

有限要素多結晶モデルを用いた
応力増分方向依存塑性構成式パラメータの決定*末吉敏恭^{*1}, 具屋守章^{*2}
伊藤耿^{***3}, 宮城清宏^{*1}Determination of Constitutive Equation Parameter
Using Finite Element Polycrystalline ModelToshiyasu SUEYOSHI^{*1}, Moriaki GOYA,
Koichi ITO and Kiyohiro MIYAGI^{**}Department of Mechanical Systems Engineering, University of the Ryukyus,
1 Senbaru, Nishihara cho, Okinawa, 903-0213 Japan

A plastic constitutive theory incorporating the directional dependence of the plastic strain increment $d\epsilon^p$ on the stress increment $d\sigma$ was proposed by Goya and Ito. The expression was given in terms of two transition parameters $\mu(\alpha)$ and $\beta(\alpha)$ which denote the magnitude and the direction angle of the plastic increment, where α denotes the direction angle of the stress increment measured from a particular direction n_k , named "natural direction", in which the direction of the stress increment coincide with that of the plastic strain increment. In this report, a computer code for a finite element polycrystalline model is used for the numerical investigation of the variation of the two constitutive parameters $\mu(\alpha)$ and $\beta(\alpha)$ of anisotropic plastic materials. The results show that the approximate functions for the two transition parameters are numerically determined and the direction dependence rule can be naturally extended for anisotropic plastic materials. It is also suggested that several quadratic functions used for classical plastic potential may be introduced for the natural direction potential whose normal is identical to the natural direction.

Key Words: Plasticity, Anisotropy, Constitutive Equation, Directional Dependence Rule, Natural Direction, Finite Element Polycrystalline Model, Associated Flow Rule

1. 緒 言

成形シミュレーションにおいて、成形不良現象や成形限界を高精度に予測するために、用いている材料の弾塑性変形挙動を忠実に表現できる材料構成式が果たす役割は、非常に重要である。等方材を仮定し、Misesの降伏関数を塑性ポテンシャルとするPrandtl-Reuss則が最も知られた構成式であるが、塑性ひずみ増分の方向が現応力状態によって一義的に定まってしまうため、座屈や局所くびれなどの分岐現象のように応力の方向が急変するような変形に対しては表現できないことが知られている。この改善策として、塑性ひずみ増分方向が現応力状態だけでなく後続の応力増分方向に依存する特徴をもつ応力増分方向依存構成式が種々提案されてきた^{(1)~(3)}。その一つとして塑性ひずみ増分の方向に関わる $\beta(\alpha)$ と、その大きさに関わる $\mu(\alpha)$

からなる二つの遷移関数を導入することによって得られた具屋ら⁽⁴⁾による構成式がある。ここで、 α は、偏差応力空間における順方向(偏差応力増分方向と塑性ひずみ増分方向が互いに一致する方向)からの偏差応力増分の振れ角を示す。これら二つの遷移関数が構成式の基本的パラメータであることは著者らによる文献に詳しい⁽⁵⁾。これら遷移関数を実験的に求めるには、ある応力点まで負荷し、そこから任意の方向に応力増分を与える実験を種々の応力増分方向に対して行う必要があるため、膨大な数の試料と精密な測定が不可欠である。しかし、それには、大変な時間と経費を要するため生産現場では不向きである。従って、実験に代わる方法として、近年、注目されるようになってきた多結晶塑性論に基づく有限要素多結晶モデルを利用することが考えられる。有限要素多結晶モデルは、単純な単結晶内のすべりのみによって解析が行われるため複雑な応力ひずみ関係を考慮する必要がないという利点をもつ。過去には、 $\mu(\alpha)$ 、 $\beta(\alpha)$ を求めるために、等方材に対して、KBWモデルを用いた研究が、伊藤ら⁽⁶⁾によりなされており、それによると、単軸負

* 原稿受付 2001年2月7日。

^{*1} 正員、琉球大学工学部(〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原1)。^{*2} 正員、金秀本社総合経営企画本部(〒900-0029 那覇市旭町27)。^{*3} 正員、東北大学大学院情報科学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

