

応力増分方向依存塑性構成式の有限要素法解析への適用*

(第1報, 平面ひずみ局所くびれ)

呉屋守章*¹, 伊藤耿一*², 宮城清宏*¹
末吉敏恭*¹, 糸村昌祐*¹Application of Constitutive Law Incorporating Stress Increment
Directional Dependence to F. E. M. Analysis
(1st Report, Plane Strain Shear Band Formation)Moriaki GOYA, Koichi ITO, Kiyohiro MIYAGI,
Toshiyasu SUEYOSHI and Shosuke ITOMURA

A constitutive law of plastic deformation has been proposed by Goya and Ito⁽¹⁾, and can incorporate the stress increment directional dependence of plastic strain increment ϵ^p . The law is developed through the introduction of two transition parameters $\mu(\alpha)$ and $\beta(\alpha)$, which denote the magnitude and the direction angle of the plastic strain increment, respectively, and are defined to be functions of the direction angle of the stress increment. In this report, the law is implemented in an F. E. M. code for deformation analysis. A plane strain tension problem is analyzed for investigation of the effect of these parameters on the occurrence of the shear band. The results show that the clear shear does not appear when the calculation is performed using $\beta_{max} = \pi/6$, which corresponds to the degree of the directional dependence for the corners of the Tresca yield locus.

Key Words: F. E. M. Analysis, Shear Band, Constitutive Law, Plasticity, Plane Strain

1. 緒言

一般的塑性変形解析に対しそれまでは合理的な塑性構成式として認められてきた J_2F (J_2 流れ)則が応力経路が急変する局所くびれや塑性屈曲等の塑性不安定問題には妥当な結果を与えないことが明らかとなり, それに代わり除荷・負荷の判定が不明確であるとして通常の塑性解析に対し敬遠されてきた J_2D (J_2 変形論または Hencky 変形論)の増分形がより現実的な結果を与えるという状況の中で幾つかの応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式が提案されてきた。例えば現応力点において降伏曲面上に角点の存在を前提とした Christoffersen-Hutchinson による J_2C (J_2 コーナー)則⁽¹⁾, 後藤による角点則⁽²⁾や滑らかな降伏曲面を前提とした非法線則となる J_2N 則⁽³⁾, そして増分の塑性構成式において本質的な 2 つの遷移関数, すなわち塑性ひずみ増分の大きさに関わる $\mu(\alpha)$ 及び塑性ひずみ増分の方向に関わる $\beta(\alpha)$ (ここで, α : 偏差応力空間における応力増分の現応力方向からの振れ角)を導入して得られた著者らによる塑性則がある⁽⁴⁾。それによると応力増分依存性を導入するためには必ずしも角点の存在は必要でなく遷移関数 $\beta(\alpha)$ の導入が本質的であることが明白である。

ところで, Christoffersen-Hutchinson の J_2C 則や後藤の J_2G-I , J_2G-II 角点則及び J_2N 非法線則を有限要素法解析に用い局所くびれ変形や変形局所化等の問題が既に解析

されているが⁽⁵⁻⁷⁾, 著者らの構成式を用いた有限要素法解析は未だになされていない。そこで, 本研究は塑性構成関係を記述するうえでより基本的な遷移関数を導入した著者らの提案する新塑性構成式を有限要素法プログラムに導入し, 幾つかの代表的な問題の解析を通して, 採用された遷移関数の特徴が数値解析結果に如何なる影響を与えるかを明確にすると共に, 角点則や非法線則を有限要素法解析に導入する上で直面する問題点を明らかにすることを目的とするものである。この様に著者らの提案する塑性構成式の数値解析への適用性を示し, 塑性構成式の本質的な 2 つの遷移関数及び方向依存性の大きさの程度等が解析の過程と結果に与える影響を調べることは, 今後, 応力増分方向依存塑性構成式を板成形シミュレーション等の具体的変形解析に応用し成形限界点の特定に向けた基礎的研究として不可欠である。以下, () や () はそれぞれ増分及び偏差成分を示すものとする。

2. 応力増分方向依存性を考慮した呉屋・伊藤の塑性構成式の概略⁽⁴⁾

先に提案した塑性構成式の表現は以下の通りである。現応力の偏差応力成分 σ' に方向が一致し単位の大きさを持つテンソルを n と表し, α_{max} を塑性負荷を生ずる偏差応力増分の最大振れ角とする。このとき, 与えられたひずみ増分 ϵ に対して, $(n : \epsilon) / (\sqrt{3/2} \epsilon) > \cos \alpha_{max}$ のとき塑性負荷となり次式が成立するものとする。

