

## 有限要素単位セルモデルによる多孔質材降伏条件に関する研究\*

佐々木 知之<sup>\*1</sup>, 具屋 守章<sup>\*2</sup>, 宮城 清宏<sup>\*2</sup>  
糸村 昌祐<sup>\*2</sup>, 末吉 敏恭<sup>\*2</sup>

## Validity of Finite Element Unit Cell Model for Studying Yield Condition of Isotropic Porous Materials

Tomoyuki SASAKI, Moriaki GOYA, Kiyohiro MIYAGI,  
Shousuke ITOMURA and Toshiyasu SUEYOSHI

Assuming a spherical void in an infinite rigid plastic material, Gurson proposed a yield function for isotropic porous solids. It is, however, well known that the Gurson model gives harder response than those predicted by experimentation on actual porous solids. In numerical studies to check the validity of Gurson's model, most of the past researchers have introduced a cubic unit cell model, in which a spherical void is placed at the center of the cube. The cubic model can be a good approximation of a porous solid, if the void volume fraction is very small. The cubic model, however, may be not appropriate for the study of porous solids with high ratio of void volume fraction since the model automatically introduces an orthotropy effect due to the geometrically repetitive distribution of voids in three orthogonal axis directions. This research will propose a new unit cell model which is appropriate for the study of the yield functions for isotropic porous materials. The model is also favorable for the study of the anisotropic effect due to the void shape because the unit cell includes less of the anisotropy based on the distribution than the cubic model does.

**Key Words:** Porous Material, Plasticity, Yield Function, FEM Analysis, Unit Cell Model, Numerical Analysis

## 1. 結 言

ホットプレス焼結法(HIP)や熱間等方圧焼結法(HIP)等によりこれまで金属多孔質材が製造されてきたが,近年放電プラズマ法(SPS)<sup>(1)</sup>が開発され益々空孔率の大きい多孔質材が作られるようになった。これら多孔質材はフィルター, 含油機械部品, 熱交換装置用部品として多く使用されており, その強度に関わる基本的性質を知ることが多孔質機械部品を設計する上で不可欠のものである。さらに塑性加工後の多孔質機械部品における空孔率の分布の推定等を検討する際に有限要素法などの数値計算によることが多いが, そこで必要となる材料の構成式を導入する場合も降伏条件が基本となる。本研究は, そのような状況を踏まえて行われる多孔質材降伏条件に関する基礎的研究である。

塑性固体材料の変形挙動に関する従来の研究において, 延性多孔質材の力学的挙動に関連し降伏関数がいくつか提案されている。それらは静水圧応力, 偏差応力および空孔率の関数として表現されており, その代表的なもの

として, 1975年に提案されたGursonの降伏関数があるが, それは, 等方圧縮性材料に対する関係式を導くために無限媒体中に1個の球形, または円筒状空孔が存在する場合の解析に基づいたものである<sup>(2)</sup>。このGursonの降伏関数に対して実験結果もしくは数値計算に比べて降伏応力が大きめに評価されているとして, その妥当性の検証と降伏関数の修正を提案するために単位セルの有限要素法解析が多くの研究者により行われてきた。例えば, Tvergaardは塑性分岐不安定問題に対し軸対称単位セルモデルに関する数値計算と多孔質材の連続体モデルの数値計算とを比較することにより, Gursonの降伏関数に係数を導入して修正することを提案している<sup>(3)</sup>。また, Homらは立方体単位セルモデルを用いて数値計算を行ない, Gursonの降伏関数よりTvergaardの修正降伏関数に近い計算結果を得ている<sup>(4)</sup>。NagakiはGursonの降伏関数に村上らの損傷テンソルを導入し, 異方性を加味し2軸引張り変形と静水圧下での引張り変形における降伏曲面の形状について考察した<sup>(5)</sup>。さらに, Goyaらは空孔がより等方的であるとする正四面体単位セルを導入して, 比較的簡単な幾何学および力学的考察に基づいて降伏関数を

\* 原稿受付 1994年12月26日。

<sup>\*1</sup> 准員, 前川製作所(〒302-01 茨城県北相馬郡守谷町立沢2123)。<sup>\*2</sup> 正員, 琉球大学工学部(〒903-01 沖縄県中頭郡西原町千原1)。

