開放マクロ経済の最適収支動学

第１部

対外債務と資本のモデル

第１章　「小国開放経済の新古典派成長モデルにおける財政収支、経常収支そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」

１．はじめに

近年の国際マクロ経済学の分析は動学的最適化の手法が主流となり、多くの文献で経常収支動学（Current Account Dynamics）の分析が試みられてきた。その際近年における政府部門の役割は、ケインズ経済学が後退したといえども、無視できないものであるにもかかわらず、政府部門が無視されたり、財政収支についてはその均衡が仮定されることがしばしばである。この財政収支均衡の仮定が単なる仮定であるか、あるいは最適条件から導出されるものであるかという問題は、それらの分析においてきわめて重要である。そこで本論文では、政府部門を明示的に含んだ小国開放経済の新古典派成長モデルを用いて、社会的に最適な財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。その分析の結果として均衡財政が最適条件より導出されれば、その仮定が動学的最適化の分析において意義あることの、ひとつの証明となるであろう。

我々は、Blanchard and Fischer（1989）で用いられているモデルに政府部門を導入し、社会的に最適な財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。第２節ではモデルについて説明し、第３節では投資の調整費用が存在しないケースを分析し、第４節ではそれが存在するケースを分析し、第５節では結論をまとめることにする。

2. モデル

中央計画当局が第0期における代表的家計の厚生を、制約条件の下で最大化することを仮定する。代表的家計の瞬時的効用関数は

$$u_t = u(c_t,\ g_t) \tag{2.1}$$

である。c_t は消費であり、g_t は政府支出である[1]。右下の添字 t は時間を示している。この効用関数は非負であり、強い凹関数であって

$$0 < u_1,\ u_2 \qquad u_{11},\ u_{22} < 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} > 0,\ u_{12} = u_{21}$$

を仮定する[2]。無限期間モデルを仮定すると、代表的家計の厚生は、それの消費と政府支出の効用の総現在価値となり、

$$\int_0^{\infty} u(c_t,\ g_t)e^{-\theta t}dt \tag{2.2}$$

となる。θ は時間選好率あるいは主観的割引率であり、所与の正の値をとると仮定する。制約条件は、対外債務ストック、資本ストック、そして政府債務（=国債）ストックの各々と、フローの変数の関係を示す式であり、

$$\dot{F}_t = c_t + i_t + g_t + \theta F_t - f(k_t) \tag{2.3}$$

$$\dot{k}_t = i_t \tag{2.4}$$

$$\dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_t \tag{2.5}$$

である。F_t は対外債務ストック、k_t は資本ストック、B_t は政府債務ストックであり、対外取引は対外債務ですべて決済され、政府債務はすべて国内で取引される。i_t は純投資であり、τ_t は一括税であって所与と仮定する。$f(k_t)$ は生産関数であり、国民所得に相当し、非負で強い凹関数であって、稲田条件

$f(0)=0,\ f'(0)=\infty,\ f'(\infty)=0$

を満足する。小国の仮定より自国利子率と外国利子率は所与で等しく、またθと等しいと仮定する[3]。

我々の解くべき動学的最適化の問題は、以下のようにまとめられる。

$$\max\int_0^\infty u(c_t,\ g_t)e^{-\theta t}dt$$

$$s.t.\ \dot{F}_t=c_t+i_t+g_t+\theta F_t-f(k_t)$$

$$\dot{k}_t=i_t$$

$$\dot{B}_t=g_t+\theta B_t-\tau_t$$

$$F_0,\ k_0,\ B_0 \text{ given},\ \tau_t=\tau_0=const.$$

$$c_t,\ i_t,\ g_t,\ F_t,\ k_t,\ B_t,\ \tau_t\geqq 0 \text{ for all t}$$

制御変数は$c_t,\ i_t,\ g_t$であり、状態変数は$F_t,\ k_t,\ B_t$である。各々の変数は1人当たりのものであるが、人口成長はないものと仮定し、現時点（0時点）での人口を1とする。また以下の分析では特に必要を認めない限り、右下の添字tは省略する。

3．投資の調整費用が存在しないケース

このケースにおけるハミルトニアンは、$-\alpha,\ \beta,\ \gamma$を共役変数とすると

$$H=u(c,\ g)-\alpha\{c+i+g+\theta F-f(k)\}$$
$$+\beta i+\gamma(g+\theta B-\tau)$$

