角の見かけの大きさ

前原　潤 | Maehara Hiroshi

1　角を見る

3次元空間内の3点 A, B, C に対して角 $\angle BAC$ の見た目の大きさは、視点の位置で変化する。たとえば、部屋の天井のカドの角は一般に直角であるが、見た目にはもっと大きく映る。

あいまいさを避けるために、空間内の三角形 ABC に対して、視点 P から三角形の内角 $\angle A = \angle BAC$ を見るときの見かけの角を次のように定義しよう。

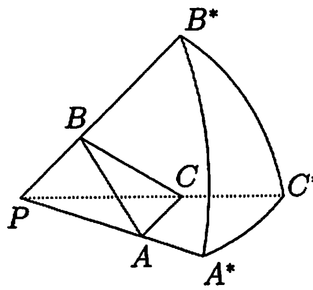

図1：P を中心とする球面に投影

3つの半直線 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ と点 P を中心とする単位球面の交点を、それぞれ、A^*, B^*, C^* とする（図1）。そのとき、球面三角形 $A^*B^*C^*$ の頂点 A^* における内角 $\angle A^*$ を、"$\angle A$ を視点 P から見たときの見かけの角"といい、記号

$$\angle_P A \quad \text{または} \quad \angle_P BAC$$

で表す。添字の P は視点 P から見たことを示している。

この角 $\angle_P A$ は、$\angle BAC$ を直線 PA に直交する平面に点 P から投影して得られる角と同じである。あるいは、点 P にカメラを置き、点 A にピントを合わせて、三角形 ABC の写真を撮ったとき、写真に写った三角形の頂点 A における角と考えてもよい。

東海大学の前田陽一さんは、'ランダム'に選んだ視点 P から $\angle A$ を眺めるとき、$\angle_P A$ の大きさの期待値は、もとの角 $\angle A$ の大きさに等しくなるという事実を発見した。この場合、ランダムに選んだ視点 P は、$\angle A$ の頂点 A に関して等方的（isotropic）に分布していなければならない。

簡単のため、点 A に関するランダムな視点 P は、点 A を中心とする単位球面上で一様に分布するものとする。このとき、見かけの角 $\angle_P A$ の（大きさの）期待値は $\angle A$ に等しくなるのである：

$$E(\angle_P A) = \angle A. \tag{1}$$

この事実は期待値の線形性から容易に導かれる。ランダムな視点 P から $\angle A$ を見たときの見かけの角 $\angle_P A$ の大きさは確率変数

であり、その分布は明らかに $\angle A$ の大きさだけで決まる。$\angle A=\alpha\,(0\le\alpha\le\pi)$ のとき、$\angle_P A$ の大きさを X_α で表そう。

まず、$\angle A=\angle BAC=\pi$ のときは、視点 P が直線 BA 上にある場合（その確率は0）を除いて、$\angle_P A=\pi$ である。従って

$$E(\angle_P A)=E(X_\pi)=\pi \tag{2}$$

となる。次に、$0<\alpha,\beta,\ \alpha+\beta\le\pi$ のとき

$$E(X_{\alpha+\beta})=E(X_\alpha)+E(X_\beta) \tag{3}$$

となることを示そう。このため、点 A を通らない1つの直線上に、3点 B,C,D を、この順序で

$$\angle BAC=\alpha,\ \angle CAD=\beta$$

となるようにとる。すると、$\angle BAD=\alpha+\beta$ となる。従って、点 A に関するランダムな視点 P に対して、

$$\angle_P BAD=\angle_P BAC+\angle_P CAD$$

となるから（図2参照）、

$$\begin{aligned}&E(\angle_P BAD)\\&\quad=E(\angle_P BAC+\angle_P CAD)\\&\quad=E(\angle_P BAC)+E(\angle_P CAD)\end{aligned}$$

