モーターボートと潮流

前原　潤 | Maehara Hiroshi

1　潮流の速さ

海岸沿いのリゾートホテルで海を見ながら昼食をとるのはなかなか気持ちがいいものだ。夏だと、ウインドサーフィンや水上スキーをしているのが見られる。こういうのを見るたびに、生まれ変わったらスポーツマンになってサーフィンや、水上スキーなどを楽しみたいものだと思う。

最近はモーターボートを持つ人が多くなってきた。モーターボートにはスピードメーターがついているのもある。潮流で海面が動くから、スピードメーターには対水速度が表示される。単位はノット。1ノットが時速1海里で、時速1852メートルに相当する。対水速度というのは、水面が静止していると、対地速度（ground speed, 単位時間内の実際の移動距離）に等しいが、潮流がある場合には、対地速度とは異なる。例えば、潮流の速度が5ノットのとき、対水速度10ノットで、潮流と反対向きに進むと対地速度は5ノットになり、潮流と同じ向きに進むと対地速度は15ノットになる。

ボートを持っている人はたいてい GPS (global positioning system) というのも備えていて、これで距離やスピードが計算できるから、モーターボートにスピードメーターは必要ないという人もいる。

大きく入り込んだ美しい湾の沖に3つの島 A, B, C がある。これらの島の間には、満潮時から干潮時（および、干潮時から満潮時）にかけて4時間くらいの間、向きと速さが一定の潮流が生ずる。つまり、満潮の1時間くらい後から、3つの島の付近に潮流が生じ、この潮流の向きと速さは、3つの島の付近のいたるところで同じであり、しかもその状態が4時間くらいも続くのだ。

潮流があると、その影響でボートは同じ対水速度で進んでも、進む方向によって、単位時間での移動距離は変化する。ボートの（対地）速度ベクトルは、対水速度ベクトル $\vec{v}$ と、潮流の速度ベクトル $\vec{w}$ の合成 (和) となる (図1)。

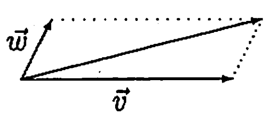

図1：速度ベクトルの合成

島 A, B, C の付近で生ずる潮流の速さを測るため、満潮の1時間くらい後、潮流の速度が一定になってから、島 A と B の間をモーターボートで往復することにした。潮流の向きも速さも正確には未知なので、2つの未知数の値を決定するのに一般には2

つの式が必要となる。それで、A, B の間を往復することにしたのだ。

A, B の間の距離は6海里である。A から B に行くときも B から A に戻るときも、スピードメーターの値を10にして（対水速度を10ノットで）直線コースで往復した。行きは30分かかり、帰りは50分かかった。潮流の速さはどのくらいだろうか？

図2：ボートの速度ベクトル

A から B へ行くときのボートの速度ベクトルを $\overrightarrow{OP}$ で、B から A に戻るときのボートの速度ベクトルを $\overrightarrow{OQ}$ で表わす（図2）。この2つは反対向きのベクトルで、大きさが、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OP}| &= \frac{6}{30/60} = 12 \\
|\overrightarrow{OQ}| &= \frac{6}{50/60} = 7.2
\end{aligned}
$$

（単位はノット）である。速度ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は、潮流の速度ベクトルと大きさ10のある対水速度ベクトル $\vec{v}_1$ の和であり、$\overrightarrow{OQ}$ も、潮流の速度ベクトルと大きさ10の別のある対水速度ベクトル $\vec{v}_2$ の和である。従って潮流の速度ベクトルを $\overrightarrow{OW}$ とすると、

$$
\overrightarrow{OP} = \vec{v}_1 + \overrightarrow{OW}, \quad \overrightarrow{OQ} = \vec{v}_2 + \overrightarrow{OW}
$$

である。よって

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{WP} \\
\vec{v}_2 &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{WQ}
\end{aligned}
$$