E-mail: sueyoshi@teada.tec.u-ryukyuu.ac.jp

荷方向と純粋せん断方向において、比例負荷ではひずみ増分の方向は負荷方向に一致しているが、それ以外では負荷方向から純粋せん断方向に偏向していることから、ひずみ増分方向の応力増分方向依存性を示唆する報告を行っている。また、Gotoh⁽⁷⁾による結晶格子回転則に基づく静的陽解法アルゴリズムを用いた研究が、Goyaら⁽⁸⁾によって行われているが、その結果は、等方材に対するものであり、先の伊藤らの報告と同様の結論を得ている。そこで、本研究では、有限要素多結晶モデルを用いて、材料の初期異方性が、上述の呉屋らによって提案された構成式における $\mu(\alpha)$ および $\beta(\alpha)$ に与える影響とその具体的関数形、ならびに、構成式における塑性ひずみ増分方向を決定するポテンシャル論について検討を行う。

2. 応力増分方向依存塑性構成式の概略

先に呉屋らが提案した構成式の表現は、滑らかな降伏曲面の存在を前提とし、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を導入したもので、次式で表現される。

$$d\sigma = 2G^* \left[d\varepsilon + \frac{\nu^*}{1-2\nu^*} d\varepsilon^V \delta - \frac{(n_N : d\varepsilon) n_N}{S^*} \right] \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} G^* &= \frac{GH'}{H' + 3G\mu \sin \beta / \sin \alpha} \\ S^* &= \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)} \left(\frac{H' \sin 2\alpha}{6\mu G} + \sin \alpha \cos \beta \right) \\ \nu^* &= \nu + \frac{E\mu \sin \beta}{2H' \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 n_N は、任意の応力状態に対して、偏差空間における後続の偏差応力増分方向と塑性ひずみ増分方向が一致する方向、いわゆる順方向 (Natural direction) の単位ベクトルである。Ilyushinの偏差応力空間にて

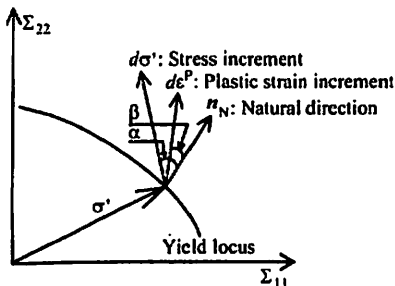


Fig. 1 Geometrical relationships among yield locus in Ilyushin's stress space, stress increment, natural direction vector, plastic strain increment and measured angle at a plastic loading point

概念図を図1に示す。 α 、 $\beta(\alpha)$ は、それぞれ偏差空間における応力増分ならびに塑性ひずみ増分の n_N 方向からの振れ角であり、さらに、塑性ひずみ増分の大きさに関する無次元パラメータ $\mu(\alpha)$ を導入して、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\bar{d\varepsilon}^P$ の間に次式の関係を設定している。

$$\bar{\sigma} = H' \bar{d\varepsilon}^P / \mu(\alpha) \quad (3)$$

ここで、 H' は、順方向負荷における加工硬化係数である。すべてのパラメータは、順方向からの振れ角として規定されるため、順方向の決定に関して具体的手法を考慮する必要がある。

3. 解析モデル

計算に用いる有限要素多結晶モデルは、静的陽解法アルゴリズム⁽⁸⁾を用いる。各要素は、8Gauss積分点評価の8節点六面体アイソパラメトリック要素であり、12個のすべり系を持つFCC材アルミニウム単結晶とする。これら単結晶の集合体として図2に示す全要素数216個の立方体ブロックによる多結晶モデルを想定する。計算に用いた材料定数を表1に示す。

Young's modulus	$E = 72$ [GPa]
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Initial shear yield stress for slip system	$Y = 196$ [MPa]
Work hardening coefficient	$H' = 784$ [MPa]
Latent work hardening parameter	$q = 1.2$

初期異方性材の結晶方位配列を得るために、ランダム関数を用いて数値的に等方材の挙動を示す仮想材料の方位を発生させ、両端固定の平面ひずみ圧縮条件にて約60%の数値圧延を施した。圧延前の結晶方位については、あらかじめ、X、YおよびZ方向へ変位境界条件にて引張試験を施し、等方性を満たすことを確認している。圧延前後の{111}極点図を図3に示す。