である。最適のための条件は

$$\frac{\partial H}{\partial c}=0 \qquad \therefore u_1=\alpha \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \qquad \therefore \alpha = \beta \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \qquad \therefore u_2 = \alpha - \gamma^{4)} \quad (3.3)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha\theta + \frac{\partial H}{\partial F} = 0 \qquad \therefore \alpha = \text{const.} \quad (3.4)$$

$$\dot{\beta} = \beta\theta - \frac{\partial H}{\partial k} = \beta\theta - \alpha f' \quad (3.5)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma\theta - \frac{\partial H}{\partial B} = 0 \qquad \therefore \gamma = \text{const.} \quad (3.6)$$

$$\lim_{t \to \infty}(-\alpha F)e^{-\theta t} = 0 \quad (3.7)$$

$$\lim_{t \to \infty}\beta k e^{-\theta t} = 0 \quad (3.8)$$

$$\lim_{t \to \infty}\gamma B e^{-\theta t} = 0 \quad (3.9)$$

となる。α と γ が一定の値となるので、c と g は一定の値となり、また α と β が等しいことより

$$\dot{\beta} = \beta\theta - \alpha f' = \alpha(\theta - f') = 0$$

となり、

$$\theta = f'$$

となるので、k も一定の値となる。よって i はゼロとなる。以上の結果をまとめると

$$c,\ g,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ k = \text{const.},\ i = 0$$

となる。これにより財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析が可能となる。

財政収支を BB_t、経常収支を CA_t、貿易収支を TB_t とすると

$$BB_t = \dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_0$$

$$CA_t = -\dot{F}_t = f(k_t) - c_t - i_t - g_t - \theta F_t$$
$$TB_t = f(k_t) - c_t - i_t - g_t$$

となる。最初に財政収支の動学分析を行う。
財政収支の式より

$$\dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_0$$

として、両辺を積分すると

$$B_0 = \int_0^{\infty} (\tau_0 - g_t) e^{-\theta t} dt \tag{3.10}$$

が求められる[5]。g_t が一定であるので、$g_t < \tau_0$ のとき累積財政黒字が無限大となり、$\tau_0 < g_t$ のとき累積財政赤字が無限大となる。よって（3.10）式と横断面の条件より

$$\tau_0 = g_t = g_0 = \text{const.}\ ,\ B_0 = 0$$

となり、今期（0期）以前から一貫して財政収支が均衡している状態が社会的に最適となる。次に経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。経常収支の式より、

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

として両辺を積分すると

$$F_0 = \int_0^{\infty} TB_t e^{-\theta t} dt \tag{3.11}$$

が求められる[6]。k_t, c_t, g_t が一定で i_t がゼロであるので、$0 < TB_t$ のとき累積貿易黒字が無限大となり、$TB_t < 0$ のとき累積貿易赤字が無限大となる。よって（3.11）式と横断面の条件より

$$TB_t = TB_0 = 0,\ F_0 = 0$$

となり、今期（0期）以前から一貫して経常収支も貿易収支も均衡している状態が社会的に最適となる。

4．投資の調整費用が存在するケース

このケースにおけるハミルトニアンは、$-\lambda$, λq, γ を共役変数とすると

$$H = u(c,\ g)-\lambda\{c+i[1+\phi]+g+\theta F-f(k)\}$$
$$+\lambda qi+\gamma(g+\theta B-\tau)$$

である。ϕ は投資の調整費用であり

$$\phi = \phi(i/k),\ \phi(0) = 0,\ 0 < \phi',\ \phi''$$

である。最適のための条件は

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad \therefore u_1 = \lambda \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \qquad \therefore q = 1+\phi+\frac{i}{k}\phi' \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \qquad \therefore u_2 = \lambda-\gamma^{7)} \quad (4.3)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda\theta+\frac{\partial H}{\partial F} = 0 \qquad \therefore \lambda = \text{const.} \quad (4.4)$$

$$(\dot{\lambda q}) = \lambda q\theta-\frac{\partial H}{\partial k} \quad (4.5)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma\theta-\frac{\partial H}{\partial B} = 0 \qquad \therefore \gamma = \text{const.} \quad (4.6)$$

$$\lim_{t\to\infty}(-\lambda F)e^{-\theta t} = 0 \quad (4.7)$$

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda qk)e^{-\theta t} = 0 \quad (4.8)$$

$$\lim_{t\to\infty}\gamma Be^{-\theta t} = 0 \quad (4.9)$$

となる。λ と γ が一定の値となるので、c と g は一定の値となる。また λ が一定であるので、

$$(\dot{\lambda q}) = \lambda\dot{q} = \lambda\left\{q\theta - f' - \left(\frac{i}{k}\right)^2\phi'\right\}$$