提案している<sup>(6)</sup>。

しかし、これまでの研究報告において多孔質材の有限要素法数値解析に用いられた単位セルモデルとしては、軸対称モデルや立方体モデルが採用されており、これらは基本的に空孔の規則的配列に基づく異方性を含むもので、空孔率が大きくなるとその影響があるものと推定される。例えば、初期形状は球状であったとしても母材の変形に伴って空孔形状も変化し、空孔形状に起因する異方性が出現するものと考えられるが、そうした状況における多孔質材の降伏条件に関する研究を進める上で、空孔の配列による異方性を取り除いた単位セルを導入する必要がある。そこで本研究は、これまでよく用いられてきた軸対称モデルや立方体モデルに比べて空孔の配列に起因する異方性の小さいと思われる新しい単位セルモデルを導入し、各モデルに対し数値的に得られる相当応力と静水圧応力の推移よりその妥当性を調べるものである。

2. Gursonおよびその他の降伏関数

多孔質材に対する降伏関数としていくつか報告されてきているが、その代表的なもの1つとしてGursonによるものがあるが、これはランダムに分布する空孔を含む材料を1ヶの球状空孔をその中心にもつ球状単位セルを導入し、軸対称変形に対する剛塑性解析より求められている。Gurson型降伏関数の一般形は式(1)で表される。

$$F(\Sigma, Y, f) = \left(\frac{\bar{\Sigma}}{Y}\right)^2 + 2q_1 f^n \cosh(n\Sigma_n / 2Y) - 1 - q_3 f^{2n} \dots (1)$$

ここで、 $\Sigma$ は多孔質体の巨視的応力、 $Y$ は母材の降伏応力、 $n$ は空孔率、 $\bar{\Sigma}$ は多孔質体の巨視的応力より得られた相当応力を示し、次式で定義される。

$$\bar{\Sigma}^2 = \frac{3}{2} \Sigma_d \Sigma_0 \dots (2)$$

ここで、 $\Sigma_d$ は偏差成分を表す。

式(1)で $q_1 = q_3 = n = 1$ とおくと元々のGursonの降伏関数になるが、Tvergaardは $n = 1$ 、 $q_1 = 1.5$ 、 $q_3 = q_1^2$ と修正することを提案した。

また、GoyaらはGursonの降伏関数に対し幾何学および力学的考察を加え、図1-1に示す空孔分布をもつ正四面体を幾何学的諸量評価するための単位セルとして導入し、式(3)に示す降伏関数を提案している。

$$F(\Sigma, Y, f) = \frac{\left(\frac{\bar{\Sigma}}{Y}\right)^2}{(1 - 0.84f^{2/3})^2} + 1.28f \exp \frac{|\Sigma_{II}|}{2Y} - 1 \dots (3)$$

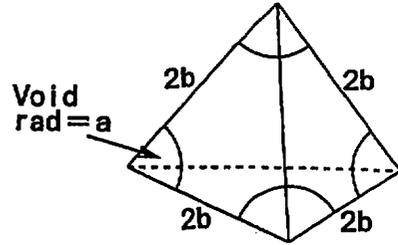


図1-1 正四面体単位セル

しかしながら、材料の切断面の平均空孔面積率と材料の体積空孔率が等しいというステレオロジー理論における1つの結論<sup>(8)</sup>を前提とすると、式(3)の右辺第1項の分母の損傷変数は空孔率のものになり式(4)を得る。

$$F(\Sigma, Y, f) = \frac{\left(\frac{\bar{\Sigma}}{Y}\right)^2}{(1 - \alpha_3 f)^2} + \alpha_1 f \exp \frac{|\Sigma_{II}|}{2Y} - 1 \dots (4)$$