4. 解析方法

巨視的相当塑性ひずみ値、約0.5%における巨視的相当応力値を降伏応力と定義し、その後、様々に負荷方向を変化させることにより、応力増分方向が塑性ひずみ増分方向へ与える影響について調べる。さらに、このような手法を取ることにより、現応力状態における順方向を調べることができる。以下、図4に示すように、降伏応力に到達するまでを第一ステージ、後続の微小負荷領域を第二ステージと呼ぶ。有限要素多結

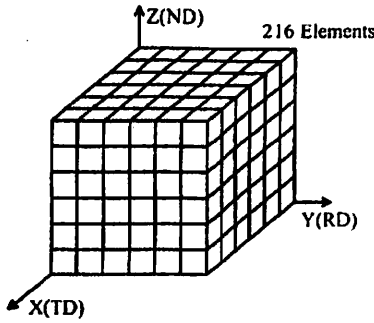


Fig. 2 Finite element divisions of polycrystalline model block

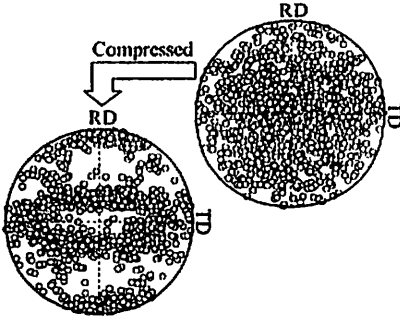


Fig. 3 {111} pole figure before and after plane strain compression

晶体モデルにより得られる第一ステージにおける巨視的応力 S_{AVE} 、巨視的ひずみ E_{AVE} 、ならびに第二ステージにおける巨視的応力増分 ΔS_{AVE} 、巨視的ひずみ増分 ΔE_{AVE} は、要素中の Gauss 積分点における各値を平均することにより、また、各ステージにおける巨視的塑性ひずみ E_{AVE}^P ならびに巨視的塑性ひずみ増分 ΔE_{AVE}^P については、次式を用いた。

$$S_{AVE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i, E_{AVE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \quad (4)$$

$$\Delta S_{AVE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta S_i, \Delta E_{AVE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta E_i \quad (5)$$

$$\{E_{AVE}^P\} = \{E_{AVE}\} - [D^c]^{-1} \{S_{AVE}\} \quad (6)$$

$$\{\Delta E_{AVE}^P\} = \{\Delta E_{AVE}\} - [D^c]^{-1} \{\Delta S_{AVE}\} \quad (7)$$

ここで、 N は、Gauss 積分点の総数、 $[D^c]$ は、巨視的弾性係数マトリックスであり、本解析において、弾性変形中は、等方弾性体であると仮定する。さて、構成式パラメータを表現する二つの遷移関数は、順方向からの振れ角として定義される。しかし、第一ステージの降伏応力状態に対する順方向は、第二ステージにおいて、様々な方向に負荷し、応力増分方向と塑性ひず

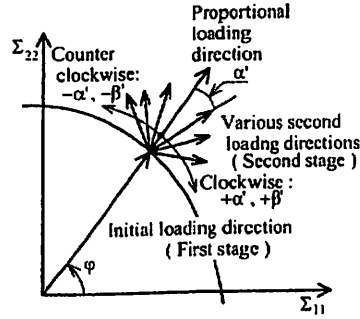


Fig. 4 Definition of initial and second loading direction, sign of α' and β' measured from proportional loading direction

み増分方向が一致する方向として、はじめて決定される。すなわち、第二ステージの解析結果を検討するまで、順方向は不明である。そこで、あらかじめ負荷方向のわかっている第一ステージ負荷方向 φ からの振れ角として、応力増分方向 α' 、塑性ひずみ増分方向 β' および μ' を次式により求めた。