となり

$$\dot{q} = q\theta - f' - \left(\frac{i}{k}\right)^2\phi' \tag{4.10}$$

が求められる。以上より

$$c,\ g,\ \lambda,\ \gamma = \mathrm{const.}$$

の結果が得られる。これより財政収支の動学分析が可能となる。前節同様財政収支を定義して

$$B_0 = \int_0^\infty (\tau_0 - g_t)e^{-\theta t}dt$$

が求められる。g_t が一定であるので、前節同様（3.10）式と横断面の条件により

$$\tau_0 = g_t = g_0 = \mathrm{const.}\ ,\ B_0 = 0$$

となり、今期（0期）以前から一貫して財政収支が均衡している状態が社会的に最適となる。

次に経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。そのためには $i,\ k,\ q$ の関係を分析しなければならない[8]。(4.2) 式より

$$q = \Psi(i/k),\ \Psi(0) = 1,\ 0 < \Psi'^{9)} \tag{4.11}$$

の関数を定義する。この逆関数を $i/k = \varphi(q)$ と定義すると

$$\dot{k} = i = k\varphi(q),\ \varphi(1) = 0,\ 0 < \varphi' \tag{4.12}$$

となる。またこの式を（4.10）式へ代入して

$$\dot{q} = q\theta - f' - \varphi(q)^2\phi' \tag{4.10'}$$

を得る。i, k, q の関係は（4.12）式と（4.10'）式の連立微分方程式の位相図を描くことにより明らかになる。定常状態（$dk/dt = dq/dt = 0$）においては

$$q^* = 1,\ \theta = f'(k^*)$$

となり、この近傍の状態を分析する。上付添字＊は均衡値を意味する。

$$\dot{k} = k\varphi(q) = F(k,\ q) = 0$$
$$\dot{q} = \theta q - f' = G(k,\ q) = 0$$

とおくと

$$\left.\frac{dq}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = -\frac{F_K}{F_q} = -\frac{\varphi(q)}{k\varphi'(q)} = -\frac{\varphi(1)}{k^*\varphi'(1)} = 0$$
$$\left.\frac{dq}{dk}\right|_{\dot{q}=0} = -\frac{G_K}{G_q} = -\frac{-f''}{\theta} = \frac{f''(k^*)}{\theta} < 0$$

となるので図４－１の様に位相図が描かれ、均衡点が鞍点になることがわかる。右下の添字はその変数による偏導関数であることを示している。また代数的にも、線形近似の式が

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k^*\varphi(1) \\ -f''(k^*) & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-k^* \\ q-1 \end{bmatrix}$$

となり、係数行列式を$\varDelta$とおくと

$$\varDelta = f''(k^*)k^*\varphi'(1) < 0$$

となることから鞍点が証明される。最適条件より k, q は安定経路上を移動し、k の値が均衡値より小さい場合には、k が増加して q が減少して i が正、大きい場合には k が減少して q が増加して i が負となる。経常収支と貿易収支は

$$CA_t = -\dot{F}_t = f(k_t) - c_t - i_t\left[1+\phi_t\right] - g_t - \theta F_t$$

$$TB_t = f(k_t) - c_t - i_t\left[1+\phi_t\right] - g_t$$

と定義され、前節同様

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

とおくと

$$F_0 = \int_0^\infty TB_t e^{-\theta t} dt$$

の（3.11）式が求められる。この式は対外債務の初期値によって、貿易収支の動学が制約されることを意味している。i が正のケースに限定すると、貿易収支の動学は図４－２の様になる。$f(k) - i\left[1+\phi\right]$ の値は、時間の経過とともに k の値が増加してゆくと、$f(k)$ の値が大きくなり、ϕ の値が小さくなるので増加し、$c+g$ の値は一定なので、社会的に最適な貿易収支は最初は赤字、その後黒字となる。（3.11）式より、累積貿易黒字の大きさは対外債務の初期値により制約される。我々のモデルでは経常収支の動学は分析できない。