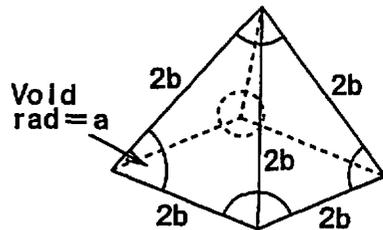


図1-2 正四角すい単位セル

式(4)中の補正係数は次のように求められる。まず $\alpha_1$ については、相当応力 $\bar{\Sigma} = 0$ 、すなわち静水圧 $\Sigma_{II}$ のみが作用するとき、空孔の半径 $a$ と隣接空孔間距離 $2b$ なる状況を内半径 $a$ 、外半径 $b$ の厚肉球殻の外表面に $\Sigma_n$ なる圧力が作用する状況と同一とみなすことによって求められる<sup>(6)</sup>。例えば、式(3)のように正四面体のみを考慮した場合 $\alpha_1 = 1.28$ であるのに対し、正四面体のみでは空間は埋め尽くすことはできないため図1-2に示すような正四面体と等しい長さの辺からなる正四角すいを併用すると、空間を埋めるに必要な正四面体と正四角すいの個数の比が1対1であるので $\alpha_1$ はそれぞれのみの場合の平均となり $\alpha_1 = 1.34$ と決定できる。 $\alpha_3$ については静水圧応力 $\Sigma_{II} = 0$ とし、 $\bar{\Sigma}/Y = (1 - f)$ 、すなわち平均面積減少率と一致するときに降伏すると考えると式(4)は、

$$\frac{(1-f)^2}{(1-\alpha_1 f)^2} + \alpha_1 f - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

となり、したがって $\alpha_3$ は、

$$\alpha_3 = \frac{1 - (1-f)/\sqrt{1-\alpha_1 f}}{f} \quad \dots\dots\dots(6)$$

より求められる。 $\alpha_3$ は空孔率によってそれほど変わらないため、例えば $f=0.078$ のときの値を採用し、 $\alpha_3=0.33$ と決定できる。

図2にGursonの降伏関数、Tvergaardの修正降伏関数、式(3)および本報のステレオロジー論に基づく式(4)の比較を示す。横軸に静水圧応力を、縦軸に相当応力をそれぞれ初期降伏応力で割り無次元化した値を示す。これよりGursonの降伏関数が一番外側に位置し降伏に要する応力が大きめに評価されていることがわかる。また、式(4)の各係数の算出について空孔の分布に図1-1に示す正四面体のみを考慮した場合とこれにさらに正四角すいを加えた場合とでは大きな差はみられなかったが、損傷変数に空孔率そのものを代入した式(4)は式(3)より外側に位置しており、Tvergaardの修正降伏関数に近いことが図2よりわかる。したがって、Tvergaardの修正係数は単位セルに関する分岐解析と連続体多孔質材モデルとしての分岐解析結果の比較検討より得られたものであるが、その改良の意味する幾何学および力学的背景にはステレオロジー理論が存在するものと思われ興味深いものがある。

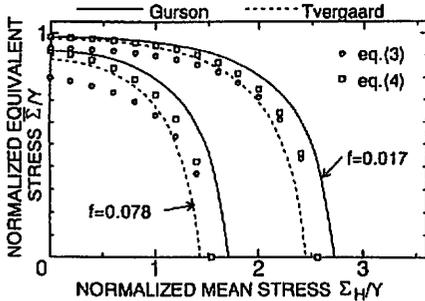


図2 Gursonの降伏関数、Tvergaardの修正降伏関数、式(3)および式(4)の比較

3. 各種単位セルモデルの有限要素法解析

第2章においては等方的多孔質材の降伏関数を検討する上で空孔半径 $a$ と隣接する空孔間の距離 $2b$ との関係を得るために正四面体及びそれを補足する正四角すい単位セルモデルが導入された。一方、多孔質材の降伏条件に対する従来の数値解析的研究において広く用いられて

きた単位セルとしては軸対称モデル及び立方体モデルがある。本章では、第2章における正四面体モデルと正四角すいモデルを組み合わすと、空孔配置が面心立方格子型となることに着目し、これに対応する面心立方格子型単位セルについて検討を行なう。

3.1 単位セルモデルおよび材料特性

母材の変形に伴って空孔形状も変化し、空孔形状に伴う異方性が生じることが推定されるので、空孔形状に基づく異方性を調べるための単位セルモデルは、少なくとも空孔の分布に起因する異方性を含まないものでなければならぬ。そこで、本研究において従来の軸対称モデル(図3-1)や立方体モデル(図3-2)より空孔の分布に起因する異方性の小さいモデルとして面心立方格子モデル(図3-3：以下、準等方分布モデルと呼ぶ)を取り入れ従来のモデルとの比較を試みる。立方体モデルは単位セルに存在する空孔が1個であるのに対し準等方分布モデルは4個あり空孔分布の偏りが小さいことと最短距離で隣接する空孔が立方体モデルは6個であるのに対し準等方分布モデルは12個あり、立方体モデルよりも等方的挙動を示すと推察される。

