に対応)と少ないことに加え、はり上端の節点と応力を求めている積分点の距離が離れているため、応力の精度は変位の精度ほどは良くない。しかし、はり上下端部に節点を集中的に配置することで、はり上下端部応力の精度は改善可能である。なお、図6には、はり高方向の節点数が5の場合の節点分布を示した。

一方、本要素の積分点の変化による自由端の載荷軸方向変位の理論解への収束をみると、1点積分の場合は、理論解の上側から近づき、4, 5点積分の場合

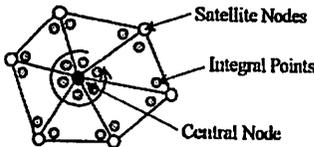


Fig. 4 Method of evaluating strain and stress

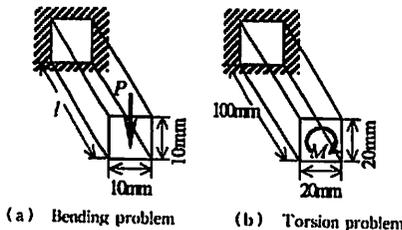


Fig. 5 Cantilever beam model

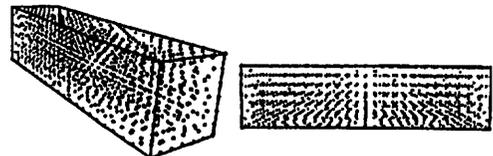
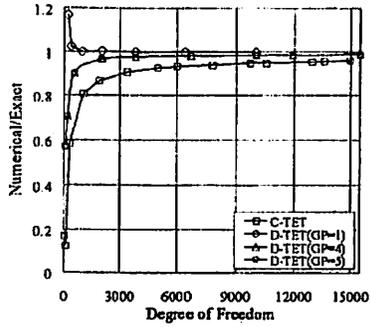
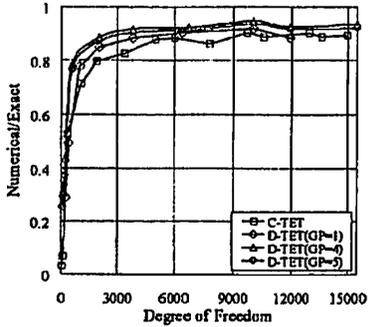


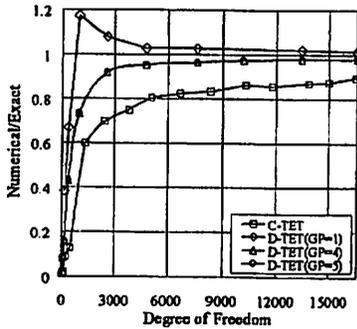
Fig. 6 Distribution of nodes



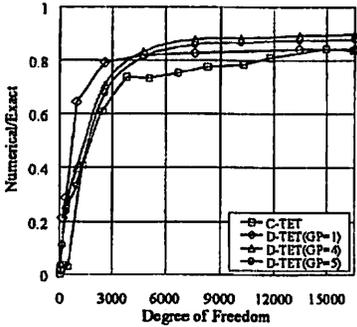
(a) Span : Height = 1 : 4 (displacement)



(b) Span : Height = 1 : 4 (stress)



(c) Span : Height = 1 : 20 (displacement)



(d) Span : Height = 1 : 20 (stress)

Fig. 7 Comparison of convergence on cantilever beam (bending problem)

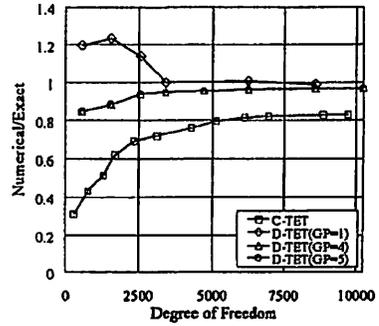
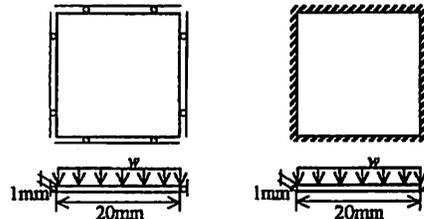
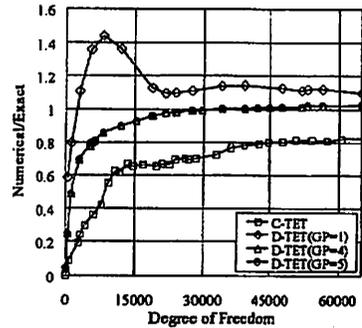


Fig. 8 Comparison of convergence on cantilever beam (torsion problem)