* 1994年10月15日 塑性加工連合講演会において講演, 原稿受付 1994年12月26日。

¹ 正員, 琉球大学工学部 (〒903-01 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)。

² 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{2G^*} + \frac{(\sigma' : \dot{\epsilon}) \sigma'}{S^*} \dots \dots \dots (1)$$

$$\dot{\epsilon}^y = \dot{p}/K$$

ここに、

e^* : 体積ひずみ, p : 静水圧応力
 K : 体積弾性率, G : 横弾性係数
 H' : 比例負荷における加工硬化係数
 $G^* = GH'/(H' + 3G\mu \sin\beta/\sin\alpha)$
 $S^* = 2\bar{\sigma}^2 \{H' \cos\alpha/(3G) + \mu \cos\beta\} / \{3\mu \sin(\alpha - \beta)/\sin\alpha\}$
 $\alpha = \cos^{-1} \left(n : \dot{\sigma}' / \left\| n \parallel \dot{\sigma}' \right\| \right)$
 $\beta = \cos^{-1} \left(n : \dot{\epsilon}^p / \left\| n \parallel \dot{\epsilon}^p \right\| \right)$

α, β はそれぞれ応力増分及びひずみ増分の n の方向からの振れ角であり, β は α に依存するとし, さらに塑性ひずみ増分に関する無次元パラメータ $\mu(\alpha)^0$ を導入して $\bar{\sigma}$ と $\dot{\epsilon}^p$ の間に次の関係を仮定している。

$$\bar{\sigma} = H' \bar{\epsilon}^p / \mu(\alpha) \dots \dots \dots (2)$$

ここで, $\mu(\alpha)$ は例えば Mises 型関数を塑性ポテンシャルとする従来の J_2F 則の場合は $\cos\alpha$ に一致する。

角点部以外の滑らかな降伏曲面部の成長に対しては,

$$\bar{\sigma}_{smooth\ locm} = H'(1-R) \bar{\epsilon}^p, \quad 0 \leq R \leq 1$$

と置いてその成長を導入し, それと現応力点とが形成する包絡曲面の角度でもって塑性負荷域が決定される。

ただし, 塑性構成式(1)は応力増分方向依存性を導入するためには必ずしも角点形成が必要でなく, 例えば降伏曲面が滑らかとし, すなわち $\alpha_{max} = \pi/2$ 及び $\beta_{max} > 0$ とすることによっても方向依存性を導入することが可能である。

一方, 塑性分岐解析を行う上で Hill により提唱された線形比較体を構成するために, 前報告⁽⁴⁾において等方材に対し次のような定数係数則を導入した。

$$\dot{\epsilon}^p = (3/2H') \left\{ K_c \dot{\sigma}' + (1-K_c) \sigma' \bar{\sigma} / \bar{\sigma} \right\} \dots \dots (3)$$

ただし, K_c は定数で, $0 \leq K_c \leq 1$ とする。

また, 式(3)の逆表示は次のようになる。

$$\dot{\sigma}' = (2H'/3K_c) \left\{ \dot{\epsilon}^p - 3(1-K_c) (\sigma' : \dot{\epsilon}^p) \sigma' / 2\bar{\sigma}^2 \right\} \dots \dots (4)$$

これは方向依存性を取り込む最も基本的な構成則であり, $K_c = H'/E_s$ (比例負荷の相当応力-相当塑性ひずみ曲線のセカント係数) と置くことにより J_2D の増分形と一致するものであるが, J_2D 増分則と異なり方向依存性を H' や E_s なる材料定数と独立に選択し得る点が大きな特徴である。比例負荷に対しては, 当然の事であるが K_c に任意の値をとる定数係数則が J_2F 則や J_2D 増分則等と一致するものである。 K_c の値を零と1の間で変化させることにより,

方向依存性の程度を変えることが可能であり, 例えば $K_c=0$ とすると方向不依存則すなわち J_2F 則と一致し, $K_c=1$ とすると極度に方向依存性を取り込むこととなる。開発したプログラムの検討及び K_c 値の及ぼす影響を調べるために, それを用いた有限要素法解析も試みることにする。