要素分割は立方体モデルと準等方分布モデルについては $3 \times 3 \times 3$ の合計27個の20節点アイソパラメトリック要素から空孔部分に相当する要素を取り除き、むき出しになった節点を要素の一辺と等しい半径の球面上に移動させる。したがって立方体モデルは26要素、204節点となり準等方分布モデルは23要素、192節点となる。軸対称モデルは8節点アイソパラメトリック要素を使用し、要素数と節点数は空孔率によって多少異なるが、例えば、空孔率 $f=0.078$ の場合は79要素、268節点となる(図3-1)。

境界条件はすべての面を各垂直軸方向にのみ拘束し、図3-1, 2, 3に示す様に矢印が1ヶの $\epsilon_z$ については常に正の値をとる変位増分を与え、これに対し直交する $x$ (又は $r$ )及び $y$ 方向に対しては、矢印が2ヶの方向、すなわち、圧縮又は引張りの変位増分を与えることとする。

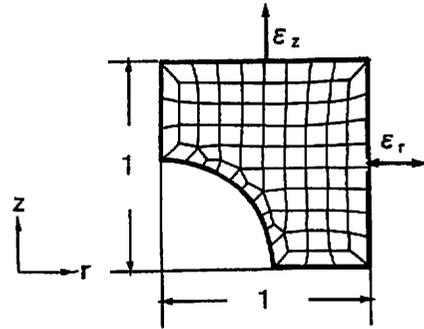


図3-1 軸対称モデル

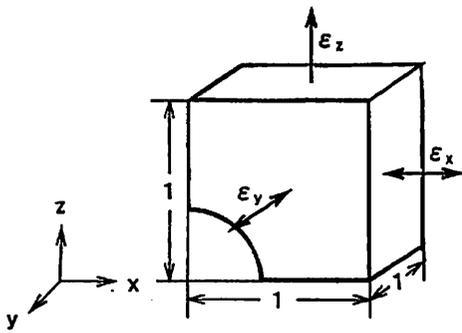


図3-2 立方体モデル

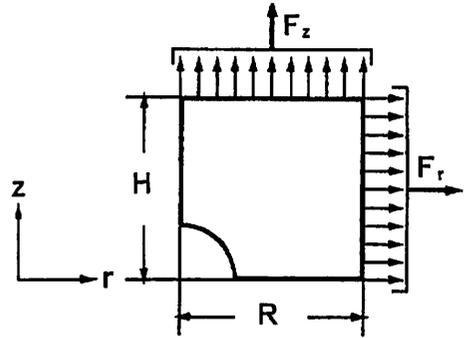


図4 軸対称モデルの変形パラメータ

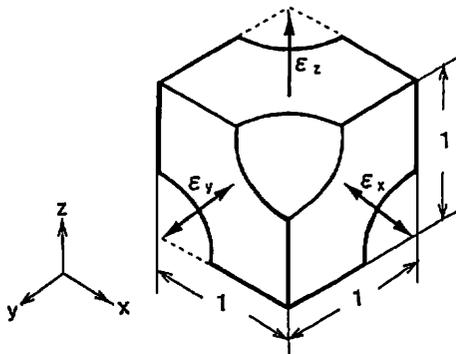


図3-3 準等方分布モデル

材料特性は軟鋼を想定し縦弾性係数を206GPa, ポアソン比を0.3, 初期降伏応力を392MPa, そして, 応力経路を急変させ降伏点を明確にするために非硬化材とした。

3.2 巨視的応力の算出方法

計算はワークステーションHP-Model715/50上で, 有限要素法汎用プログラムMarc.V5.2を用いて行った。各単位セルモデルにおける静水圧応力および相当応力の算出手順を以下に示す。

軸対称モデルの場合には上端面における単位角当たりの軸方向節点力の総和  $F_z$  及び円周面における周方向単位長さ当たりの半径方向節点力の総和  $F_r$  を用いて, 引張り軸方向の応力  $\Sigma_x$  およびその垂直方向の応力  $\Sigma_z$  はそれぞれ式(7)で表される (図4)。

$$\Sigma_x = \frac{2 F_z}{R^2}, \quad \Sigma_z = \frac{F_r}{H} \quad \dots (7)$$

したがって, 相当応力および静水圧応力は軸対称性を考慮してそれぞれ式(8)で表される<sup>(7)</sup>。

$$\bar{\Sigma} = |\Sigma_z - \Sigma_x|, \quad \Sigma_H = \frac{(\Sigma_z + 2\Sigma_x)}{3} \quad \dots (8)$$