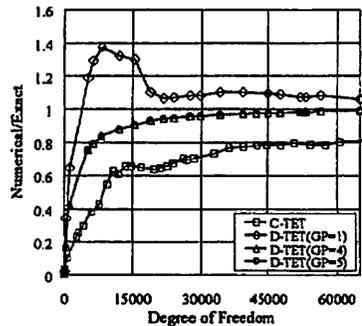


(a) Simply supported (b) Clamped

Fig. 9 Plate model



(a) Simply supported



(b) Clamped

Fig. 10 Comparison of convergence on plate

は下側から近づくという特長を持っていることがわかる。しかし、1点積分を用いた場合は、「同じ節点数・節点分布を用いても連立一次方程式の解が収束しない」という問題が生じた。これは、積分点一つでは、要素・節点分布により解析領域の体積積分を疎密に行うことができない場合がある、とも解釈することができる。よって、D-TETを用いて安定した解を得るためには、4点積分もしくは、5点積分を用いるほうが良いと考えられる。次に、図8より本要素による結果は理論解に比較的良好に収束しているが、C-TETを用いた場合は理論解の約80%程度でしか収束しておらず、理論解よりも硬めの評価である。また、積分点による変化に対しては、曲げ問題同様である。

以上より、片持はり問題に対する本要素の解は、対象とする問題が難しくなるにつれて、C-TETと差が顕著に現れることがわかる。

4.2 正方形板の曲げ問題 ここでは、図9に示すような正方形板の曲げ問題について、本要素の精度評価を行う¹⁰⁾。解析は、正方形板の全周辺単純支持および、全周辺完全固定の場合の2種類について、戦荷軸方向の最大変位について検討する。

図10に自由度と正規化変位の関係を示す。4.1節同様に、C-TETを用いたフリーメッシュ法よりも極めて良い精度を得ており、その差は、片持はりの精度比較よりも顕著に現れている。解析解の理論解への収束挙動は、はりのねじり問題や、横長比の大きいはりの場合と似た形をしており、C-TETによる結果は、理論解の約60%程度でしか収束しておらず、やや硬めの評価である。これは、曲げが卓越する問題、あるいは三次元的な複雑な変形挙動を示すような問題に対してC-TETと比較すると、本要素が極めて高精度の解を与えることを意味している。また、積分点の変化による解の収束性は、片持はりによる結果と全く同様に1点積分の場合は理論解の上側から近づいている。よって、板の曲げ問題に対しても、本要素の有効性を示すことができた。

以上より、横長比の大きなはりの曲げ問題、ねじり問題、および板の曲げ問題のように、変形挙動が複雑になるにつれて、本要素とC-TETとの差が顕著に現れることがわかった。よって、実構造物のような複雑な自然外力が加わり、それによって複雑な変形挙動を示すような問題の場合、本要素は極めて有効であると考えられる。

5. 結 論

回転自由度を有する四面体要素を開発し、本要素を用いることで、比較的低い計算コストで高精度な三次元フリーメッシュ法が実現できることを示し、本要素の精度的な特長について述べた。本要素についてまとめると以下のようなになる。

(1) 本要素は、フリーメッシュ法のような中間節点を有するような二次要素を用いることが困難な状況で、極めて有効な手法である。

(2) 本要素は、フリーメッシュ法の最大の利点である並列計算への応用へも、特別な処理を必要とせず、従来のフリーメッシュ法となら変わりなく行うことができる。

(3) 本要素は、節点に回転自由度を有しているため、複雑な曲げなどの作用が卓越する問題に対して、特に有効である。

以上から、本要素はフリーメッシュ法の局所要素に極めて適していると考えられ、高次要素から誘導しているので流体問題などへの応用も可能であると考えられる。

本研究の一部は、文部科学省ITプログラム「戦略的基盤ソフトウェアの開発」において実施された。関連各位に謝意を表する。

文 献

- (1) 矢川元基・細川孝之, フリーメッシュ法(一般のメッシュレス法)の三次元問題への適用, 機論, 63-614, A (1997), 2251-2256.
- (2) 山田貴博, 四面体要素の性能評価, 計算工学講演会論文集, 5 (2000-5), 435-436.
- (3) 関東康祐, 混合法による高精度フリーメッシュ法, 日本計算工学会論文集, (2000-7), No. 20000036.
- (4) 碩文雄・矢川元基, フリーメッシュ混合法による三次元応力解析, 機論, 67-663, A (2001), 2251-2256.
- (5) 安和守史・伊良波繁雄・富田潤・矢川元基, 改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究, 日本コンクリート工学年次論文報告集, 23-3 (2001), 1-6.
- (6) 鷲津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本義之・川井忠彦, 有限要素法ハンドブック, 1巻, (1992), 363-405, 培風館.
- (7) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (矢川元基・ほか2名訳), マトリックス有限要素法, 1巻, (1996), 174-179, 科学技術出版社.
- (8) 鶴戸口英善・国尾武, ナメシエンコ材料力学, 上巻, (1968), 165-169, 東京図書.
- (9) 泉満明, ねじりを受けるコンクリート部材の設計法, (1972), 25-62, 技報堂.
- (10) 関谷社・斉藤耀, 薄板構造力学, (1968), 177-197, 共立出版.