3. 各塑性構成式における $\mu(\alpha)$ と $\beta(\alpha)$

既存の塑性構成則として J_2F , J_2D 増分則, J_2C 則, そして後藤の $J_2G^{(2)}$, J_2G-I 則, J_2G-II 則と J_2N 非法線則があるが, それらは塑性ひずみ成分に対してそれぞれ次式となる。以下において, $\langle A \rangle$ は Macauley の括弧と呼ばれ $A > 0$ のとき $\langle A \rangle = A$, $A \leq 0$ のとき $\langle A \rangle = 0$ と定義される。

< J_2F 則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \langle \dot{\lambda} \rangle \sigma' \dots \dots \dots (5)$$

ただし, $\dot{\lambda}$ は次のように定義された量である。

$$\dot{\lambda} = \dot{\sigma} / (2h_0 \bar{\sigma})$$

$$h_0 = H' / 3 \quad ; \quad \text{瞬間硬化率}$$

< J_2D 増分則 >

$$\dot{\epsilon}^p = (3/2) \left\{ E_s^{-1} \dot{\sigma}' + (H_s^{-1} - E_s^{-1}) \sigma' \bar{\sigma} / \bar{\sigma} \right\} \dots (6)$$

これは式(3)との比較から定数係数則において $K_c = H'/E_s$ と置くことによっても得られることが分かり, すなわち J_2D 増分則は J_2 -定数係数則に包含される。

< J_2C 則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} f(\theta) \left\{ [1 - k(\theta) \cot \theta] E_s^{-1} \dot{\sigma}' + [1 - k(\theta) \cot \theta] \times (H_s^{-1} - E_s^{-1}) + k(\theta) (H_s^{-1} - E_s^{-1}) / (\sin \theta \cos \theta) \right\} \times \sigma' \bar{\sigma} / \bar{\sigma} \dots \dots (7)$$

ここで,

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \theta_0 \\ \left\{ \cos(0.5\pi\theta/\theta_{max}) \right\}^2 & \theta_0 < \theta < \theta_c \\ 0 & \theta_c < \theta \end{cases}$$

$$k(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \theta_0 \\ \frac{0.5\pi}{\theta_{max}} \tan\left(\frac{0.5\pi\theta}{\theta_{max}}\right) & \theta_0 < \theta < \theta_c \\ 0 & \theta_c < \theta \end{cases}$$

$$\tan \theta_{max} = \sqrt{a} \tan \alpha_{max}, \quad a = H'/E_s \dots \dots (8)$$

< J_2G 則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \langle p(\alpha) \rangle \left\{ H_0^{-1} \dot{\sigma}' + (h_0^{-1} - H_0^{-1}) \sigma' \bar{\sigma} / \bar{\sigma} \right\} / 2 \dots \dots (9)$$

ここで,

$$p(\alpha) = a + b \cos \alpha, \quad \cos \alpha_{max} = -a/b$$

$$a = h_0/H_0, \quad b = 1 - a$$

$$h_0 = H'/3, \quad H_0 = E_s/3$$

< J₂G-I 則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \langle p(\alpha) \rangle / (2H_0) \dot{\sigma}' + \langle \lambda \rangle \sigma' \dots (10)$$

< J₂G-II 則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \langle p(\alpha) \rangle / (2H_0) \dot{\sigma}' + b \langle \lambda \rangle \sigma' \dots (11)$$

< J₂N 非線則 >

$$\dot{\epsilon}^p = \cos(\alpha) \left\{ H_N^{-1} \dot{\sigma}' + (b_N \bar{\sigma} / h_0 \sigma) \sigma' \right\} / 2 \dots (12)$$

ここで、

$$b_N = 1 - (h_0 \cos \alpha / H_N)$$

$$H_N = (E_s / 3) \left\{ (1 + \rho_N \cos \alpha) / (1 + \rho_N) \right\}$$

応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式の基本的パラメータとして導入された $\mu(\alpha)$, $\beta(\alpha)$ を上述の既存則の場合について具体的に記述すると次の様になる。

< J₂F 則 >

$$\mu(\alpha) = \cos \alpha \dots (13)$$

$$\beta(\alpha) = 0$$

< J₂-定数係数則 >

$$\mu(\alpha) = \cos \alpha / \cos \beta$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} \left[\left\{ 1 + K_c^2 \tan^2 \alpha \right\}^{1/2} \right] \dots (14)$$

