

533.6.011.5 : 532.542

擬似衝撃波前後の関係式について*

永 井 實**
Minoru NAGAI

1. ま え が き

管内超音速流中に発生する垂直衝撃波は、管壁境界層との激しい干渉によって、その区間の長さが管径の数倍に達する擬似衝撃波となることは良く知られている⁽¹⁾。著者らはすでにこの擬似衝撃波の区間の長さとその内部の圧力分布に関して、クロックのショックレスモデル⁽²⁾を改良した拡散モデルを提案し、実験結果をうまく説明することができた⁽³⁾。しかし、その際擬似衝撃波の上流と下流の断面に一樣な流れを仮定したために、擬似衝撃波前後の関係式は垂直衝撃波前後のそれと同一になり、とくに擬似衝撃波前後の圧力比が垂直衝撃波の理論値よりかなり低くなるという実験的事実を説明することはできなかった。また同様の現象は過膨張超音速噴流のラバルノズル出口端に発生する垂直衝撃波についても生じ、その際の衝撃波は噴流境界のせん断流層と干渉することによって擬似衝撃波となり、その前後の圧力比は管内流中の擬似衝撃波の場合よりもさらに減少することが明らかにされている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

擬似衝撃波の上流と下流に存在する流れの非一様性、とくに速度分布の影響を考慮に入れて擬似衝撃波前後の関係を明らかにしようとする試みはこれまでいくつも行われているが、いずれもめいりょうな解を得るにはいたっておらず、圧力比が垂直衝撃波の理論よりも小さくなる原因としては、速度分布の影響よりもむしろ壁面摩擦の影響が強調されているように思われる⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾。

そこで本論文は、あらためて擬似衝撃波前後に存在する流れの非一様性を考慮に入れた一般的な保存法則より、擬似衝撃波前後の関係、すなわち擬似衝撃波上流のマッハ数の関数として擬似衝撃波後流のマッハ数、擬似衝撃波前後の圧力比、温度比などを理論的に求めることを試みたものである。さらに得られた解を用いて、擬似衝撃波前後の関係におよぼす管壁境界層

の厚さの影響を明らかにし、従来の実験結果との比較検討を行うものである。

記 号

- A : 流れの断面積
 c_p : 定圧比熱
 c_f : 壁面摩擦係数
 l : 管径で無次元化された擬似衝撃波の長さ
 M : マッハ数
 p : 圧力
 T : 温度
 u : 速度
 w : クロック数 $= u/\sqrt{2c_p T_0}$
 x : 軸方向の無次元距離
 y : 半径方向の無次元距離
 α : 質量流量修正係数
 β : 運動量流量修正係数
 η : エネルギー修正係数
 $\zeta = \beta \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \eta \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$
 γ : 比熱比
 τ_w : 壁面摩擦力
- 添 字
 0 : よどみ点状態
 ∞ : 主流
 1, 2 : 擬似衝撃波の直前, 直後
 * : 音速状態
 P.S. : 擬似衝撃波
 N.S. : 垂直衝撃波

2. 理 論

図1および2に管内流中および噴流中に発生した擬似衝撃波とその前後の速度分布の概略を示す。

管内流中の場合、擬似衝撃波の前後で流れの断面積が変化せず、かつ擬似衝撃波の発生区間の壁面における摩擦およびエネルギーの授受は無視できる程小さいとすれば、断面1と2の間で質量、運動量およびエネルギー保存則がそれぞれ次式のように成立する。

* 昭和52年7月11日 第886回講演会において講演、原稿受付昭和53年7月20日。

** 正員、琉球大学工学部(〒903 那覇市首里当麻町3-1)。

$$\int \rho_1 u_1 dA = \int \rho_2 u_2 dA \dots\dots\dots (1)$$

$$\int (p_1 + \rho_1 u_1^2) dA = \int (p_2 + \rho_2 u_2^2) dA \dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} & \int \left(c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) \rho_1 u_1 dA \\ &= \int \left(c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) \rho_2 u_2 dA \\ &= c_p T_0 \int \rho_1 u_1 dA \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