となる。2つの対水速度ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ はいずれも大きさが10であるから、$|\overrightarrow{WP}| = |\overrightarrow{WQ}| = 10$ で、W は線分 PQ の垂直2等分線上の点であることがわかる。PQ の中点を M とすると、$QM = PM = (7.2 + 12)/2 = 9.6$ となる（図3）。

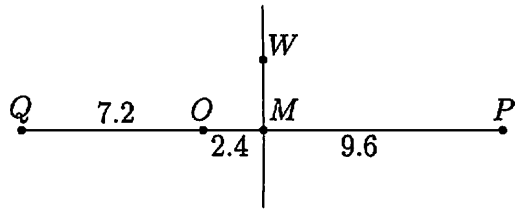

図3：垂直2等分線上の点 W

図3から、

$$
\begin{aligned}
10^2 = PW^2 &= PM^2 + MW^2 \\
&= 9.6^2 + MW^2
\end{aligned}
$$

となり、$MW = \sqrt{7.84}$ となることがわかる。従って $OW^2 = 7.84 + 2.4^2 = 13.6$ である。ゆえに、潮流の速度ベクトルの大きさは

$$
|\overrightarrow{OW}| = \sqrt{13.6} \approx 3.7
$$

となる。

2 島の間の距離

島 A と B の間の距離は6海里とわかっていたが、島 B と C の間の距離ははっきりしなかったので、潮流の速度を測るとき、別のボートで島 B と C の間も往復した。このボートは行きも帰りも、対水速度15ノットで進んだ。行きは50分かかり、帰りは60分かかった。潮流の速さは、3.7ノットとして、B, C 間の距離を求めてみよう。

先ほどと同じように、B から C に向かうときの速度ベクトルを $\overrightarrow{OX}$ で、C から B に

向かうときの速度ベクトルを$\overrightarrow{OY}$で表わす。BC間の距離をxとすると、

$$|\overrightarrow{OX}| = 60x/50 = 1.2x, \quad |\overrightarrow{OY}| = x$$

である。また、潮流の速度ベクトルを$\overrightarrow{OW}$とすると、点Wは線分XYの垂直2等分線上にある。線分XYの中点をMとすると、

$$\begin{aligned} XM &= \frac{1.2x + x}{2} = 1.1x, \\ OM &= 1.1x - x = 0.1x \end{aligned}$$

である。$MW = y$とおくと、

$$\begin{aligned} 15^2 &= XM^2 + MW^2 = (1.1)^2x^2 + y^2 \\ 3.7^2 &= OM^2 + MW^2 = (0.1)^2x^2 + y^2. \end{aligned}$$

これから、

$$15^2 - 3.7^2 = (1.1^2 - 0.1^2)x^2.$$

従って

$$x = \sqrt{\frac{15^2 - 3.7^2}{1.1^2 - 0.1^2}} \approx 12.16$$

となり、島BとCの間の距離は12.16海里であることがわかる。

潮流の速さがわかっているとき、島BとCの距離は、B, C間の行きと帰りを、異なる対水速度で進んでも求めることができる。ただ、往復とも同じ対水速度で進む場合に比べて、計算は少し複雑になる。

3 ボートの速度

モーターボートの場合、14ノットから15ノット程度のスピードで爽快感を味わえるようだ。30ノットを越すと、ボートが浮き上がる感じになるらしい。

新しい型のエンジンを搭載したモーターボートのスピードをテストするため、大洋に浮かぶ3つの島A, B, C（先ほどと同じ記号だが、違う島）を周ることにした。この3つの島は、都合よく1辺の長さが30海里の正三角形の頂点をなすように並んでいる。島の間には常に向きと速さが一定の海流がある。海流の速さ、向きは不明である。まだスピードメーターもつけてないモーターボートで、エンジンの回転を毎分3000回転にして、島AからBへ、BからCへ、CからAへと回った。島の間は直線コースで進んだが、海流の影響を受け、AB間は40分、BC間は50分、CA間は60分かかった。エンジンの回転を毎分3000回転にすると、対水速度はいくらになるだろうか？