< J₂C 則 >

$$\mu(\alpha) = f(\theta) \left\{ [1 - k(\theta) \cot \theta]^2 \left\{ (H'/E_s)^2 + (1 - H'/E_s) \right. \right.$$

$$\times (1 + H'/E_s) \cos^2 \alpha + 4k(\theta) \cos^2 \alpha$$

$$\times \left. \left. \left\{ 1 - k(\theta) \cot(2\theta) \right\} / \sin(2\theta) \right\}^2 \right\}^{1/2}$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} \left\{ (\cos \alpha_{\max} \cos \alpha - 1) \right.$$

$$\left. / \left\{ \cos^2 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha_{\max} \right\}^{1/2} \right\} \dots (15)$$

< J₂G 則 >

$$\mu(\alpha) = \left\{ (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \sin \alpha \right\} / \left\{ (\cos \alpha_{\max} - 1) \right.$$

$$\times \left. \left. \left\{ \sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \right\} \right\} \right\}$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} \left\{ (\cos \alpha_{\max} \cos \alpha - 1) / \left\{ \cos^2 \alpha_{\max} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha_{\max} \right\}^{1/2} \right\} \dots (16)$$

< J₂G-I 則 >

これは、(10)式中右辺第2項の寄与が α の範囲により異なるので次のようになる。
 $0 < \alpha < \pi/2$ に対して

$$\mu(\alpha) = \left[\left\{ \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \right\}^2 (\cos \alpha_{\max} - 1)^{-4} \right.$$

$$\left. + \left\{ 2 \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) (\cos \alpha_{\max} - 1)^{-2} + 1 \right\} \right.$$

$$\left. \times \cos^2 \alpha \right]^{1/2}$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} [Z_1 \cos \alpha / \mu(\alpha)] \dots (17)$$

となる。ただし、 Z_1 は次のように定められる。

$$Z_1 = 1 + \left\{ \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \right\} / (\cos \alpha_{\max} - 1)^2$$

一方、 $\pi/2 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ に対して、 $\langle \lambda \rangle = 0$ だから

$$\mu(\alpha) = (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) / (\cos \alpha_{\max} - 1) \dots (18)$$

$$\beta(\alpha) = \alpha$$

となる。

< J₂G-II 則 >

これも、(11)式中右辺第2項の寄与が α の範囲により異なるので次のようになる。

$0 < \alpha < \pi/2$ に対して

$$\mu(\alpha) = \left[\left\{ \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \right\}^2 (\cos \alpha_{\max} - 1)^{-4} \right.$$

$$\left. + \left\{ 2 \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) (\cos \alpha_{\max} - 1)^{-2} + 1 \right\} \right.$$

$$\left. \times \cos^2 \alpha (\cos \alpha_{\max} - 1)^{-2} \right]^{1/2}$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} [Z_2 \cos \alpha / \mu(\alpha)] \dots (19)$$

となり、ただし、 Z_2 は次のように定められる。

$$Z_2 = 1 + \left\{ \cos \alpha_{\max} (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \right\} / (1 - \cos \alpha_{\max})$$

一方、 $\pi/2 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ に対して、 $\langle \lambda \rangle = 0$ だから後藤 J₂G-I と全く同様な式(18)の結果となる。

< J₂N 非線則 >

$$\mu(\alpha) = \cos \alpha / \cos \beta$$

$$\beta(\alpha) = \cos^{-1} \left\{ 1 + (H'/E_s)^2 (1 + \rho_N) \sin^2 \alpha \right.$$

$$\left. / (1 + \rho_N \cos \alpha)^2 \right\}^{-1/2} \dots (20)$$

3.1 既存塑性構成式の特徴に関する考察

J₂C 則において θ_{\max} は応力速度空間における塑性負荷域角とされ、 α_{\max} は応力空間における塑性負荷域角とされているが、一般に $(H'/E_s) < 1$ であるから式(8)を通して塑性負荷域が拡大されることになっている。例えば、n 乗則に従う材料に対し $n=0.0625$ とおくと、 $\alpha_{\max} = 135^\circ$ が $\theta_{\max} = 166^\circ$ と変換され、かなり大きな塑性負荷域を応力増分空間で生ずることになる。また、J₂D 増分則が適用されるいわゆる全負荷域角 θ_0 は、 $\theta_0 = (166 - 90)^\circ / 2 = 38^\circ$ となるが、これも応力空間上では約 70° となり広い範囲で J₂D 増分則を用いることになっていることになる。