式(3)の最後の項は単位時間当たりの全エンタルピ流量である。また気体を完全ガスとみなすことよって次式が成立する。

$$p_1 / \rho_1 T_1 = p_2 / \rho_2 T_2 \dots\dots\dots (4)$$

噴流中の擬似衝撃波の場合、図2に示すようにノズルより流出する流量部分を検査体積に選ぶとすれば、エントレインメントの影響によるその部分の有効断面積の変化、運動量およびエネルギーのエントレインメントへの拡散によって上述の基礎式には若干の修正が必要となるが、基本的には以下にのべる管内流の場合と同様に取扱われるものと思われる。

次に断面1および2において圧力 p はそれぞれ一定であるとみなせば、式(2)の p は積分の外に出すことができる。また式(1)~(3)にあらわれる三つの積分を、質量流量修正係数 α 、運動量流量修正係数 β およびエネルギー修正係数 η を導入することによって、それぞれ次式のようにあらわすことにしよう。

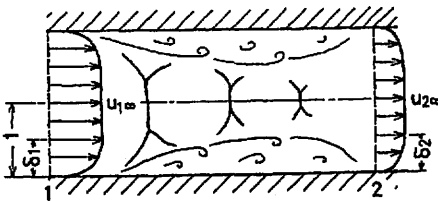


図1 管内流中の擬似衝撃波

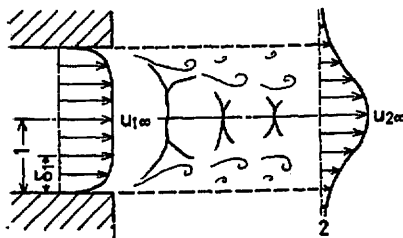


図2 過膨脹超音速噴流中の擬似衝撃波

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \int \rho u dA &= \alpha \rho_\infty u_\infty \\ \frac{1}{A} \int \rho u^2 dA &= \beta \rho_\infty u_\infty^2 \\ \frac{1}{\alpha \rho_\infty u_\infty A} \int \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) \rho u dA &= c_p T_\infty + \frac{1}{2} \eta u_\infty^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、上式の添字 ∞ は各断面の主流の諸量を示すものである。上式を用いれば基礎方程式(1)~(3)はそれぞれ

$$\alpha_1 \rho_1 u_1 = \alpha_2 \rho_2 u_2 \dots\dots\dots (1)'$$

$$p_1 + \beta_1 \rho_1 u_1^2 = p_2 + \beta_2 \rho_2 u_2^2 \dots\dots\dots (2)'$$

$$c_p T_1 + \frac{1}{2} \eta_1 u_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} \eta_2 u_2^2 = c_p T_0 \dots\dots (3)'$$

となる。ただし上式では簡単のためにあらためて添字 ∞ を省略してある。上式は $\alpha = \beta = \eta = 1$ とおくと、前後に一樣な流れが存在する垂直衝撃波の場合の基礎方程式に当然一致する。

ここで、クロック数 $w = u / \sqrt{2c_p T_0}$ を導入すれば、式(3)'の二つの等式は

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 - \eta_1 w_1^2, \quad \frac{T_2}{T_0} = 1 - \eta_2 w_2^2 \dots\dots\dots (6)$$

となる。この関係および式(4)を用いて式(2)'を書きなおすと

$$\begin{aligned} p_1 \left(1 + \beta_1 \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_1^2}{1-\eta_1 w_1^2} \right) \\ = p_2 \left(1 + \beta_2 \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_2^2}{1-\eta_2 w_2^2} \right) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。したがって擬似衝撃波前後の密度比、温度比および圧力比を式(1)', (6)および(7)より求めるとそれぞれ以下のようになることがわかる。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_1 w_1}{\alpha_2 w_2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \eta_2 w_2^2}{1 - \eta_1 w_1^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_1^2}{1-\eta_1 w_1^2} \right)}{\left(1 + \beta_2 \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_2^2}{1-\eta_2 w_2^2} \right)} \dots\dots\dots (10)$$

