探検隊の問題

前原 潤 | Maehara Hiroshi

1 奥地の探検

「探検隊が基地から210キロメートル離れた密林の奥地を探検することになった。隊員が1日に進むことができる距離は20キロである。各隊員は10日分の食料しか持てない。途中で待機する場合であっても、10日分を超す食料を手許に置くことはできない。

1人で行ったのでは、5日間進んで引き返すしかないから、100キロの奥地までしか行くことはできない。しかし、隊員が大勢いれば、先に帰る隊員が余分な食料を他の隊員に渡すとか、基地にいる隊員が帰ってくる隊員の救援に出かけるなど、いろいろ工夫することによって、何人かの隊員に目的地を往復させることができるであろう。

最小限何人の隊員がいれば、少なくとも1人の隊員に210キロの奥地を往復させることができるか。ただし、食料を途中に放置して後で利用することはできない。」

これはかなり前に先輩のM教授から聞いた問題の条件や数値を少し変えたものである。M教授はもとの問題をある有名な数学者から聞いたということであった。

この問題を考える前に、さらにいくつかのことをはっきり決めておこう。

(1) 目的地に通ずるルートは1本しかなく、各隊員はそこを通る。

(2) 各隊員は食料を連続的に消費する。たとえば、$\frac{1}{5}$日の間に、1日分の食料の$\frac{1}{5}$を消費する。

(3) 各隊員は1日20キロの速度で進むか、待機するかのどちらかである。

(4) 目的地に行くのは1人である。

2 逆計画

奥地探検のための実行可能な(つまり、隊員の食料が途中で途切れない)計画ができているとしよう。この探検計画を、時間を逆にして、探検の終了時$t=c$から探検の開始時$t=0$へ向かってたどって見る。すると、時間を逆向きに見た計画も、奥地探検の実行可能な計画とみなせるのだ。ただし、もとの計画で、ある隊員が時刻tにおいて$f(t)$日分の食料を携帯しているなら、時間を逆にした計画では、時刻$s=c-t$におけるその隊員の食料の携帯量を$[10-f(t)]$日分としなければならない。それだけの変更をすれば、この時間を逆向きにした計画は、隊員の食料供給に何の不備も生ずることがなく、奥地探検のための実行可能な計

画とみなすことができる。これをもとの計画の逆計画と呼ぶことにする。

目的地まで行って帰ってくる隊員を A とする。(4) により、目的地には1人しか行かないから、A が目的地から帰ってくるとき、A を後ろから追ってくる隊員はいない。よって、帰路にある A が目的地の方に引き返す必要はない。他の隊員にも、A とすれ違ってさらに遠くまで行く必要はない。従って A を後ろから追いかけてくる救援隊もいない。A を出迎える救援隊がいるとすれば、それは前方から来るのだ。A はどんどん進んで行けば、いずれ救援隊に出会うから、救援隊を待つ必要もない。

待たずに進んだとき、救援隊に出会う前に A の食料が尽きてしまうのであれば、待機していても救援隊が来る前に A の食料は尽きてしまうのだ。探検計画で、A が目的地から帰る途中で救援隊を待つことになっているなら、A が待機する代わりに、救援隊が待機するように計画を変更できる。

また、A が帰るとき、他の隊員は A より遠方に行く必要はなかったから、A より遅く戻る隊員もいないと仮定してよい。従って、「A は最後に基地に戻る隊員（のひとり）であり、目的地から基地へ1日20キロの速度で戻ってくる」ように計画が立てられていると仮定してよい。

逆計画を考えることによって、「A は基地を出発する最初の隊員（のひとり）であり1日20キロの速度で目的地に向かうと仮定してよい。よって次のように仮定してよいことがわかった。

(5) 目的地に行く隊員は、基地を最初に出発し、基地に最後に戻る。探検を完了するのに必要な最小日数は、目的地までの距離の往復にかかる日数であり、探検に参加する隊員の人数には関係がない。

3 双対問題

はじめの問題を考えるために、その双対問題である次の問題を考えよう。「探検に参加できる隊員の数が n 人のとき、基地から最大何キロ離れた奥地まで行って戻ってくることができるだろうか。」1日に進める距離や食料の携帯制限などはもとの問題と同じである。最長の到達距離を $d(n)$ で表す。明らかに $d(1) = 100$ である。