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \cos^{-1} \left(\frac{\Delta S_{AVE}' : S_{AVE}'}{\Delta S_{AVE} S_{AVE}'} \right) \\ \beta' &= \cos^{-1} \left(\frac{\Delta E_{AVE}' : S_{AVE}'}{\Delta E_{AVE}^P S_{AVE}'} \right) \\ \mu' &= H_M^i \Delta S_{AVE} / \Delta E_{AVE}^P \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 (\cdot) は、Mises 定義による各値の相当成分である。また、 α' 、 β' は、比例負荷方向から時計方向を正、反時計方向を負とする。

5. 解析結果と考察

5.1 構成式パラメータの検討 第一ステージが、圧延方向（以下 RD 方向）および圧延直角方向（以下 TD 方向）における構成式パラメータに関する解析結果を、それぞれ図 5、6 に示す。RD 方向について、応力増分方向 α' の変化とともに塑性ひずみ増分方向 β' 、ならびに、その大きさを表現する μ' も変化しており、初期異方性材に対する構成式パラメータの応力増分方向依存性が示されていることがわかる。応力増分方向と塑性ひずみ増分方向が一致する順方向は、比例負荷方向から反時計方向に約 20° 移動している。等方材モデルについて解析した場合は、順方向は比例負荷方向と一致していたので、異方性の影響により移動したといえる。順方向で、塑性ひずみ増分の大きさを表現する μ' は最大であり、その方向が最も塑性変形が進行しやすい方向であると考えられる。また、応力増分方向が比例負荷方向から離れるに従い、その大きさの変化

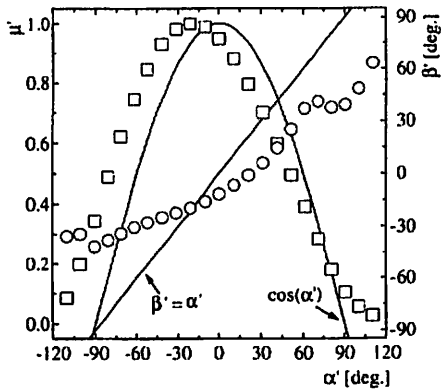


Fig. 5 Variations of constitutive parameters for R.D. obtained using F.E.P.M.

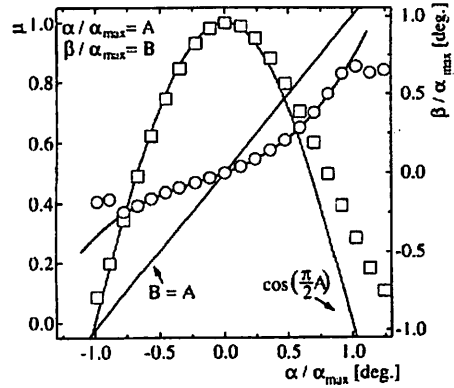


Fig. 7 Variations of constitutive parameters shifted from initial loading direction to natural direction for R.D.

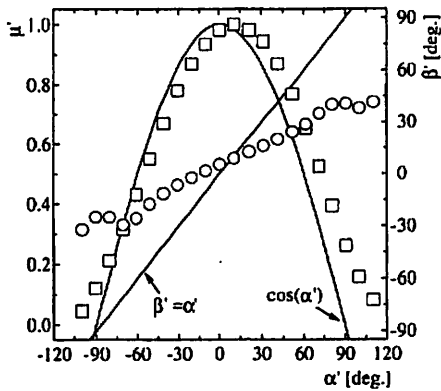


Fig. 6 Variations of constitutive parameters for T.D. obtained using F.E.P.M.

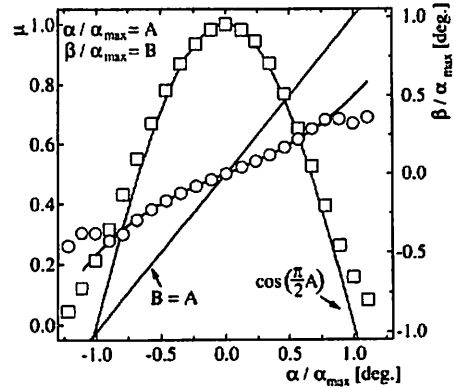


Fig. 8 Variations of constitutive parameters shifted from initial loading direction to natural direction for T.D.