この問題は[1]から持ってきたものだが、もともとはフォン・ミーゼス（1883 − 1953）が飛行機の最大の対空速度（air speed）を、気流の中の飛行で求めるために考えたものである。もとの問題は[2]で「フォン・ミーゼスの飛行三角形」として取り上げられていて、ジョージ・ポリア（1887 − 1985）はこの話をフォン・ミーゼス自身から直接聞いたと、述べている。フォン・ミーゼスは度数論的確率論（コレクティフの理論）を構想した数学者として知られている。

飛行機の最大対空速度を静止した空気中を飛んで調べるには、かなり広範囲での無風状態が必要である。しかし、たいてい上空には気流があるのだ。この気流は、広い範囲で向きと速さが一定であるから、互いに遠く離れた3地点を選び、その3地点をフルスピードで飛行させる。すると、要した時間を測ることで飛行機の最大対空速度が求められるというのがフォン・ミーゼスの考えたことなのだ。

さて、ボートの話に戻って、$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ で、それぞれ、A から B に向かうとき、B から C に向かうとき、C から A に向かうとき、のボートの（対地）速度ベクトルを表わすことにしよう。海流の速度ベクトルを $\overrightarrow{OW}$ とする（図4）。

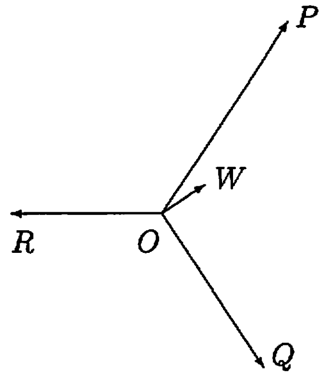

図4：ボートの速度ベクトル

ΔABC のどの辺を進むときもボートのエンジンの回転数は同じだから、対水速度ベクトルの大きさは同じと考えてよい。従って、これまでの場合と同様に、$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ はいずれも、海流の速度ベクトル $\overrightarrow{OW}$ と大きさが一定の対水速度ベクトルの和である。よって

$$|\overrightarrow{WP}| = |\overrightarrow{WQ}| = |\overrightarrow{WR}|$$

となり、W は ΔPQR の外接円の中心であることがわかる。この外接円の半径がボートの対水速度となる。ボートが ΔABC の3辺を進むときの速度ベクトルの大きさは、それぞれ、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \frac{30}{40/60} = 45 \\ |\overrightarrow{OQ}| &= \frac{30}{50/60} = 36 \\ |\overrightarrow{OR}| &= 30 \end{aligned}$$

であり、$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ の中のどの2つのベクトルのなす角も ΔABC の外角に等しく、120度である。従って、余弦定理によって辺 PQ, QR, RP の長さは次のようになる。

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{4941} \approx 70.3 \\ QR &= \sqrt{3276} \approx 57.2 \\ RP &= \sqrt{4275} \approx 65.1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\cos\angle P = \frac{4275 + 4941 - 3276}{2 \cdot \sqrt{4275}\sqrt{4941}} \approx 0.646$$

となり、

$$\sin\angle P = \sqrt{1 - \cos^2\angle P} \approx 0.763$$

となる。また、正弦定理により、ΔPQR の外接円の直径は

$$\frac{QR}{\sin\angle P}$$

に等しいから、その半径は

$$\frac{57.2}{2 \times 0.763} \approx 37.46$$

となる。つまり、エンジンの回転数を毎分3000回転にしたときのボートの対水速度は約37.46ノットである。

この例では、3つの島 A, B, C が正三角形の頂点をなすように並んでいる場合を考えたが、これは単に計算を簡単にするためである。島 A, B, C が正三角形の頂点でなくても、一直線上に並んでなければ、ボートの対水速度を余弦定理と正弦定理を用いて計算することができる。

参考文献

[1] P. フランクル＋前原濶、やさしい幾何学問題ゼミナール、共立出版、1992

[2] G. Pólya, *Mathematical Method in Science*, MAA, 1977.