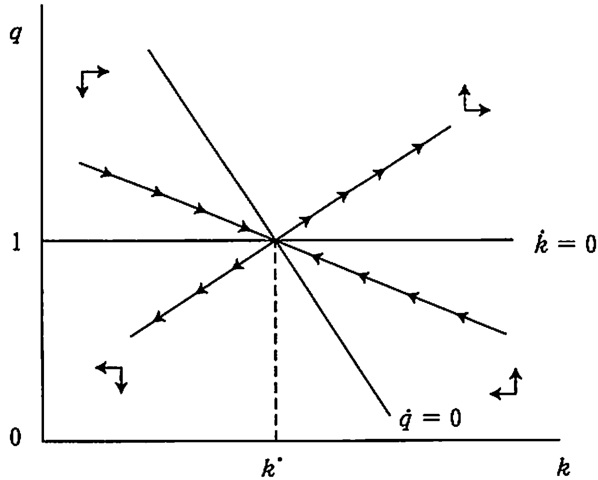

図４－１

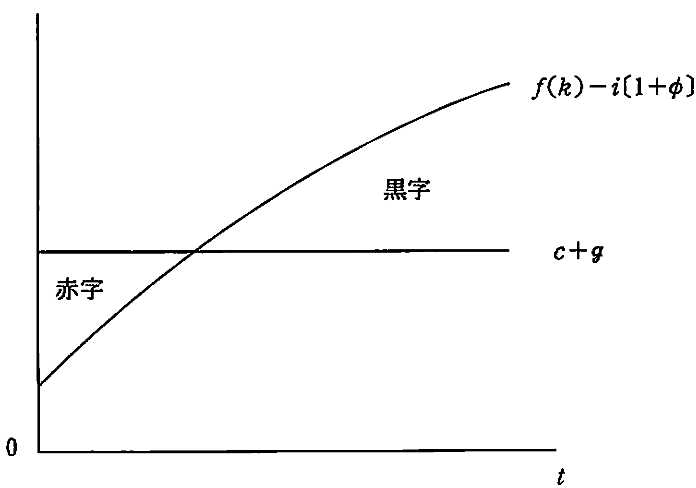

図４－２

5．おわりに

我々のモデルにおける分析結果は以下の様にまとめられる。

（Ⅰ）投資の調整費用が存在しないケース

　ｉ）財政収支均衡

　ⅱ）経常収支及び貿易収支均衡

（Ⅱ）投資の調整費用が存在するケース

　ｉ）財政収支均衡

　ⅱ）貿易収支は赤字から黒字へ（純投資正）

投資の調整費用の有無にかかわらず、社会的に最適な財政収支の状態は、常に均衡している状態であることが証明された。一括税が所与という仮定は、それが政策変数であり初期値が与えられると考えれば、この結論の一括税のモデルでの一般性は高まるであろう。一括税のモデルにおける財政収支均衡の仮定は、最適条件に裏付けられた根拠のある仮定であることが示されたことになる。また、投資の調整費用の有無により、社会的に最適な経常収支と貿易収支の動学が異なってくることも、興味深い結論である。今後の課題としては、定率税のケース、内生的成長モデルのケースが考えられるだろう。

数学付録１

$$\dot{B}_t = g + \theta B_t - \tau_0$$

の両辺に $e^{-\theta t}$ をかけて積分すると

$$\int_0^{\infty} \dot{B}_t e^{-\theta t} dt = \int_0^{\infty} (g_t - \tau_0) e^{-\theta t} dt + \int_0^{\infty} \theta B_t e^{-\theta t} dt$$

となる。左辺に部分積分の公式を適用すると

$$\int_0^\infty \dot{B}_t e^{-\theta t} dt = \left[B_t e^{-\theta t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty B_t(-\theta e^{-\theta t}) dt$$

$$= 0 - B_0 + \int_0^\infty B_t \theta e^{-\theta t} dt$$

となるので

$$B_0 = \int_0^\infty (\tau_0 - g_t) e^{-\theta t} dt$$

が求められる。

数学付録２

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

の両辺に $e^{-\theta t}$ をかけて積分すると

$$\int_0^\infty \dot{F}_t e^{-\theta t} dt = -\int_0^\infty TB_t e^{-\theta t} dt + \int_0^\infty \theta F_t e^{-\theta t} dt$$

