統計数理はいま…第68回　判断・推測・方法(2)流出した石油の量

流出した石油の量

前原　潤 | Maehara Hiroshi

1　変わった形のタンク

2004年の沖縄は3月頃から5月頃にかけて、トボロチやホウオウボク、コガネノーゼン、デイゴなどの花がよく咲いた。デイゴがよく咲く年は台風が多いという言い伝えがあるが、2004年は台風も多かった。

20年くらい前のことだが、台風のあと、先輩のM教授がある石油関連の会社から次のような相談を受け、M教授は、何かいい方法がないかと私にも尋ねて来た。

「台風で石油貯蔵タンクの一部が破損し石油が少し流れ出て、タンクに貯蔵していた石油の水位が h_1 から h_2 に落ちた。(石油でも水位というのかな。) 流出した石油の量を知りたい。困ったことに、このタンクの形は円筒形ではない。天井面は完全な円だが、タンクを建てたとき敷地の関係で、底面は図1のように卵形となってしまったのだ。

天井面の円の半径 r
底面の面積 a と周の長さ ℓ,
タンクの高さ h
水位の変化 $h_1 \to h_2$

はわかっている。流出した石油の量を計算で求められないだろうか。」これが相談の内容である。

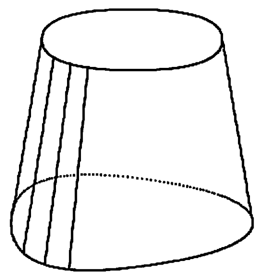

図1：天井は円形で底面は卵形

タンクにもう一度石油を入れて、もとの水位に戻るまでにどのくらいの量が必要かを測れば、流出した量はわかる。しかし、このタンクは取り壊すつもりなので、そういうことをせずに計算だけで流出量を求めたいというのだ。

計算で求めるには、タンクの形についての何らかの仮定が必要である。タンクの天井面である円板を P、卵形の底面を Q で表わす。もちろん、天井面、および、底面は水平である。タンクの形について次のように仮定しよう。

タンクとその内部の点からなる集合は P と Q を結ぶようなすべての線分の和集合である。

このような図形は P と Q の凸結合 (convex combination) と呼ばれている。たとえば、図２は２つの三角形 A と B の凸結合がどんな図形かを示している。

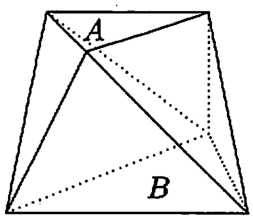

図２：三角形 A, B の凸結合

タンクの形が P と Q の凸結合になっているという仮定は、タンクの側面に出っ張りや凹みがないということに相当し、妥当な仮定といってよいだろう。

底面 Q が乗っている水平面を xy-平面とする。したがって天井の円板 P が乗っている平面は $z = h$ である。任意の t $(0 < t < h)$ に対して、タンクを水平な平面 $z = t$ で切って得られる断面を S_t で表わすことにする。断面 S_t の面積がわかれば、流出量は S_t の面積を積分して求めることができるはずである。

2　水平に切った断面

P の点 p と Q を結ぶすべての線分の和集合を $p*Q$ で表す。これは Q を底面、p を頂点とする錐体 (cone) である。したがって、P と Q の凸結合は、p が天井面 P 上をくまなく動くときの錐体 $p*Q$ たちの和集合である。円板 P の中心点を o で表わす。断面 S_t の形を調べるため、はじめに錐体 $o*Q$ を平面 $z = t$ で切った切り口ついて考えよう（図３)。

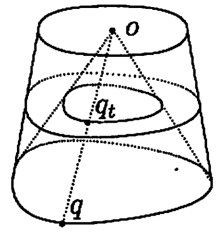

図３：平面 $z = t$ による断面

この切り口の図形を Q_t で表す。図形 Q_t と Q は明らかに相似である。断面 S_t はこの Q_t に土星の輪のような縁をつけた図形である。底面 Q の周上の点 q に対して、錐体 $o*Q$ の‘母線’oq と Q_t の周の交点を q_t で表す。すると、q が Q の周上を一周するとき、点 q_t は Q_t の周を一周する。

次に q を頂点とし、P を底面とする逆さの錐体 $q*P$ を考える。図４は点 q が左端に来るように真横から見た状態を描いている。錐体 $q*P$ の平面 $z = t$ による切り口は太線で示されている。

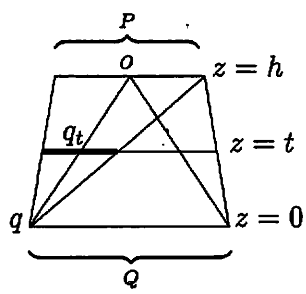

図４：真横から

この錐体 $q*P$ は P が円であるから、直円錐とは限らないが、円錐である。円錐 $q*P$ を水平な平面で切った切り口と円 P は、点 q を相似の中心として相似の位置にある。従って、この切り口は点 q_t を中心とする円である。また、$qo : qq_t = h : t$ であるから、この切り口の円の半径は $r \times (t/h)$ であることがわかる。この円は、点 q_t が Q_t の周を一周