次に、後藤則について考察を進める。J₂G については既報⁽⁴⁾で報告済みであるからここでは省略し、その後に提案された構成式についてののみ述べることにする。まず、J₂G-I についてであるが、比例負荷のとき、すなわち $\alpha \rightarrow 0$ のとき $\mu(0) = (2 \cos \alpha_{\max} - 1) / (\cos \alpha_{\max} - 1)$ となり $\alpha_{\max} = \pi/2$ の場合を除いて μ の値は 1 に一致しない。これは比例負荷に対しては J₂F に一致した関係を与えるという条件を満足していないことを意味する。また、 $\alpha \rightarrow \pi/2$ のとき

$\beta \rightarrow \pi/2$ となることが(17)式より示すことができ、さらに $\mu(\pi/2) = \{\cos\alpha_{\max}/(1-\cos\alpha_{\max})\}^2$ となることが同式よりわかる。一方、 J_2G-II においては、 $\alpha \rightarrow 0$ のとき $\mu=1$ となり J_2G-I 則に対して上述の指摘された点が改善されているが、 $\alpha \rightarrow \pi/2$ のときやはり $\beta \rightarrow \pi/2$ となることが(19)式より示すことができ、さらに $\mu(\pi/2) = \{\cos\alpha_{\max}/(1-\cos\alpha_{\max})\}^2$ となることも(19)式よりわかる。従って、 $\alpha \rightarrow \pi/2$ において J_2G-I と J_2G-II は共に J_2D と同様に大きな方向依存性をその特徴として持つものであると思われる。さらに、 J_2D 、 J_2G-I と J_2G-II を $\alpha > \pi/2$ に対して適用する場合は、これらの構成式が塑性ひずみ増分の振れ角に対し $\beta \approx \pi/2$ となるから、次のように負の塑性仕事増分 $\dot{W}^p = \sigma' : \dot{\epsilon}^p = \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^p \cos\beta < 0$ を生じることになり、注意を要する。 J_2N については新しい材料定数 ρ_N とそれまでの材料定数 ρ との関連について明確ではないが、図1に示されるように、 ρ_N の値を適当に決定するならば妥当な程度の方方向依存性を取り込むことが出来ること分かる。

図1は、 n 乗加工硬化則に従う場合について上述の幾つかの構成則の $\mu(\alpha)$ と $\beta(\alpha)$ を示しているが、この様にこれまでに提案されてきた全ての応力増分方向依存則の特性が $\mu(\alpha)$ と $\beta(\alpha)$ を通して表現され、各構成式の特徴が一目瞭然であり、すなわち塑性構成式としての基本的諸量 $\mu(\alpha)$ 、 $\beta(\alpha)$ 、 β_{\max} 、 α_{\max} を導入して提案されている著者ら塑性構成則の表現がより一般的なものであることを示していると言えよう。なお、図中の J_2G 則は $\alpha_{\max} = 2\pi/3$ に対する関係を示すものである。

4. 有限要素法による解析例

前節で既存の方向依存則の性質を示してきたが、本節では応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式を有限要素法に適用し、その数値解析結果に与える影響を検討する。開発された有限要素法プログラムは次の仮想仕事の原理に基づいて展開されたものである¹⁰⁾。

$$\int_V \left\{ \left(\tau - 2\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ij} \right) \delta \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma_{jk} L_k dL_{ij} \right\} dV - \int_S \dot{t}_i \delta v_i dS + \int_V b_i \delta v_i dV \quad \dots (21)$$

なお、応力ひずみ関係における応力速度として Kirihoff 応力の Jaumann Rate $\dot{\tau}_{ij}$ を、そしてひずみ速度には Stretching Tensor $\dot{\epsilon}_{ij}$ を採用し、

$$\dot{\tau}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dots (22)$$

と構成関係を記述するが、ただし D_{ijkl} の内容は前節で述べられた各構成則に応じて異なる。さらに定数係数則以外の方向依存則に対しては、構成式中の剛性マトリックスを求める際に用いる係数 D_{ijkl} は、本来ならば応力増分振れ角 α の関数であり、従って D_{ijkl} に含まれる α は繰返し計算によって求められるべきものであるが、本研究では