一方, 立方体モデルおよび準等方分布モデルに対する静水圧応力および相当応力は次の様に求めた。

まず, 静水圧応力は式(9)で表される。

$$\Sigma_H = \frac{1}{3}(\Sigma_x + \Sigma_y + \Sigma_z) \quad \dots (9)$$

ここでの各  $\Sigma_k$  ( $k = x, y, z$ ; 図5)は変位増分を与えた側の, 各  $k$  軸に垂直な面に作用する垂直節点力を合計して変形前の面積で割ったものであり, 巨視的公称応力である。しかし, 最大ひずみが0.5%程度なので母材形状は変形前とほとんど変わらないため真応力としても差し支えない。

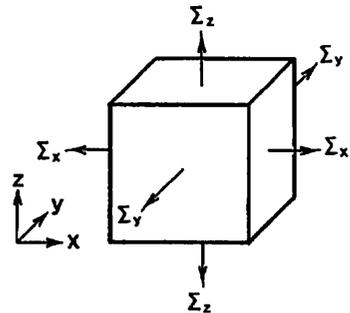


図5 巨視的応力成分とその方向

相当応力  $\bar{\Sigma}$  は, 次式で表される偏差応力を式(2)に代入して得られる。

$$\Sigma_k' = \Sigma_k - \Sigma_H \quad k = x, y, z \quad \dots (10)$$

これらの計算式を用いて各ステップごとの静水圧応力と相当応力を求め, その比の推移を調べる。

3.3 ひずみ比条件

単位セルの縦方向伸びひずみ  $\epsilon_z$  は変形中に空孔率が変わらない範囲で計算を行うために最大ひずみを0.5%として、これに対応する最大変位値をステップ数で割り、1ステップごとの変位増分量を決定し上端面上の節点に与える。変形前後における空孔率の誤差率は0.1%~3%程度である。ひずみ比は、

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} \left( -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} \right) = 0, \pm 0.1, \pm 0.3, \pm 0.5 \dots (11)$$

とした。ここで、立方体モデルと準等分布モデルのX軸方向の横ひずみ  $\epsilon_x$  とY軸方向の横ひずみ  $\epsilon_y$  は等しく与えることにする。なお、以下に示す図6~図12中の数値は式(11)で定義されるひずみ比を意味する。

4. 計算結果および考察

図6~図12に図2と同様に横軸に無次元静水圧応力、縦軸に無次元相当応力を取り、空間内での応力比経路の推移を示す。多孔質材の単位セル数値解析において降伏点の定量的定義は特別な応力比の場合を除いてその力学的

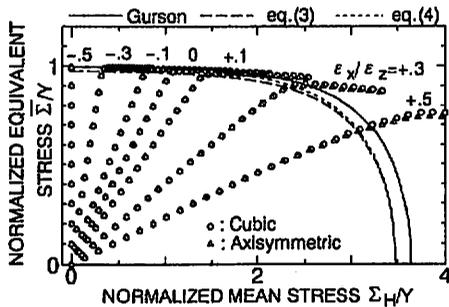


図6 立方体モデルと軸対称モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 (f=0.0042)

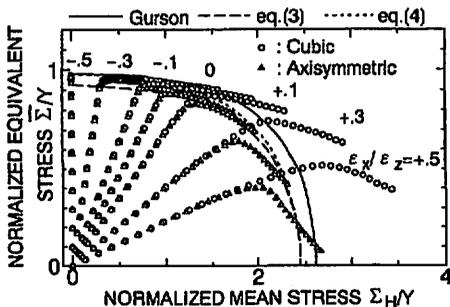


図7 立方体モデルと軸対称モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 (f=0.02)

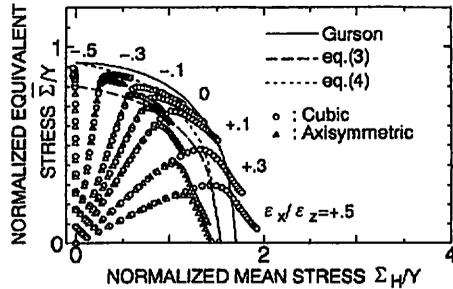


図8 立方体モデルと軸対称モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 (f=0.078)

