統計数理はいま…第67回　判断・推測・方法(1)トレーラーを移動する

トレーラーを移動する

前原　潤 | Maehara Hiroshi

これから数回にわたって、いろいろな問題の話をします。可能かどうかを判断したり、どんな結果になるか推測したり、あるいはどうすればいいか、その方法を考える、といったような話です。内容は必ずしも統計数理に関係するとは限りませんが、広い意味での OR の問題で、具体的、実際的なものを扱います。

1　駐車場に入れる

狭い駐車スペースに車を止めるのはなかなか大変だ。私などは運転が下手なので、大学構内の駐車場に車を止めるときも、ちょうど1台分しか空いてないときは大変苦労する。時には無理だと諦めて他の遠い方の空いている駐車場に行くこともある。特にバックで駐車するのは難しい。

図1は、ある道路わきの駐車場に、どういうわけか大きなトレーラーが駐車しようとしているところを示している。道路の両側にはガードレールがあり、駐車場の入り口の分だけガードレールに切れ目がある。道路幅は5 m、駐車場の入り口では、ガードレールに5 mの切れ目がある。トレーラーはずいぶん大きいもので、上から見て3 m×8 mの長方形とみなすことが出来る。このトレーラーを駐車場に入れることが出来さえすれば、駐車場は広いので、どこか適当なところに止めることができる。トレーラーを駐車場に入れることができるだろうか。もちろんトレーラーは一部分であっても道路からはみ出すことは出来ない。ガードレールがかかるのだ。また、運転手は、運転の名人で、トレーラーをどのようにでも動かすことが出来るものとする。

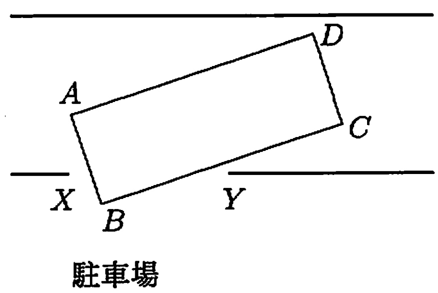

図1：トレーラー$ABCD$

では、どうなのだろう。トレーラーを駐車場に入れることができるだろうか。

まず、トレーラーの前部ABを駐車場に入れることができれば、中は広いのだから、そのままどんどん進めばトレーラーが全部駐車場に入ることになる。従ってABを入れることができればよい。また、ABを駐車

場に入れることが出来なければ、明らかにトレーラーを駐車場に入れることはできない。運転手の取る方策は、とりあえずBのカドを駐車場に入れ、少しずつ反時計方向に回転してAを入れるようにすることだ。では、どうしてもAが入るところまで動かすことが出来ないと仮定してみよう。その場合どんなことが起こっている？ 図2のように、辺ABがガードレールの切れ目Xに当り、辺BCがYに当り、長方形のカドDが駐車場の反対側のガードレールに当るという状況が起こるはずだ。

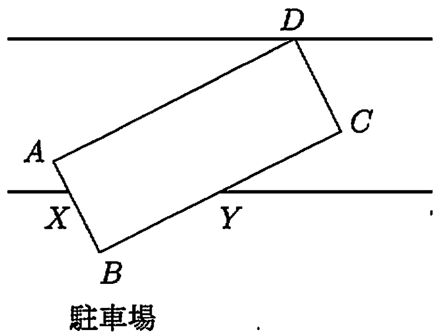

図2：トレーラーが進めない

ここで「長方形に含まれる三角形の面積の最大値は、長方形の面積の半分に等しい」という事実を用いる。これについては後で説明する。図2のような状態が起こったとせよ。すると、三角形XYDは長方形$ABCD$に含まれるから（わずかな違いは無視している）、その面積は長方形$ABCD$の半分以下、つまり、$3\times8/2=12\,(m^2)$以下である。ところが、三角形XYDの底辺をXYとすると、高さは道路の幅だから、その面積は$5\times5/2=12.5\,(m^2)$となる。これは矛盾している。従って、長方形$ABCD$が、X,Yおよび駐車場の向かいのガードレールに同時に触ることはできないのである。つまり、トレーラーを駐車場に入れることができるわけだ。

