自転車とヨット

前原　潤 | Maehara Hiroshi

今回は、道路に残された車輪の跡から、自転車がどの方向に進んだのか判断する問題と、ヨットで風上へ最も速く行くにはどうすればよいかという問題を取り上げる。

1　自転車はどの方向へ？

図1は、道路の舗装されてない部分に残された、自転車の前輪と後輪の跡である。自転車はどの方向に進んで行ったのか？右から左へか、あるいは反対に左から右へか？

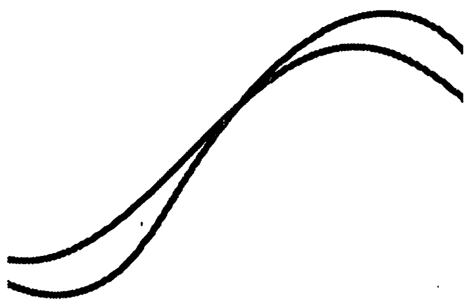

図1：自転車はどの方向へ？

この問題は、問題集 [4] の最初の問題である。(車輪跡の図1は、改めて描いたもので、[4] にある図とは少し異なる。) 著者たちもこの問題が気に入っていると見えて、本のタイトルが Which way did the bicycle go? となっている。では、図1から、自転車がどの方向に進んだのか、判断できるであろうか？

はじめに、自転車の構造について少し復習しておこう。詳しいことについては [3][6] を参照せよ。自転車の大まかな骨組みは図2のようになっている。興味深いのは前フォーク（前輪と車体をつなぎ、ハンドルの動きを前輪に伝える部分）の形である。

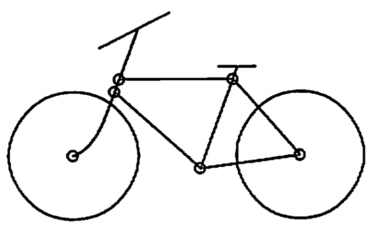

図2：自転車の骨組み

世界で最初に実用化された自転車は前フォークが地面に対して垂直に前輪を支えていたそうである。現在の自転車では、前フォークの中心線（ハンドルの回転軸）は垂直に対して15度〜22度くらい傾いている。さらに、前フォー

クそのものがカーブしていて、前輪のハブ軸は前フォークの中心線から前の方へ5 cm程度ずれている。これによって、自転車が傾くと、前輪は傾いた方向に自動的に向きを変えることになる。また、前輪タイヤの接地点は、前フォークの中心線の延長と地表との交点より少し後ろにある。このため、特に自転車が高速で走行している場合には、直進を保とうとする力が生じ、いわゆる「進路保持性」が現れる。

このような前輪系（前輪と前フォーク）の構造から、ハンドルを切ったとき、前輪の中心は後輪の決定する平面からハンドルを切ったほうに少しはみ出すことになる。従って、厳密に言えば、自転車がカーブするとき、後輪の軌跡の接線（これは後輪の決定する平面と地表面の交線と同じ）は、前輪の接地点を通らない。しかしながら、そのズレはわずかなものである。また、後輪の接地点から前輪の接地点までの距離もだいたい一定である。従って、

(*) 前輪の接地点は後輪の軌跡の接線上にあり、しかも後輪の接地点から一定の距離にある

と思ってよいであろう。

さて、冒頭の問題に戻って、図1から自転車の進んだ方向を決定しよう。図1の2本の車輪跡を区別するため、図3では2本の曲線を太い線と細い線で示してある。この太線に右端の近くの高いところで接線を引くと細い方の曲線とは交わらないから、上の条件(*)によって、太線は後輪の跡ではないことがわかる。従って、細い方の曲線が後輪の跡である。では、自転車はどの方向に進んだか？図3の細い曲線の2つの接線において、接点から左側に進んで太線と交わるまでの距離は、2つの接線でははっきり異なる。それに対して、接点から右側に進んで太線に交わるまでの距離は、2つの接線でだいたい等しく見える。従って、自転車は左から右に進んで行ったと判断することができる。

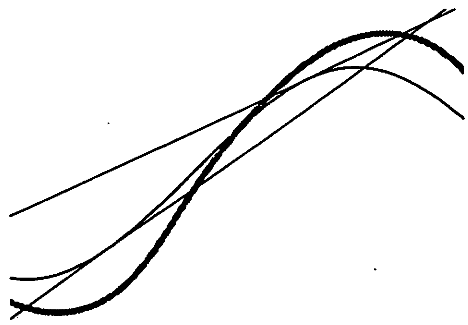

図3：太線は前輪の跡

実は、図3（および、図1）の2本の曲線は、細い方が$y = \sin x$であり、この曲線の接線上で接点から右の方に距離1進んだ点の軌跡となる曲線を計算で求めて描いたのが太い方の曲線である。

2　ヨットで風上へ

次は、ヨットで風上へもっとも速く行くにはどうすればよいかという問題（[2]の問題92）を考えよう。これも有名な問題で、[5]にも取り上げられている。

現実のヨットの帆は平面ではなく曲面であり、その帆走の原理は流体力学に基づいている。「流体中の圧力は流速が増すにつれて減少する」というベル

ヌーイの定理に基づいているのだ。さらに、ヨット（あるいは、セーリングボート）では、通常メイン・セールとジブ・セールという２枚の帆が用意されていて、ベンチュリー効果なるものも期待できるようだ。詳しいことについては[1]を参照せよ。ここでは非常に単純化して、