は緩やかに小さくなる傾向を示している。この領域においては中立負荷方向を越えて応力増分方向は弾性除荷域を向いており、それゆえ塑性ひずみ増分の大きさは小さいと考えられる。TD方向についても、RD方向と同様、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性が確認でき、順方向は比例負荷方向から時計方向に約 10° 移動している。構成式パラメータ α 、 β および μ は、順方向からの振れ角であったので、順方向が $\alpha = \beta = 0$ となるように解析結果を移動し、 $\alpha_{max} = 90^\circ$ にて無次元化を行った結果を図7、8に示す。 β の変化が飽和する直前、すなわち、 $-0.7 < (\alpha/\alpha_{max}) < 0.7$ までを考慮すると、 β は、 $(\alpha/\alpha_{max}) = A$ 、 $(\beta/\alpha_{max}) = B$ において、三次曲線で近似できる。

$$B = 0.296A + 0.160A^2 + 0.269A^3 \quad \text{for RD} \quad (9)$$

$$B = 0.337A - 0.00763A^2 + 0.164A^3 \quad \text{for TD} \quad (10)$$

μ については、RDおよびTD方向とも、同一の関数形として、

$$\mu = \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right) \quad (11)$$

となる。それぞれ、図7、8において実線で示す。

5.2 順方向ポテンシャルの導入 関連流れ則においては、現応力テンソルと塑性ひずみ増分テンソルを結び付ける関係として、降伏関数を塑性ポテンシャルとして用いる。すなわち、降伏曲線に対してその法線方向が塑性ひずみ増分方向を示す。ここで、同様の考えから、任意の応力状態に対して順方向を規定する関数形を順方向ポテンシャルと定義し、具体的な関数形としては、最も簡単なHillによる応力の二次形式を用いるものとして、次式で表現する。

$$n_N = \lambda \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (12)$$

$$g(\sigma) = F_N \sigma_{22}^2 + G_N \sigma_{11}^2 + H_N (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N_N \sigma_{12}^2 \quad (13)$$

n_N の方向 ζ は、順方向の塑性ひずみ増分方向と一致するので、それらは、順方向ポテンシャルを用いて次式で関係付けられる。

$$\tan \zeta = \frac{n_{22}}{n_{11}} = \frac{d\epsilon_{22}^p}{d\epsilon_{11}^p} = \frac{F_N \sigma_{22} - H_N (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{G_N \sigma_{11} + H_N (\sigma_{11} - \sigma_{22})} \quad (14)$$

よって、本研究では、前節の解析により順方向は既知であるので、RD方向の結果より G_N が、TD方向の結果より F_N が求められる。 $H_N = 1.00$ として、その値を表2に示す。 N_N に関しては、ここでは、考慮しないものとする。

Table 2 Coefficients of natural direction potential

F_N	G_N	H_N
1.80	4.25	1.00

一方、桑原ら⁽⁹⁾は、十字型試験片を用いて、実験的に測定された等塑性仕事面と種々の降伏関数を用いて塑性ポテンシャルについて比較検討を行っており、少なくとも実験に供した材料については、両者が一致することを報告している。そこで、関連流れ則の妥当性および順方向ポテンシャルへの先の二次形式の適用性について検討を行った。関連流れ則に関しては、Hillの二次降伏関数⁽¹⁰⁾および後藤による四次降伏関数⁽¹¹⁾を用いた。平面応力で、かつせん断応力の作用しない状態を考える。Hillの二次降伏関数 $f(\sigma)$ は次式のように表せる。

$$f(\sigma) = F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \quad (15)$$

圧延方向より 0° , 90° 方向に対する Lankford の r 値を r_0 , r_{90} で表すと、 r 値と各係数間には、次式の関係が成り立つ。

$$r_0 = \frac{H}{G}, \quad r_{90} = \frac{H}{F} \quad (16)$$

本報では、桑原らに倣い、5通りの材料定数の組み合わせ、① $\sigma_0, \sigma_{90}, \sigma_{b1}$ 、② $\sigma_0, \sigma_{90}, r_0$ 、③ $\sigma_0, \sigma_{90}, r_{90}$ 、④ σ_0, r_0, r_{90} および⑤ σ_{90}, r_0, r_{90} を用いて、式(15)、(16)より係数 F , G および H を決定した。