複数の隊員で探検を実行する場合、次の2つを仮定してよいことを示そう。

(6) 最初に基地を出発した隊員たちの一部が途中で基地へ引き返すとき、基地へ引き返す方は、残りの隊員たちの食料をすべて10日分に補填する。

(7) 最後に基地へ戻る隊員たちは、持っている食料がまだ残っているうちに迎えに来た救援隊に出会うことはない。

まず、(7) の方から考えよう。最後に基地に戻る隊員たちの食料がまだ残っているうちに、迎えに来た救援隊に出会うとする。この場合、救援隊は、少し手前の方の、戻ってくる隊員たちの食料がちょうど尽きる地点で待機しておくことができる。従って、(7) を仮定してよい。また、逆計画を考えることによって、(6) も仮定してよいこともわかる。

2人の隊員 A, B だけで探検を実行する場合は、次のような方法しかない。2人一緒に出発し、B は途中で、食料の一部を A に渡して基地に引き返す。A は、そこから往復できる最大距離の奥地まで行って帰って

くる。その間に、基地に戻った B は食料を補給して、別れた地点まで A を迎えに行く。

この方法で最も遠くまで行くためには、B は $\frac{10}{3}$ 日で引き返せばよい。従って、$d(2) = 100 + \frac{200}{3} = 200(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 166.66...$ となる。

参加隊員が 3 人の場合、図 1 で示されるような計画から、$d(3)$ は $20 \times 10 = 200$ 以上であることがわかる。図 1 の文字 A, B, C の上方にある点は、隊員 A, B, C が折り返す時点（日時と基地からの距離）を示している。

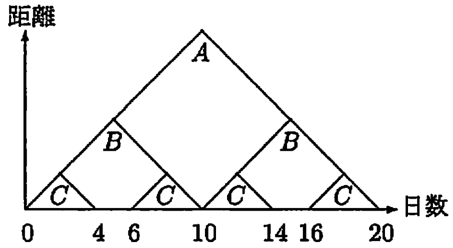

図 1: 隊員 A, B, C の行程

図 1 に示された計画では、隊員 C は 4 回も基地を出るが、毎回、2 日〜4 日分の食料を余らせて戻ってくる。C の食料や時間にはまだ余裕がある。もっと工夫すると A はもう少し遠方まで行けるだろうか？

4　3 人の場合

実は $d(3) \leq 200$ なのである。これを示すため、$d(3) = \delta > 200$ と仮定せよ。すると、3 人の隊員 A, B, C で組織する探検隊で基地から δ 離れた奥地 Z まで行ってくることができることになる。基地を U で表すと、U と Z の距離 UZ は δ で、200 より大きい。

目的地まで最小日数で行ってくる隊員を A とし、A が仲間と別れて一人で目的地に向かう地点を X、目的地から戻って始めて仲間に出会う地点を Y とする。$UX + XZ + ZY + YU = 2\delta$ である。(6) と (7) から、A は X で 10 日分の食料を持って目的地 Z に行き Y まで戻ったときちょうど食料がなくなる。よって、$XZ + ZY = 200$ であり、基地を出発して Z に行って基地に戻ってくるまでの行程は 2δ で 400 を超すから、$UX + YU > 200$ である。必要なら、逆計画を考えることにより、$UX > 100$ と仮定してよい。

地点 X で A と別れる隊員を B とする。B は A と別れるとき、(6) により、A の食料が 10 日分になるように補填するから、A, B の 2 人だけで基地を出発したのでは、X で引き返すことはできない。従って、A, B, C の 3 人で一緒に基地を出発し、ある地点 V で C が先に基地に引き返すことになる。

地点 V で C は、(6) により、A, B の食料を 10 日分ずつになるように補填して引き返すから、V は基地から $\frac{10}{4}$ 日以内に行ける距離にある。よって、$UV \leq 50$ であり、$VX = UX - UV > 50$ である。従って、V から X に行くまでに、A, B 2 人で、合計 5 日分を超す食料を消費する。地点 X で A と別れるとき、B は A の消費分を補填するから、別れた後の B の食料は 5 日分より少ない。従って、B には A と別れてから 5 日経過する前に C の救援を受ける必要がある。