または物理的妥当性は必ずしも明らかでない。そこで母材部の弾性域と塑性域とで応力ひずみ関係が大きく異なる点に着目し、ひずみ増分比一定の条件下で負荷を与えた場合、弾塑性遷移領域で巨視的応力比経路が急激に変化することが予想され、その様子をそのまま示す方が定性的ながらも現段階におけるデータの整理法としては妥当と判断される。実際、純粋せん断応力状態に近い負荷方向域においては降伏点と思われる点において応力経路が急激に変化することが図6~図12に示されているので、これより降伏点を見極めることが可能となる。

Worswickによると軸対称モデルは立方体モデルと同じ計算結果を得るとしているが<sup>(7)</sup>、よい近似が成立する空孔率の範囲については必ずしも明確でなくその妥当性を検証するため、図6~図8に立方体モデルと軸対称モデルの比較を示す。空孔率はそれぞれ図6がf=0.0042、図7がf=0.02、図8がf=0.078である。これらより空孔率がf=0.0042とごく小さい場合は、2つのモデルの傾向はよく一致しており同じ応力経路を示しているが、空孔率がf=0.02程度になると特にひずみ比が正の部分では、大きく差があり明らかに異なった応力挙動を示していることがわかる。また、この空孔率において軸対称モデルは式(3)に近くなることわかる。空孔率f=0.078においては軸対称モデルはひずみ比が正の領域において降伏曲面より小さくなることもわかる。

図9~図12に、静水圧応力と相当応力の関係より立方体モデルと準等分布モデルの比較を示す。空孔率はそれぞれ図8がf=0.0042、図9がf=0.02、図10がf=0.078、図11がf=0.15である。また、Gursonの降伏関数、式(3)および式(4)ともあわせて比較する。これらより、いずれのモデルの場合も空孔率が大きくなるにしたがって降伏曲面が小さくなることわかる。また、降伏後は降伏曲面に沿って経路の向きが急激に変わるとは思われたが、特に静水圧成分が大きい領域では、静水圧応力が増加し続けた

ため相当応力もそれほど減少せず、これよりその領域の降伏点を経路の変化より決定することは困難であると思われる。静水圧応力が増加し続ける理由として、降伏後も弾性域が残っておりその部分を継続して降伏させるために巨視的応力が増加し続けると考えられる。この様に静水圧応力が優勢になるに従い、本研究の数値解析上降伏条件と判断される応力経路の急激な変化あるいは停滞が見られなく、Gursonの条件を越えた後も応力経路がそのまま伸び続け明確な降伏点を見極めることができない。この現象は準等方分布モデルだけでなく立方体モデルでも同様に観察されている。これは静水圧が優勢な負荷方向に対して為された過去の数値解析的研究において用いられてきた降伏条件の定義や、定義すること自体の妥当性も含めて大きな問題が存在することを示唆するものである。準等方分布モデルの場合は、単位セル中の空孔4個が互いに斜に構える形で配置されているので、同一空孔率の立方体モデルに比して空孔半径 $a$ と隣接空孔間距離 $2b$ の比 $a/b$ が大きいために、弾性部分が立方体モデルよりも多く残る結果となり静水圧応力が増加し続けたと考えられる。

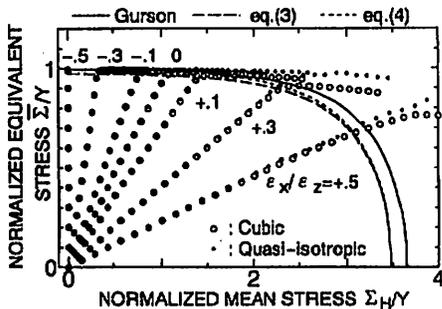


図9 立方体モデルと準等方分布モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 ( $f=0.0042$ )

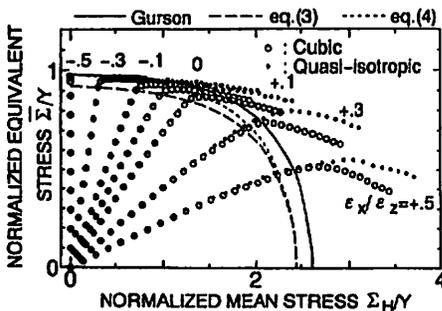


図10 立方体モデルと準等方分布モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 ( $f=0.02$ )

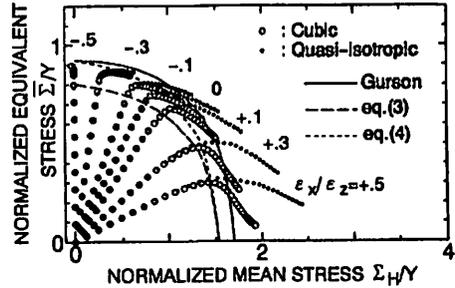


図11 立方体モデルと準等方分布モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 ( $f=0.078$ )