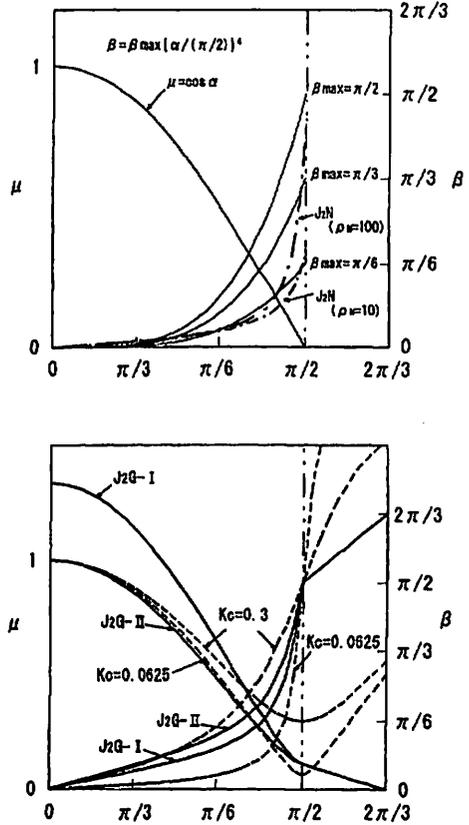


図1 既存の方向依存則および第4節における数値計算で用いられた $\mu(\alpha)$ と $\beta(\alpha)$

増分を十分小さくとり 1 step 時刻前の値を用いた陽解法を採用することにする。そして、剛性マトリックスを計算する際の弾性係数マトリックスあるいは塑性係数マトリックスの選択に関わる判定条件は、降伏応力について $\bar{\sigma}/\sigma_y \geq 0.999$ を満足する応力点に対しては塑性係数マトリックスを用いることとしている。ただし、変位増分より得られたひずみ増分から応力増分を求める際には、そのひずみ増分に対応する α を求め、その α を代入した D_{ijkl} より応力増分を計算している。また、弾性成分と塑性成分の和としてのひずみ増分と応力増分の中立負荷方向に対する方向角 α_{\max} が一致することより、 $\alpha > \pi/2$ となるときは弾性除荷と判定し D_{ijkl} には弾性係数マトリックスを用い、そうした応力点に対しては次時刻の相当応力が $\bar{\sigma}_{i+1}/\sigma_y = 0.995$ となる様に山田の係数¹⁰⁾を算出し、次時刻の剛性マトリックスを構築する際には弾性係数マトリックスを用いることとしている。さらに継続塑性負荷応力点に対しては最大相当塑性ひずみ増分が $\Delta \epsilon \leq 1/1000$ なる条件を満足することを課し r を求めている。以上の各

条件より r_{min} を決定し変形増分を制御した。要素としては 4Gauss 積分点評価の 8 節点アイソパラメトリック要素、いわゆる QSR 要素を用いた。

4.1 計算条件

計算条件は従来の研究と比較が容易なように JSTP (塑性加工学会; 塑性力学分科会) により企画された有限要素法プログラムのベンチマークテスト条件として採用された次の条件を用いた⁽¹⁰⁾。

< 単軸の応力ひずみ関係 >
弾性変形に対して、

$$\sigma = E\epsilon \quad ; \quad E = 200\text{GPa}, \nu = 0.33 \quad \dots \dots (23)$$

また、塑性変形に対して

$$\sigma = \sigma^* e^{P^n} \quad ; \quad \sigma^* = 590\text{MPa}, n = 0.0625 \quad \dots (24)$$

そして初期降伏応力は $\sigma_y = 400\text{MPa}$ とした。

< 境界条件と要素分割 >

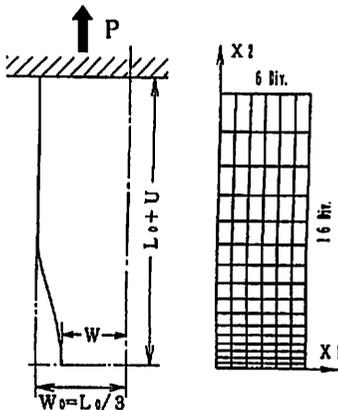


図2 初期要素分割と境界条件

塑性構成式が大きく影響する問題として平面ひずみ引張りを受ける板の局所くびれ問題があるが、その解析を試みる。なお、初期要素分割及び境界条件を図2に示す。以下の図中の方向依存則を用いた解析においては、角点の存在を前提とする際の変形解析中の角点の成長・消滅に関わる議論の不明さを避けるために、降伏曲面が滑らかとする ($\alpha_{max} = \pi/2$)、すなわち非法線則としている。定数係数則以外の方向依存則においては全て $\mu(\alpha) = \cos\alpha$ とし、また特に断わらない限り方向依存性に $\beta = \beta_{max}(\alpha/\alpha_{max})^N$; $N=4$ (ただし、 $\beta_{max} = \pi/6, \pi/3, \pi/2$) なる非法線則関係を用いた。 $\beta_{max} = \pi/6$ においては法線則を前提とした場合の Tresca 型降伏曲面上の角点における程度方向依存性を取り込むことが、まずは妥当であろうと判断したからである。 $\beta_{max} = \pi/3, \pi/2$ としたのは変形に及ぼす β_{max} の影響を調べるために、その値をかな