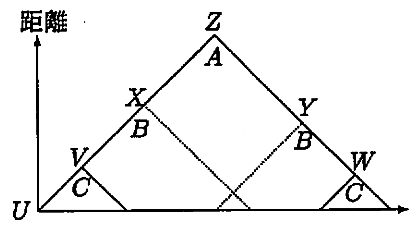

図 2: U, V, W, X, Y, Z は地点名

B が救援に来た C とともに基地にもどってから、B または C（あるいは両人）が A を迎えに行くとすると、$XU + UY > 200$

だから、地点YでAを迎えるのには間に合わない。従ってB,Cが出会ってから、B,Cの一方、たとえばBがそのままAを迎えにYに行くことになる。図2を参照せよ。

Aが救援にきたBと出会い、地点Yから一緒に基地に戻るとき、2人の救援にきたCに出会う地点をWとする。Cが救援に来なければ$W=U$である。(7)により、Cに出迎えられるとき、A,Bの食料は尽きているから、Cの持っている食料だけで、3人がWから基地に帰ることになる。ゆえに、Wは基地から$\frac{10}{4}$日以内で行ける距離にあり、$UW \leq 50$である。

$UZ+ZU>400$で、$UV+WU \leq 100$だから、$VZ+ZW>300$となる。従って、AがVから目的地を経由してWに着くまでにかかる日数は15日を超える。よって、この間に、A,Bの2人が消費した食料は合わせて30日分を超える。ところが、A,Bの2人がVで持っていた食料は、合わせて20日分で、途中でBがCから受け取る食料は10日分に満たないから、全部合わせても30日分に満たない。従って、この探検は不可能であり、$d(3) \leq 200$であることがわかる。

一方、200キロ離れた奥地まで行くのは、図1に示された計画で可能だから、$d(3)=200$となる。

5　4人以上の場合

図3は4人の隊員で245キロ離れた奥地まで到達できる探検計画（の半分）を示している。A,B,C,Dの4人が同時に出発し、D,C,B,Aの順に折り返してくる。Bは救援に来たCに出会ってから、Dが来るのを$\frac{1}{3}$日の間待ち、食料を10日分に補充してそのまま、Aの救援に向かう。この探検計画が実行可能であることは食料が途切れないことをチェックすることで確かめられる。よって、$d(4) \geq 245$である。従って、はじめの問題の答えは4人となる。

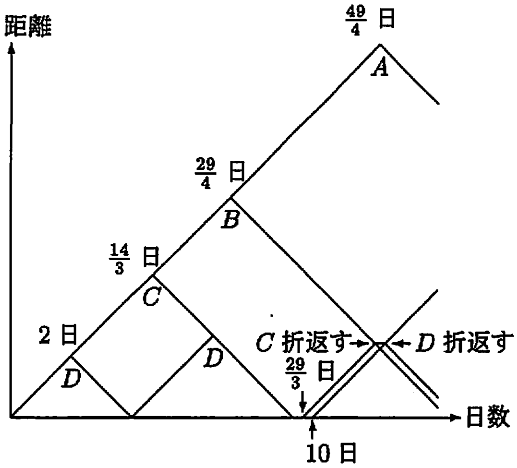

図3：A,B,C,Dの行程

少し複雑ではあるが、$d(3)=200$を示したのと同じような方法で、$d(4)=245$となることを示すことができる。$n \geq 5$の場合、$d(n)$の正確な値を求めるのは難しい。

探検に参加する隊員の人数を増やしていけば、いくらでも遠くまで行って来ることができる。実際、$n=2^k$のとき、

$$\begin{aligned} d(n) &> 200\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}\right) \\ &> 200 \cdot \ln \log_2 n \end{aligned}$$

を示すのは難しくない。また、条件(6)(7)を用いて、

$$\begin{aligned} d(n) &< 200\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}\right)+100 \\ &< 200 \cdot \ln n + 100 \end{aligned}$$

を示すことができる。ゆえに

$$200 \cdot \ln \log_2 n < d(n) < 200 \cdot \ln n + 100$$

となる。