一方、式(4)、(8)および(9)より圧力比は

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{\alpha_1 w_1}{\alpha_2 w_2} \frac{1 - \eta_2 w_2^2}{1 - \eta_1 w_1^2} \dots\dots\dots (11)$$

と表すこともできるので、上式と式(10)より p_2/p_1 を消去すると、 w_2 に関する次の解が得られる。

$$\begin{aligned} w_2 = \frac{\alpha_2 \zeta_1}{2\alpha_1 \zeta_2 w_1} \left[w_1^2 + \frac{w_1^2}{\zeta_1} \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(w_1^2 + \frac{w_1^2}{\zeta_1} \right)^2 - 4 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \frac{\zeta_2}{\zeta_1^2} w_1^2 w_1^2} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし上式において w^* と ζ はそれぞれ

$$w^* = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \zeta = \beta \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \eta \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \dots\dots(13)$$

であり、あらたな修正係数 ζ は $\beta=1, \eta=1$ のとき $\zeta=1$ となるように定義した。式(12)の右辺における複号は、斜め衝撃波前後の関係式の場合と同様に、プラスが w_2 の弱い解にマイナスが強い解にそれぞれ相当するに思われる。

擬似衝撃波の前後における諸物理量の分布関数が与えられれば、修正係数を求めることによって、擬似衝撃波下流側の主流の無次元速度 w_2 は、上流側の主流の無次元速度 w_1 の関数として式(12)より決定せられ、さらにその結果を式(8)~(10)に代入すれば、擬似衝撃波前後の密度比、温度比、圧力比をすべて決定することができる。

3. 擬似衝撃波前後で相似の速度分布を有する場合の関係式

管内流に発生した擬似衝撃波の場合、特に十分発達した流れでは、擬似衝撃波前後で速度分布(厳密には質量流束、運動量流束およびエネルギー流束の分布)が

$$M_2^2 = \frac{2(\gamma-1)M_1^2 + 4}{[\zeta^2(\gamma+1)^2 - (\gamma-1)^2]M_1^2 - 2(\gamma-1)} \dots\dots(16)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \zeta \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \dots\dots(17)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[\{\zeta^2(\gamma+1)^2 - \eta(\gamma-1)^2\}M_1^2 - 2\eta(\gamma-1)]\{2 + (\gamma-1)M_1^2\}}{\zeta^2(\gamma+1)^2M_1^2\{2 + (1-\eta)(\gamma-1)M_1^2\}} \dots\dots(18)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{[\zeta(\gamma+1)^2 - (\eta/\zeta)(\gamma-1)^2]M_1^2 - 2(\eta/\zeta)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\{2 + (1-\eta)(\gamma-1)M_1^2\}} \dots\dots(19)$$

また擬似衝撃波前後のよどみ点圧力の比は以下のように計算される。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{p_2}{p_1} = \left\{ \frac{\zeta(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{(\gamma+1)\{2 + (1-\eta)(\gamma-1)M_1^2\}}{[\zeta(\gamma+1)^2 - (\eta/\zeta)(\gamma-1)^2]M_1^2 - 2(\eta/\zeta)(\gamma-1)} \right]^{-1/(\gamma-1)} \dots\dots(20)$$

4. 数値計算例および実験結果との比較

3章までに得られた式(16)~(20)を検証するために、円形断面の管内空気流を考え、各断面で密度および温度を一定とし、半径で無次元化された境界層厚さを δ 、境界層内の速度分布を $u/u_\infty = (y/\delta)^{1/7}$ であらわされるものとし、 δ を種々変化した場合について計算を実行した。圧縮性流体の断熱境界層内においては、摩擦熱によって壁面付近の温度が主流よりいくらか高くなることは良く知られているが、境界層内のその分布については、実験的にいくつかの試みがある⁽⁹⁾にもかかわらず、現時点では計算に使用しうる一般的なデータは得られていない。そこで本計算ではひとまず速度分布の影響を考察する観点にたつて、温度上昇の影響を無視し各断面にわたって温度および密度を一定としたものである。