この議論から、もっと一般に、道路幅をa、駐車場の入り口の幅をb、トレーラーの幅をc（ただし、$c<a, c<b$とする）、トレーラーの長さをdとするとき、

$$c\times d<a\times b$$

が成り立つならトレーラーは駐車場に入れられることがわかる。逆に、トレーラーを駐車場に入れることができるなら、$c\times d<a\times b$である。実際、駐車場に入れることができるなら、図3のようにトレーラーのカドAが駐車場の入り口を通過する瞬間がある。このとき直線XYと辺BCの交点をWとおく。

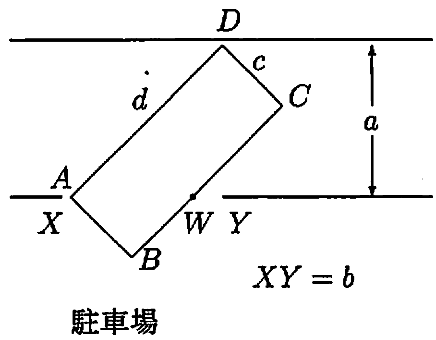

図3：トレーラーが入る

すると、三角形AWDの面積は長方形$ABCD$の面積の半分で、$c\times d/2$に等しい。一方、三角形AWDの面積は三角形XYDの面積より小さいから、$a\times b/2$より小さい。ゆえに$c\times d<a\times b$である。

2 長方形の中の三角形

では、先ほど述べた「長方形に含まれる三角形の面積の最大値は長方形の面積の半分に等しい」という事実を証明しよう。証明は、線形計画法のシンプレックス法に相当するものを用いる。

長方形の中に三角形 XYZ があるとせよ。辺 XY を底辺と見て、それを水平に見えるように、図４のように、長方形を傾ける。

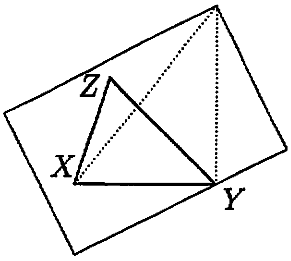

図４：面積を大きくする

頂点 Z を高くすれば三角形 XYZ の面積は大きくなるから、Z を斜めになった長方形の一番高い頂点に移動して、面積を大きくする。次に YZ を底辺として、それが水平なるように長方形を傾ける。こんどは、X を斜めになった長方形の一番高い頂点に移動して面積を大きくする。最後に、辺 XZ を底辺として水平に置き、Y を最も高い頂点の位置に移動する。（この場合、すでに XZ が長方形の１辺になっているので、最も高い頂点は２つある。その１つを選ぶ。）すると三角形の面積は増加することはあっても、減少することはない。つまり、長方形に含まれるどんな三角形についても、三角形の面積を減少させずに３頂点を長方形の３つのカドに移動することができる。３頂点が長方形の３つのカドにある三角形の面積は長方形の面積の半分だから、長方形に含まれる三角形の面積の最大値は長方形の面積の半分である。

この方法は四面体の体積にも使える。直方体の中にある四面体で体積が最大のものは、四面体の４つの頂点が直方体の４つの頂点に一致する場合として実現できる。従って、直方体に含まれる四面体の体積の最大値は、直方体の体積の３分の１に等しい。

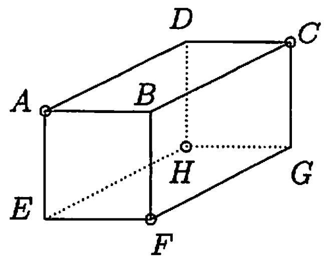

図５：直方体の４頂点を選ぶ

実際、図５の直方体 $ABCD$-$EFGH$ において、頂点を４つ選んで作られる四面体のうち、四面体 $ACFH$ が体積最大のものの１つで、その体積は、直方体の体積から、４つの四面体

$$AFCB, AFHE, ACHD, CFHG$$

の体積を引いたものである。これら４つの四面体の体積はいずれも直方体の体積の６分の１であるから、残りの四面体 $ACFH$ の体積は直方体の体積の３分の１となる。

同様にして、底面が直径 a の円で、高さが b の円柱に含まれる四面体の体積の最大値が $ab/12$ となることも示すことが出来る。

3　かどを曲がる

こんどは、先ほどの３ｍ×８ｍのトレーラーが、道幅 4.05 ｍの道路と道幅６ｍの道路が直角に出会っているＬ字型のコーナーを曲がることができるかという問題を考えてみよう。