となる。最後の等号は期待値の線形性による。よって(3)が成立することがわかる。

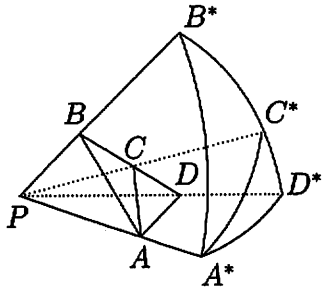

図2：$\angle_P BAC+\angle_P CAD=\angle_P BAD$

期待値の線形性と(3)により、任意の整数 $n>0$ に対して、

$$\begin{aligned}nE(X_{\pi/n})&=E(\underbrace{X_{\pi/n}+\ldots+X_{\pi/n}}_{n})\\&=E(X_{n\pi/n})=E(X_\pi)\end{aligned}$$

となるから、(2)により、$E(X_{\pi/n})=\pi/n$ である。従って、$n\ge m>0$ のとき

$$E(X_{m\pi/n})=mE(X_{\pi/n})=\frac{m\pi}{n}$$

が成立する。つまり、1以下の任意の正の有理数 r に対して、$E(X_{r\pi})=r\pi$ となる。$E(X_\alpha)$ は明らかに α の連続関数であるから、結局、どんな $0\le\alpha\le\pi$ についても $E(X_\alpha)=\alpha$ となり、(1)が成り立つことがわかる。

参考文献[3]では、球面上の凸図形についてのSantalóの弦定理[注1)]を用いて等式(1)を証明し、さらに、X_α の分散を計算するための2重積分の公式を与えている。

2 三角形を見る

球面三角形の内角の和は π より大きい。実際、単位球面上の球面三角形の面積は

(球面三角形の内角の和) $-\ \pi$

で与えられるのだ。これは、ジラールの「球面過剰」の公式として知られている。

図1において、三角形 ABC の頂点 A,B,C における内角の大きさを、それぞれ、α,β,γ とする。三角形 ABC は平面三角形だから、当然、$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ となって

いる。球面三角形 $A^*B^*C^*$ においては、内角の和は π より大きいから

$$\angle_P A + \angle_P B + \angle_P C > \pi$$

である。点 P をランダムな視点として、期待値をとると

$$E(\angle_P A + \angle_P B + \angle_P C) > \pi$$

となる。左辺は (1) により

$$\begin{aligned} &E(\angle_P A + \angle_P B + \angle_P C) \\ &\quad = E(\angle_P A) + E(\angle_P B) + E(\angle_P C) \\ &\quad = \alpha + \beta + \gamma = \pi \end{aligned}$$

であるから、$\pi > \pi$ となり、矛盾が生ずる。これはおかしい。どこが間違っているのだ?

実は、視点 P をランダムな視点にしたのがおかしかったのだ。点 A に関するランダムな視点は、点 A に関して等方的に分布してなければならなかった。角 $\angle B, \angle C$ の場合も、ランダムな視点は角の頂点に関して等方的に分布していなければならない。ところが、異なる3点 A, B, C のすべてに関して等方的な分布は存在しない。つまり、頂点が異なる3つの角 $\angle A, \angle B, \angle C$ に共通のランダムな視点は存在しないのだ。

3 長方形を見る

四角形 $ABCD$ を視点 P から見るとき、見かけの内角 $\angle_P A, \angle_P B, \angle_P C, \angle_P D$ の和は必ず 2π より大きくなる。これは、四角形 $ABCD$ を、点 P を中心とする単位球面上に P から投影すると、球面上の四角形 $A^*B^*C^*D^*$ が得られ、球面上の四角形の内角の和は 2π より大きいからである。

最近、知人が家を新築したので見に行ったら、天井が斜めに張られている四角形の部屋があった。この部屋の天井は長方形ではないような気がしたので、固定した視点から、天井の四隅のそれぞれにピントを合わせて、4枚の写真を撮った。これらの写真から、天井の四隅の角を右回りに順に測っていったら、$120°, 130°, 150°, 140°$ であった。このデータから、天井は長方形ではないと言えるか?