となる。左辺に部分積分の公式を適用すると

$$\int_0^\infty \dot{F}_t e^{-\theta t} dt = \left[F_t e^{-\theta t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty F_t(-\theta e^{-\theta t}) dt$$

$$= 0 - F_0 + \int_0^\infty F_t \theta e^{-\theta t} dt$$

となるので

$$F_0 = \int_0^\infty TB_t e^{-\theta t} dt$$

が求められる。

注

1）我々のモデルは合成財のモデルであり、民間部門と政府部門の供給する財は同質である。

2）$u_1 = \partial u/\partial c_t$, $u_2 = \partial u/\partial g_t$, $u_{11} = \partial^2 u/\partial c_t^2$, $u_{22} = \partial^2 u/\partial g_t^2$
$u_{21} = \partial^2 u/\partial c_t \partial g_t$, $u_{12} = \partial^2 u/\partial g_t\, \partial c_t$ である。

3）利子率が θ より小さければ、最適消費と最適政府支出はゼロに収束し、大きければプラス無限大に発散する。

4）$0 < u_2$ より $\gamma < \alpha$ である。

5）導出方法は数学付録１を参照。

6）導出方法は数学付録２を参照。

7）$0 < u_2$ より $\gamma < \lambda$ である。

8）以下の分析方法は Blanchard and Fischer (1989) chap.2 を参照。

9）$\Psi' = 2\phi' + (i/k)\phi''$ となり、$0 < \phi', \phi''$ であるので正となる。

参考文献

足立英之（1994）『マクロ動学の理論』有斐閣

岩井克人・伊藤元重編（1994）『現代の経済理論』東京大学出版会

小野善康（1992）『貨幣経済の動学理論』東京大学出版会

河合正弘（1994）『国際金融論』東京大学出版会

須田美矢子編（1992）『対外不均衡の経済学』日本経済新聞社

竹中平蔵・小川一夫（1987）『対外不均衡のマクロ分析』東洋経済新報社

津曲正俊（1993）『経済成長理論の新展開』三菱経済研究所

西村清彦（1990）『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会

村田安雄（1990）「経常収支変動の異時点分析－無限期間モデル－」『関西大学経済論集』第40巻第１号，51－76

────（1994）『現代マクロ経済学（新版）』有斐閣

山口利夫（1994）『最適成長理論とカオス動学の基礎』三菱経済研究所

Barro, R. J. (1974) "Are government bonds net wealth?", *Journal of Political Economy* 82 (6), 1095-1117

——— (1990) "Government spending in a simple model of endogenous growth", *Journal of Political Economy* 98, S103-125

——— and X., Sala-i-Martin (1990) "Public finance in models of economic growth", *NBER Working Paper* No.3362

——— and ——— (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill

Bazdarich, M.J. (1978) "Optimal growth and stages in the balance of payments", *Journal of International Economics* 4, 425-443

Blanchard, O.J. and S. Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press

Devereux, M.B. and S.Shi (1991) "Capital accumulation and the current account in a two-country model", *Journal of International Economics* 30, 1-25

Frenkel, J.A. and A. Razin (1992) *Fiscal Policies and the World Economy 2nd. ed.*, MIT Press

Hayashi, F. (1982) "Tobin's marginal q and average q: a neoclassical interpretation", *Econometrica* 50 (1), 213-224

Kamien, M.I. and N.L. Schwartz (1991) *Dynamic Optimization 2nd. ed.*, North-Holland

Karayalcin, C. (1994) "Adjustment costs in investment, time preferences, and the current account", *Journal of Internatinal Economics* 37, 81-95

Matsuyama, K. (1987) "Current account dynamics in a finite horizon model", *Journal of International Economics* 23, 299-313

Petit, M.L. (1990) *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*, Cambridge University Press

Pitchford, J. (1995) *The Current Account and Foreign Debt*, Routledge

Sala-i-Martin, X. (1990) "Lecture notes on economic growth(II): five prototype models of endogenous growth", *NBER Working Paper* No.3564

Serven, L. (1995) "Capital goods imports, the real exchange rate and the current account", *Journal of International Economics* 39, 79-101

Van der Ploeg, F. (ed.) (1994) *The Handbook of International Macroeconomics*, Basil Blackwell