り大きく採ったものである。定数係数則については、まず n 乗硬化材に対する J_2D 増分則において $n=0.0625$ とした場合に一致する $K_c=0.625$ と置き計算を試みた。その他 $K_c=0.3$ についても計算を行った。ただし、これら定数係数則に対しても $\alpha > \pi/2$ なる応力増分に対しては除荷と判定し弾性関係を用いることにする。従って、図1より分かるように、 K_c が大きな値をとる程、中立負荷方向を境界として発生する塑性歪増分の不連続が大きくなる。

4.2 平面ひずみ問題

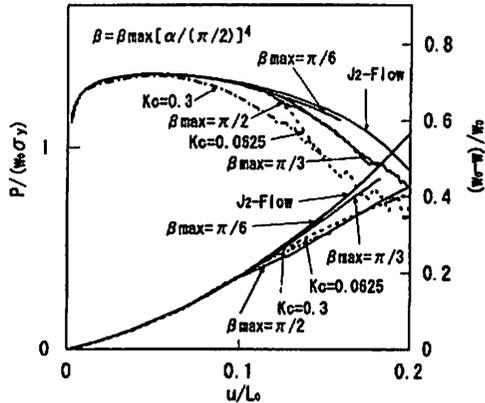


図3 平面ひずみ引張りにおける荷重-軸変位及びくびれ幅-軸変位関係

図3は、平面ひずみ問題に対して得られた結果の荷重-軸変位及びくびれ幅-軸変位の関係を示す。図中の J_2F 則の結果は本プログラムを用いて解析したものであるが、JSTP で報告された範囲にあり開発されたプログラムが概ね妥当であることを示すものと思われる。

さて、図より最大荷重付近まではいずれの構成則を用いてもほぼ同様の傾向となることが分かるが、最大荷重点を通過した後の領域で、方向依存則を用いた結果は、 J_2F を用いて得られた荷重曲線を下回る傾向を示している。また、くびれ幅の推移についても同様な傾向を示している。特に、定数係数則を用いた結果は最大荷重を過ぎた直後に急激な荷重の減少が観られ、変形の状態が急変していることが示唆される。しかも、荷重が急落する開始点は K_c の値が大きいかほど早い段階で生ずる傾向にある。しかしながら、応力増分方向依存性構成式を用いて、 $\beta_{max} = \pi/6, \pi/3, \pi/2$ の場合について計算したところ荷重はその依存性の程度に応じて徐々に J_2F 則の場合の曲線より離脱して行く傾向を示すだけで必ずしも荷重が急落しないことが分かる。こうした傾向は、くびれ幅-軸変位についても同様に観られる。なお、煩雑さを避けるため図3には示してないが、 $\beta_{max} = \pi/6, N=1$ とした場合、途中までは $K_c=0.3$ に対する荷重と同様な経路を辿り荷重は若干低めで推移するものの急落する様子は観られない。また後述するように明確なせん断帯の発生もなかった。

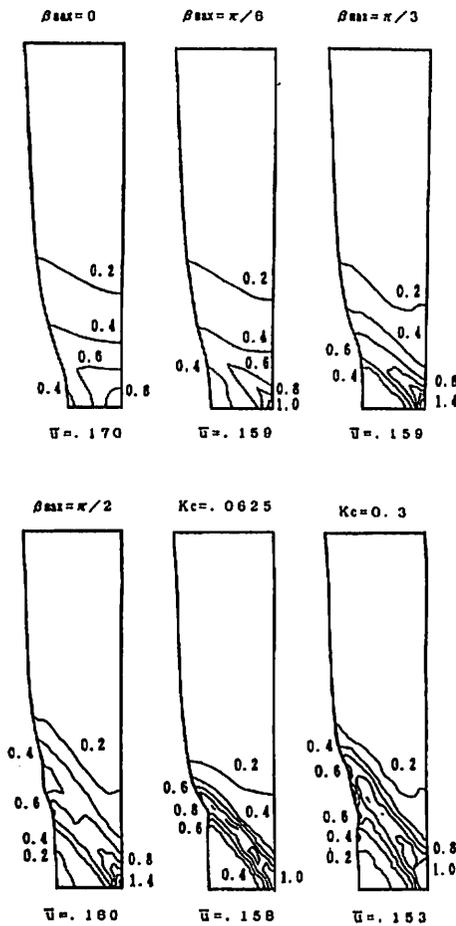


図4 平面ひずみ引張りにおける相当塑性ひずみ \bar{U} の分布($\bar{U} = U/L_0$)