するとき、Q_t の周りの縁をすべて刷いていく。これから、S_t は Q_t の周りに、幅 rt/h の縁をつけた図形であることがわかる。

3　断面の面積

断面 S_t の面積を求めよう。S_t は Q に相似な図形 Q_t に幅 rt/h の縁をつけた図形であった。まず、Q と Q_t の相似比は $h : h-t$ であるから、Q_t は Q を $(h-t)/h$ 倍に縮小した図形であることがわかる。従って、Q_t の面積、周の長さは、それぞれ

$$(1-t/h)^2 a, \quad (1-t/h)\ell \tag{1}$$

である。では、Q_t の周りの縁の面積はいくらになるだろうか？

凸多角形の周りに幅 d の縁をつける場合を考えてみよう。この縁は、凸多角形の各辺を1辺とする（幅 d の）長方形と、各頂点の周りの半径 d の扇形に分割できる（図5）。

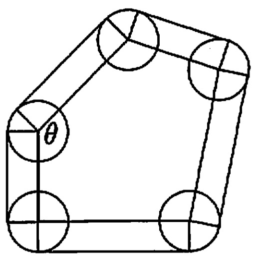

図5：幅 d の縁をつける

長方形の面積の和は、

$$(\text{多角形の周の長さ}) \times d$$

となる。内角が θ の頂点における扇形の要（かなめ）の角は 2π から2直角と θ を引いた残りであるから、$\pi-\theta$ に等しい。従って、すべての頂点における扇形の角の和は、多角形が n 個の頂点を持つとすると、

$$\begin{aligned} &n\pi - [\text{すべての内角の和}] \\ &= n\pi - (n-2)\pi = 2\pi \end{aligned}$$

となる。つまり、各頂点の周りの扇形を全部集めると、ちょうど1個分の円が出来るのである。よって、凸多角形の周りの幅 d の縁の面積は

$$(\text{多角形の周の長さ}) \times d + \pi d^2 \tag{2}$$

となる。多角形が凸でなければ、縁の面積をこのように計算することは出来ないことに注意しよう。たとえば、文字‘凹’の形の多角形の場合、上の計算は正しくない。縁の部分が長方形と扇形に分割できないのである。

さて、Q_t は卵形だから、凸多角形で近似することができる。従って、Q_t を凸多角形で近似して考えると、Q_t の周りの縁の面積は (2) により

$$(1-t/h)\ell \times (rt/h) + \pi(rt/h)^2 \tag{3}$$

となることがわかる。(1) と (3) から

$$\begin{aligned} &S_t\text{の面積} \\ &\quad = (1-t/h)^2 a \\ &\quad + (1-t/h)\ell \times (rt/h) + \pi(rt/h)^2 \\ &\quad = a + \frac{\ell r - 2a}{h} t + \frac{a - \ell r + \pi r^2}{h^2} t^2 \end{aligned}$$

となる。

4　流出した石油の量

これで石油の流出量を計算する準備が整った。水位 t までの石油の量 $v(t)$ は S_t の面積を $t=0$ から $t=t$ まで積分して、

$$v(t) = at + \frac{\ell r - 2a}{2h} t^2 + \frac{a - \ell r + \pi r^2}{3h^2} t^3$$

となる。これから、石油の流出量は

$$v(h_1) - v(h_2)$$

として計算できる。たとえば、

天井面の円の半径が 3 メートル、
底面の面積が 40 平方メートル、
底面の周の長さ 30 メートル、
タンクの高さが 5 メートル

とすると、

$$v(t) = 40t + t^2 - 0.29t^3$$

となる。タンクの破損で水位が 3 メートルから 2.5 メートルに落ちたとすると、石油の流出量は

$$v(3) - v(2.5) = 19.45\ (\text{立方メートル}),$$

つまり、19.45 キロリットルの流出となる。

5 混合面積

これまでの計算では、Q_t の周りの縁の面積を求めるのに、底面が凸図形であるということが必要であった。凸図形というのは、「その図形の中の 2 点を結ぶ線分は決してその図形からはみ出さない」という性質を持つ図形のことである。たとえば、多角形 '凹' の周と内部を合わせた図形は凸図形ではない。また、縁の面積を求めるのに天井面が円であるということも用いた。それによって高さ t の断面積を求めることができたのである。では、天井面も底面も円でない場合はどうすればよいのだろう。

実は、天井面 X と底面 Y が両方とも水平な凸図形であり、タンクの形が X と Y の凸結合となっている場合は、その断面積に関して次のことが知られている（参考文献 [1][2]）。タンクの高さを h とすると、任意の t $(0 < t < h)$ について、タンクを高さ t の水平な平面で切った断面の面積は、定数 c_1, c_2, c_3 を用いて

$$c_1(1 - t/h)^2 + c_2(1 - t/h)(t/h) + c_3(t/h)^2$$

と表わされるのである。ここで、c_1 は天井面 X の面積、c_3 は底面 Y の面積である。定数 c_2 は X と Y の混合面積と呼ばれている。

従って、天井面 X の面積 c_1 と底面 Y の面積 c_3、ある高さ t_0 における断面の面積がわかれば、これらの 3 つの値から係数 c_2 の値を求めることができる。これから、任意の高さまでのタンクの容積が求められることになる。

タンクに途中の高さ z まで石油が入っていれば、ある微小量 Δv の石油を放出して水位の変化 Δz を調べることによって、高さ z での断面の面積の近似値 $\Delta v / \Delta z$ が得られる。これから、混合面積 c_2 を推定することができ、任意の高さまでのタンクの容積が推定できることになる。

参考文献

[1] Russell V. Benson, *Euclidean Geometry and Convexity*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] リュステルニク（筒井、北村　訳）、凸図形と凸多面体、東京図書、1969.