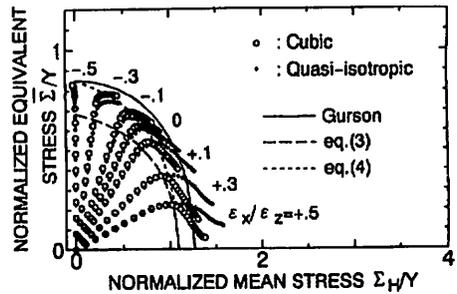


図12 立方体モデルと準等方分布モデルの応力経路の比較とひずみ比の影響 ( $f=0.15$ )

次に各モデルの相互比較をしてみると、降伏後の経路が準等方分布モデルの方が曲線は外側に位置していることより、準等方分布モデルの方が立方体モデルよりも降伏が遅いといえる。しかし、空孔率 $f=0.15$ の場合でひずみ比が負の領域においては、立方体モデルの方が曲線がより上昇しており立方体モデルの方が降伏が遅いことがわかる。これは、塑性域の成長と空孔の配置と大きさによるものと考えられる。また、準等方分布モデルの空孔率が $f=0.15$ のときと立方体モデルの空孔率 $f=0.15$ および $f=0.078$ のときの経路が変化する領域は式(4)に近くなるのがわかるが、その他の空孔率の場合は降伏曲面より大きく広がっておりどのモデルにも近くはならないことがわかる。

## 5. 結 言

Gursonの降伏関数、Tvergaardの修正降伏関数、式(3)の損傷変数を導入した降伏関数および本報のステレオロジー論に基づく降伏関数(4)を比較したところGursonの降

伏関数が最も降伏曲面が大きく、やはりGursonの降伏関数は数値計算や実験値と比較して降伏条件が大きめに評価されているといえる。また、Tvergaardの修正降伏関数は本報で提案された式(4)に近いことがわかり、その背景にはステレオロジー理論の存在が窺える。

軸対称モデルと立方体モデルを比較したところ、空孔率がごく小さい場合には同じ計算結果を与えるといえるが、空孔率が $f=0.02$ 程度になると図7に示されているように差が生ずることが明らかとなった。

立方体モデルと準等方分布モデルを比較したところ空孔率がごく小さいときには、応力挙動はよく一致しているといえるが、空孔率が大きくなるにしたがって次第に差が顕著となり、特にひずみ比が正の領域で準等方分布モデルの応力経路が右下がりになる傾向が緩やかとなり、引き続き静水圧応力成分が増大していることがわかる。この現象は厚肉球殻に外圧を作用させる問題において球殻内部より発生した塑性域が外表面に到達した全城降伏の時点から、それまで上昇してきた外圧が下降し始めることと関連させて考察するとき、全城降伏になっておらず、すなわち、一部弾性域にあることが示唆される。空孔率が $f=0.15$ の場合、ひずみ比が負となる負荷に対し、僅かながら立方体モデルの方が遅れて降伏しているが準等方分布モデルとの差は必ずしも大きくないようである。ただし、空孔形状異方性をもたらす楕円体空孔に対しても同様であるかは明らかでなく、今後の研究を待たねばならない。

最後に、本研究の一部は造船学術研究推進機構研究費(平成5年度)によって行なった。記して深甚なる感謝の意を表す。

## 文 献

- (1) 鍋田正雄, 粉体工学会, Vol. 30, No. 11, (1993), p. 26
- (2) Gurson, A. L., *J. Eng'g Mats. and Technology*, Vol. 99 (1977), p.2.
- (3) Tvergaard, V., *Int. J. fracture*, Vol. 17 (1981), p.389.
- (4) Hom, C. L. and McMeeking, R. M., *J. Appl. Mechs.*, Vol. 56 (1989), p.309.
- (5) Nagaki, S., Sowerby, R. and Goya, M., *Mater. Sci. and Eng'g.*, Vol. a142 (1991), p.162.
- (6) Goya, M., Nagaki, S. and Sowerby, R., *JSME International Journal, Series I*, Vol. 35, No.3, 1992.
- (7) M. J. Worswick and R. J. Pick, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.38(1990), No.5,p.601.
- (8) 藤助紀夫, 岩波書店, 定量形態学, (1977)