図4は、各種構成則を用いて得られた結果における相当塑性ひずみ等値線を示す。J₂F則を用いた場合は、これまでよく知られているようにせん断帯の発生は観られないが、くびれ部の中央部において、引張り軸に対し約45度方向に緩やかな変形の局所化らしきものが窺えないこともない。定数係数則を用いた結果において、 $K_c=0.0625$ 及び0.3の場合は局所せん断帯が発生することを示すが、特に $K_c=0.3$ の場合は表面に凹凸の激しい複雑な変形も同時に発生している様子が見られる。著者らの当初の予想に反し、 $\beta_{max} = \pi/6$ 程度の方向依存性を用いた結果においては、J₂F則の場合の結果と比べて明らかであると言いつけるほどの明確な局所せん断帯の発生は観られない。しかし、 $\beta_{max} = \pi/3$ 及び $\pi/2$ と依存性の程度を大きくして行くと、局所せん断帯の形成がより明らかとなっている。

5. 結 論

既存の応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式の特徴について、著者らの提案する塑性構成式の基本的パラメータである $\mu(\alpha)$ 、 $\beta(\alpha)$ 、 α_{max} そして β_{max} の観点より考察し、それぞれの特徴と注意点を明らかにした。

また、板の平面ひずみ荷重状態における局所くびれ帯発生に対する応力増分方向依存性構成式の影響を有限要素法数値解析により調べた結果、 $\beta_{max} > \pi/3$ 程度の大きな方向依存性を導入すると明確な局所せん断帯が発生することが分かった。過去にJ₂角点則を用いて平面ひずみ問題に対してせん断帯の形成が報告されているが、今回の数値計算においては、Tresca降伏曲面の角点より類推される $\pi/6$ 程度の方向依存性を導入した範囲においてはそれほど明確なせん断帯の発生は示し得なかった。最大荷重を超えた後に発生する局所せん断帯は、構成式の種々のパラメータや計算領域の形状不均一性等に敏感に影響されることがTvergaard等により報告されており⁽⁶⁾、数値計算に関わる経験の今後の積み重ねが望まれる。

また、今回の研究においては著者らが作成した有限要素法プログラムを用いたのであるが、計算に要する時間については、方向依存性を考慮した場合は最大荷重点を通過後に r_{min} の値が極端に小さくなる傾向が観みられた。例えばJ₂F則を用いた場合と $\beta_{max} = \pi/6$ ； $N=1$ とし、 $N=4$ に比べて時間を要する場合とでは $u=0.2$ 程度の同一変形量までの計算を行うために必要とした総増分ステップ数を較べると約20倍程度の差があるので、今後は構成式の積分に関するアルゴリズム等について注意深く検討し研究を継続して行く必要があると思われる。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費の一般研究(C)(平成4年度)及び天田金属加工機械技術財団の補助金(平成6年度)で行なった。また、有限要素法解析プログラムの開発にあたっては、神戸大学冨田佳宏教授に貴重な資料を提供して頂いた。記して深甚なる感謝の意を表す。

文 献

- (1)Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 27-516(1979), 465
- (2)後藤, 機論, 48-424, A(昭5), 1389
- (3)Gotoh, M., Int. J. JSME, ser.I, vol.33, (1990), 209
- (4)呉屋・伊藤, 機論, 54-504, A(昭63), 1617
- (5)Tomita, Y. and Shindo A., Int. J. Mech. Sci., 28, (1986)
- (6)Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K., J. Mech. Phys. Solids, 29-2, 115(1981)
- (7)後藤, 機論, 55-518, A(昭64), 2080
- (8)伊藤・呉屋・大津, 機論, 55-520, A(昭64), 2475
- (9)Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., Int. J. Mech. Sci., vol. 10, (1968), 343
- (10)川井, 塑性と加工, 32-364, (1991), 553