後藤の四次降伏関数については、次式で表せる。

$$f(\sigma) = A_1 \sigma_{11}^4 + A_2 \sigma_{11}^2 \sigma_{22} + A_3 \sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2 + A_4 \sigma_{11} \sigma_{22}^3 + A_5 \sigma_{22}^4 \quad (17)$$

$A_1 = 1$ の時、 $f(\sigma) = \sigma_0^4$ となり、 $A_2 \sim A_5$ は次式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{4r_0}{1+r_0}, \quad A_4 = -\frac{4A_5 r_{90}}{1+r_{90}}, \quad A_5 = \left(\frac{\sigma_{b1}}{\sigma_{90}}\right)^4, \\ A_3 &= \frac{1}{\sigma_{b1}/\sigma_0} - (A_1 + A_2 + A_4 + A_5) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

係数決定に用いられる材料定数は、式(4)~(7)で示される全 Gauss 積分点における各値の平均値を用いる。材料定数を表3に示す。

Table 3 Mechanical properties

σ_0 [MPa]	σ_{90} [MPa]	σ_{b1} [MPa]	r_0	r_{90}
578	530	507	0.414	0.770

順方向ポテンシャル $g(\sigma)$ と両降伏関数ならびに、各負荷方向における降伏応力値を図9に示す。順方向ポテンシャルについては、当然ながら、係数決定に降伏応力に関する情報をなんら用いていないため、それらと一致が悪いことがわかる。桑原らも指摘しているように、両降伏関数の係数決定に用いた降伏応力については計算結果と一致するが、それ以外においては、必ずしも一致しないことがわかる。特に、二次降伏関数に関して、係数決定に降伏応力をつしか用いていない④および⑤においては、種々の負荷方向の現降伏応力状態を表現する降伏曲線の役割を果たしているとは言難く、降伏応力のみを用いて係数決定を行う①が最も一致が良いといえる。四次降伏関数については、係数決定に用いた降伏応力値で、当然、計算結果との一致が良く、また、それ以外の降伏応力値についてもよい一致をみることがわかる。

次に、順方向ポテンシャル $g(\sigma)$ および両降伏関数の法線方向と、解析結果から得られた負荷方向における塑性ひずみ増分方向 (○) ならびに順方向 (□) を、初期負荷方向を φ 、塑性ひずみ増分方向を θ として図10に示す。二次降伏関数を塑性ポテンシャルとした場合、係数決定にRD方向ならびにTD方向の変形情報である r_0 および r_{90} を用いている④および⑤において、塑性ひずみ増分方向と法線方向は一致するが、それ以外においては一致の程度が悪い。特に、等二軸負荷における変形情報は一切用いられていないため、いずれの係数決定方法の法線方向も、そこでは一致しないことがわかる。四次降伏関数を塑性ポテンシャルとして用いた場合、法線方向と各負荷方向における塑性ひずみ増分方向の一致が良いことがわかる。順方向ポテンシャルに関しては、係数決定に用いた順方向と法線方向は、当然のことながら一致しており、情報の欠

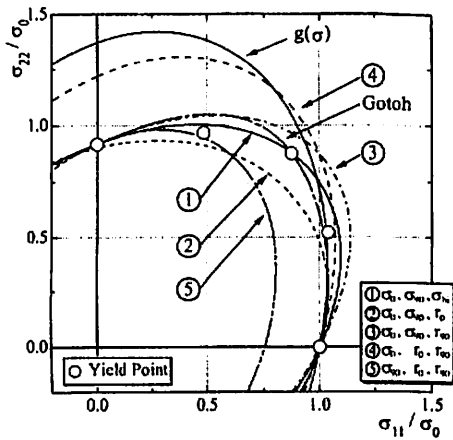


Fig. 9 Comparison of yield calculated points obtained with natural direction potential, Hill's quadratic and Gotoh's biquadratic yield loci