もっと一般に、幅 a, b の道路が直角に出会っているＬ字型のコーナーを、幅 c のトレーラーが曲がることができるとき、このトレーラーの長さの最大値はいくらか考えてみる。

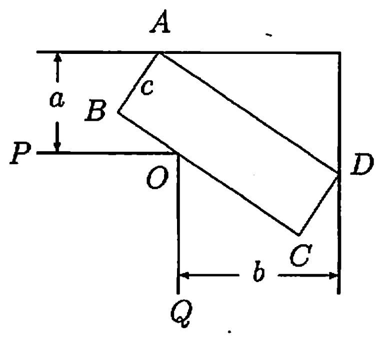

図 6: コーナーをギリギリで回る

図 6 はコーナーを回れる最大長のトレーラーがコーナーを曲がるギリギリの瞬間を描いている。コーナーを曲がれる最大長のトレーラーの場合には、図 6 のように、カド A, D がガードレールに接し、辺 BC が道路のカド O に接する状態が起こるはずである。さもないと、もっと長いトレーラーでも曲がれることになるからだ。

図 6 の点 O を原点、$\overrightarrow{PO}$ を x-軸、$\overrightarrow{QO}$ を y-軸としよう（図 7)。トレーラーが辺 BC で点 O に接しながらコーナーを回っていくとき、辺 AD は O を中心とする半径 c の円に接して動く。従って、コーナーを回ることができるトレーラーの長さの最大値は、O を中心とする半径 c の円に第 1 象限で接する直線から道路が切り取る部分の長さの最小値に等しい。トレーラーの長さがこの長さを超えると、トレーラーは道路からはみ出してしまうからだ。

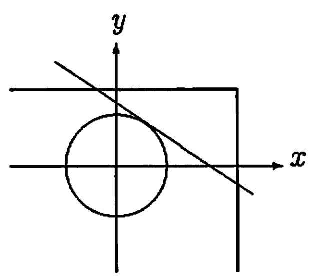

図 7: 円に接する直線

原点 O を中心とする半径 c の円に第 1 象限の点 $(c\cos\theta, c\sin\theta)$ で接する直線は

$$x\cos\theta + y\sin\theta = c \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

と表わすことができる。（これはヘッセ (Hesse) の標準形と呼ばれるものである。）この直線と、直線 $y = a$、及び、直線 $x = b$ との交点を求めると、

$$\left(\frac{c - a\sin\theta}{\cos\theta}, a\right), \quad \left(b, \frac{c - b\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

となる。これら 2 点間の距離を $f(\theta)$ で表す。すなわち

$$f(\theta) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{c - a\sin\theta}{\cos\theta} - b\right)^2 + \left(a - \frac{c - b\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}$$

である。コーナーを曲がることができるようなトレーラーの長さの最大値はこの関数 $f(\theta)$ の最小値に等しい。

3 つの数値 a, b, c が与えられたとき、関数 $f(\theta)$ の最小値は、Mathematica や Maple などを用いるとすぐに数値計算ができる。(たとえば、Mathematica だと FindMinimum というコマンドを使えばよい。)

$a = 4.05, b = 6, c = 3$ とすると、$f(\theta)$ の最小値は 7.99791 となる。よって、3 m× 8 mのトレーラーで、幅 4.05 m と 6 mの道路が直角に出会うL字形のコーナーを曲がることは出来ない。$a = 4.1, b = 6, c = 3$ とすると、$f(\theta)$ の最小値は 8.08715 となり、このトレーラーはどうにかコーナーを曲がることができる。