実は、長方形 $ABCD$ の内角を視点 P から見るとき、見かけの内角に関して、

$$\cos\angle_P A \cos\angle_P C = \cos\angle_P B \cos\angle_P D \quad (4)$$

が成立する (参考文献 [2])。

上の天井の問題の場合、

$$\begin{aligned} \cos 120° \cos 150° &= 0.433013 \\ \cos 130° \cos 140° &= 0.492404 \end{aligned}$$

で、この2つの間にはかなり差があるから、(4) が成り立つとは言えない。よって、天井は長方形ではないことがわかる。

長方形 $ABCD$ について、関係式 (4) が成立することを示そう。必要なのは球面三角形の角に関する余弦定理 [注2] だけである。

点 P を中心とする球面に長方形 $ABCD$ を点 P から投影すると、球面上の凸四角形 $A^*B^*C^*D^*$ が得られる。この球面四角形の4つの内角が、$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ を視点 P から見たときの見かけの角である。大円 A^*B^* と大円 C^*D^* の交点を(図3のように) N, S とし、大円 B^*C^* と大円 D^*A^* の交点を E, W とする。

線分 NS は球の直径であるから球の中心点 P を通る。線分 EW も球の直径で点 P を通る。従って、4点 N, S, E, W は P を通る平面上にあり、1つの大円上にある。直

線 NS は2つの平面 PAB と PCD の交線であり、直線 AB と CD が平行であるから、平面 $ABCD$ は直線 NS と交わらない。

（もし、平面 $ABCD$ が直線 NS と交わるとすると、平面 PAB と平面 $ABCD$ の交線である直線 AB も直線 NS と交わることになる。この2つの直線の交点を Q とすると、直線 CD も直線 NS と点 Q で交わることになる。これは AB と CD が平行であることに反する。）

ゆえに、NS と AB は平行である。同様に、直線 EW は2つの平面 PBC と PDA の交線で、直線 BC に平行である。2つの直線 AB と BC は直交するから、P を通り AB に平行である直線 NS と P を通り BC に平行である直線 EW の2つは点 P で直交する。つまり、2つの直径 NS と EW は直交する。従って、4つの大円弧 $\widehat{NE}, \widehat{ES}, \widehat{SW}, \widehat{WN}$ の長さはすべて $\frac{\pi}{2}$ に等しい。

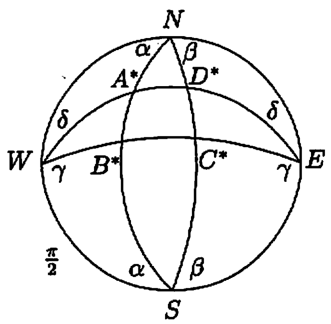

図3：弧を延長して大円に

さて、図3のように、4つの月形

$NA^*SW,\ ND^*SE,\ EC^*WS,\ ED^*WN$

の頂角を、それぞれ、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。球面三角形 A^*NW に、角についての余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\cos\angle A^* &= -\cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\pi/2 \\ &= -\cos\alpha\cos\delta\end{aligned}$$

が得られる。同様に、球面三角形

$$B^*WS,\ C^*SE,\ D^*EN$$

に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\cos\angle B^* &= -\cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\angle C^* &= -\cos\beta\cos\gamma \\ \cos\angle D^* &= -\cos\delta\cos\beta\end{aligned}$$

が得られる。従って

$$\cos\angle A^*\cos\angle C^* = \cos\angle B^*\cos\angle D^*$$

となり、(4) が成り立つことがわかる。

注1) 単位球面上の凸図形 A が、ランダムな大円 G から切り取る弧の長さを φ とすると、$E(\varphi) = (K \text{ の面積})/2$ が成立する。証明については [1] を参照せよ。

注2) 単位球面上の球面三角形 ABC の頂点 A, B, C の内角を α, β, γ、対辺の長さを a, b, c とすると、

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

が成立する。証明については、たとえば [1] を参照せよ。

参考文献

[1] 前原潤、円と球面の幾何学、朝倉書店、1998.

[2] Yoichi Maeda, Viewing cube and its visual angles, in J. Akiyama and M. Kano (Eds.): JCDCG 2002, LNCS 2866, pp 192–199, Springer 2003.

[3] Yoichi Maeda and Hiroshi Maehara, Observing an angle from various viewpoints, in J. Akiyama and M. Kano (Eds.): JCDCG 2002, LNCS 2866, pp 200–203, Springer 2003.