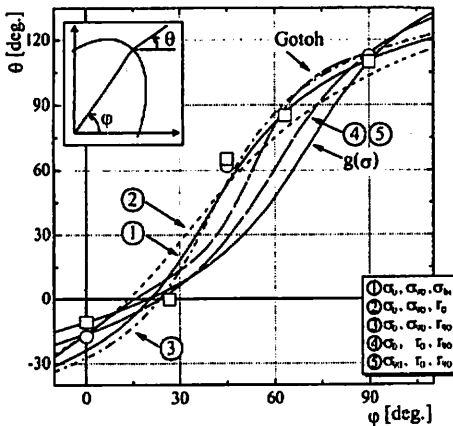


Fig. 10 Comparison of inclination angles of incremental plastic strain vectors with natural direction(□), proportional loading direction(○) and those predicted by a normality flow-rule

落しているそれ以外の荷重方向については、やはり一致が悪い。しかし、二次降伏関数を塑性ポテンシャルとする④および⑤(いずれも r_0 および r_{90} を用いている)と類似した軌跡を示すことがわかる。このことから、等二軸荷重方向では、特に一致が悪いもの、順方向ポテンシャルを応力の二次形式とする場合には、従来の r 値により係数を決定する手法で近似することができ、先ほどは考慮しなかった N_N についても決定することができる。もしくは、実験量が増えるが、四次形式を用いることも考えられる。以上より、少なくとも、本解析結果においては、降伏応力のみで係数を

決定した降伏関数は、関連流れ則における塑性ポテンシャルの役割を担うことは出来ず、あくまで降伏判定にのみ用いることとし、塑性ひずみ増分方向は、順方向を規定する新たなポテンシャルからの振れ角として決定する必要があると考えられる。式(1)で表現される呉屋・伊藤により提案される応力増分方向依存塑性構成式は、順方向と降伏関数を切り離して評価することが可能であり、板材解析等の塑性不安定問題において精度向上が十分期待できる。

6. 結 言

有限要素多結晶モデルを用いて、初期異方性材に対する応力増分方向依存塑性構成式における二つの遷移関数 $\mu(\alpha)$ および $\beta(\alpha)$ の影響を調べた。また、順方向を規定する関数形を順方向ポテンシャルと定義し、関連流れ則と比較することで以下の知見を得た。

(1) 応力増分方向の変化とともに、塑性ひずみ増分方向ならびにその大きさが変化することから、それらの応力増分方向依存性が確認された。

(2) 初期異方性の影響により、順方向は、比例荷重方向とは異なる方向であり、その移動量は、初期荷重方向によって異なる。

(3) 順方向からの構成式パラメータの具体的関数形は、 $\beta(\alpha)$ は三次曲線を、 $\mu(\alpha)$ は、単純な余弦関数を用いて近似できる。

(4) 降伏応力から決定された降伏関数は、塑性ポテンシャルの役割を担うことが出来ず、降伏判定にのみ用いることとし、塑性ひずみ増分方向は、順方向ポテンシャルを導入することで、そこからの振れ角として決定する必要がある。

参 考 文 献

- (1) Christoffersen, J., Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 27(1979), 465.
- (2) 後藤 學, 機論 A, 47-424(1981), 1389.
- (3) 後藤 學, 機論 A, 48-428(1982), 498.
- (4) 呉屋守章, 伊藤 一, 機論 A, 54-504(1988), 1617.
- (5) 呉屋守章, 伊藤 一, 宮城清宏, 末吉敏彦, 糸村昌祐, 機論 A, 61-588(1995), 1783.
- (6) 伊藤 一, 竹山壽夫, 塑性と加工, 23-256(1982), 410
- (7) Gotoh, M., Int. J. Numer. Methods Eng., 12(1978), 101.
- (8) Goya, M., Ito, K., JSME Int. J., Ser. I, 40-2(1997), 169.
- (9) 桑原利彦, 薄 一平, 池田 聡, 塑性と加工, 30-444(1998), 56.
- (10) Hill, R., Proc. R. Soc., Ser. A, 193(1948), 281.
- (11) 後藤 學, 塑性と加工, 19-208, 1978, 377.