- ヨットの帆は１枚で、しかも平面である

と仮定する。そうしないと、簡単には解析ができない。また、ヨットには横流れを防ぐため、竜骨（キール）を突き抜けて水中にセンターボードというのが出ている（図４）。ヨットは、センターボードに圧力がかからない方向にしか動けない、つまり、

- ヨットの向きの前後方向にしか動けない

と仮定する。さらに、海流の影響もまったく考えないこととする。

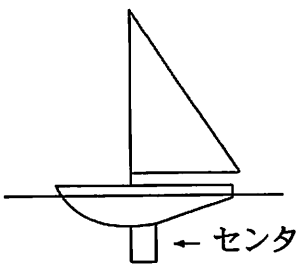

図４：ヨット

風の中を風上に向かって進むとき、ヨットはまっすぐ風上に向かって進むことはできない。しかし、ジグザグに風上の方に進むことはできる。ジグザグに風上に向かうことを、ヨット用語ではタッキング（tacking）と呼ぶようだ。その場合の、「ジグ」または「ザグ」で進んでいる状態を「タック」（tack）とか「タックの状態」という。日本語では「間切る」とも言うようだが、風を斜めに受けて一定方向に帆走している状態のことである。

では、問題をもう一度述べよう。風が北の方から一定の速度で吹いている。この中をヨットで風上の方向に進んで行きたい。もちろん、風上の方向に真っ直ぐ進むことはできないからジグザグに風上の方を目指して進んで行くことになる。最も速く風上の方向に進むには、タックの状態ではヨットの向き、帆の向きをどう決めればよいか。これが問題である。

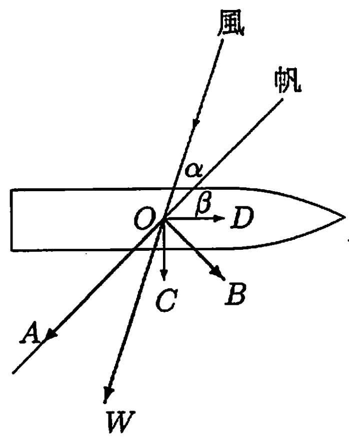

図５：帆とヨットの向き

図５のように、帆と風の向きのなす角をα、帆とヨットのなす角をβとする。風力ベクトルを$\overrightarrow{OW}$とすると、

$$\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

と、帆の方向のベクトル$\overrightarrow{OA}$と帆に垂直なベクトル$\overrightarrow{OB}$に分解でき、$\overrightarrow{OB}$だけが帆を押す力として作用する。さらに、このベクトルは

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

と、ヨットの向きに垂直なベクトル$\overrightarrow{OC}$と、ヨットの向きのベクトル$\overrightarrow{OD}$に分解できる。ヨットは横には動かないから、ヨットを動かす力として作用するのは$\overrightarrow{OD}$だけである。つまり、ヨットは$\overrightarrow{OD}$の大きさに比例した速度で前に進む。

ここで、風力ベクトルの大きさ$|\overrightarrow{OW}|$がwのとき、ヨットを進める力の大きさ$|\overrightarrow{OD}|$をw, α, βで表しておこう。まず、$\angle OWB = \alpha$であるから、

$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OW}|\sin\alpha = w \cdot \sin\alpha$$

である。また、$\angle DOB = \pi/2 - \beta$であるから、

$$|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OB}|\sin\beta = w \cdot \sin\alpha\sin\beta$$

となる。従って、$\sin\alpha\sin\beta$が大きければ大きいほどヨットは速く進むことになる。

目標は、風上のほうに速く行くことであるから、さらに$\overrightarrow{OD}$の風上方向の成分をとる必要がある。ベクトル$\overrightarrow{OD}$の風上方向の成分の大きさは

$$|\overrightarrow{OD}|\cos(\alpha+\beta) = w \cdot \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

である。従って、

$$\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) \tag{1}$$

が最大のときヨットは最も速く風上方向に進むことになる。(1) の最大値を求めるため、$\alpha+\beta = 2\theta$とおいて、まず、2θ $(0 < 2\theta < \pi/2)$の値を固定して、(1) を最大にすることを考えよう。三角関数の加法定理

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

の１番目の式から２番目の式を引いて２で割ると

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos 2\theta}{2}$$

となる。これが最大となるのは明らかに$\alpha = \beta (= \theta)$の場合である。このとき (1) は$\sin^2\theta\cos 2\theta$となる。今度は$\theta$を動かしてこの値を最大にする。

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sin^2\theta\cos 2\theta &= \sin^2\theta(1-2\sin^2\theta) \\ &= -2(\sin^2\theta - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8}\end{aligned}$$

となる。これが最大となるのは$\sin^2\theta = 1/4$のとき、つまり、$\sin\theta = 1/2$で$\theta = \pi/6$のときである。従って、風上へ最も速く進むには$\alpha = \beta = \pi/6$とすればよいことがわかる。

参考文献

[1] 浅見、宮下、渡辺　編、「現代体育・スポーツ体系 15 －ボート、カヌー、ヨット、水上スキー、サーフィン、ウインドサーフィン」、講談社　1984.

[2] Heinrich Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*,

[3] 服部四士主、「自転車の科学；メカから乗り心地まで」、講談社ブルーバックス 1982.

[4] Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which ways did the bicycle go?*, MAA, 1996. Dover, New York 1965.

[5] Ivan Niven, *Maxima and Minima Without Calculus*, MAA 1981.

[6] 渡辺茂、「自転車の科学」、ごま書房　1974.