図3に計算に使用した速度分布の例を示す。図中実線が上述の1/7乗則にもとづく速度分布である。破線は参考のために $\delta=1.0, u/u_\infty = (y/\delta)^{1/7}$ の分布を示したものである。計算によれば本分布は、擬似衝撃波前後の関係に対して、 $\delta=0.4, u/u_\infty = (y/\delta)^{1/7}$ の速度分布とほぼ同等の効果を有することが明らかになった。境界層

大きく変化することは少ないと考えられる。そこで例えば擬似衝撃波前後で境界層厚さが変化するような一般的な場合の数値計算は別の機会にゆずり、ここでは簡単な場合として擬似衝撃波前後で速度分布が互いに相似である場合の関係式を導き、数値計算を行うことにしよう。

その場合、式(5)および(13)で定義した修正係数はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \eta_1 = \eta_2 = \eta, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

となるので、式(12)は著しく単純化されて

$$\left. \begin{aligned} w_2 = w_1 \text{ または } w_2 = \frac{w_1^*}{\zeta w_1} \\ \left(u_2 = u_1 \text{ または } u_2 = \frac{u_1^*}{\zeta u_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

となる。上式の第1の解は意味のない解で、第2の解が修正されたプラントルの関係である。

式(15)を式(8)~(10)に代入し、同時に $M^2 = w^2/(\gamma RT) = 2w^2/[(\gamma-1)(1-w^2)]$ なる関係を用いて、諸関係式をマッハ数 M を用いて書きあらわせば、それぞれ以下のように求められる。

内の速度分布が $1/n$ 乗則で与えられれば、式 (5) の修正係数はそれぞれ以下のように計算される。

$$\alpha = \frac{1}{Au_\infty} \int u dA = 1 - \frac{2}{n+1} \delta + \frac{1}{2n+1} \delta^2$$

$$\beta = \frac{1}{Au_\infty^2} \int u^2 dA = 1 - \frac{4}{n+2} \delta + \frac{1}{n+1} \delta^2$$

$$\eta = \frac{\xi}{\alpha}$$

ただし

$$\xi = \frac{1}{Au_\infty^3} \int u^3 dA = 1 - \frac{6}{n+3} \delta + \frac{3}{2n+3} \delta^2 \quad \dots\dots\dots(5)'$$

上式を式 (16)~(20) に代入することによって以下の計算結果が得られた。

図 4 に擬似衝撃波直後の主流のマッハ数 M_2 の計算例を示す。図中 $\delta=0$ の曲線は垂直衝撃波前後の関係に一致し、 δ を大きくするとともに M_2 は垂直衝撃波の場合よりも大きくなるのが認められる。 $M_2=M_1$

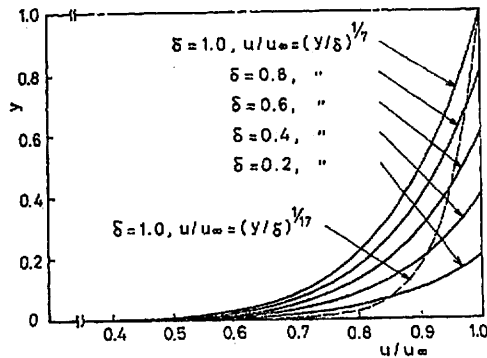


図 3 計算に使用した種々の速度分布

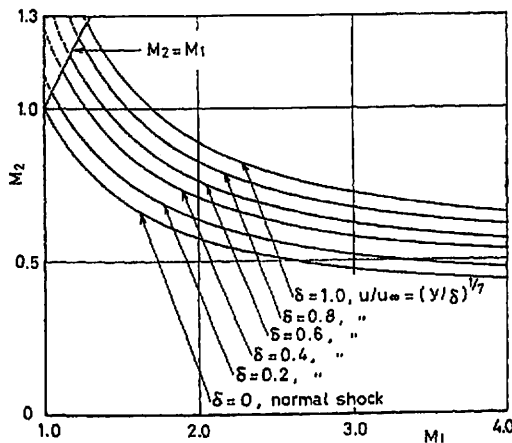


図 4 擬似衝撃波直後のマッハ数

の直線は意味のない解であり、 $M_2 > M_1$ の解は存在し得ない。また本計算によれば、 M_1 が小さい場合に

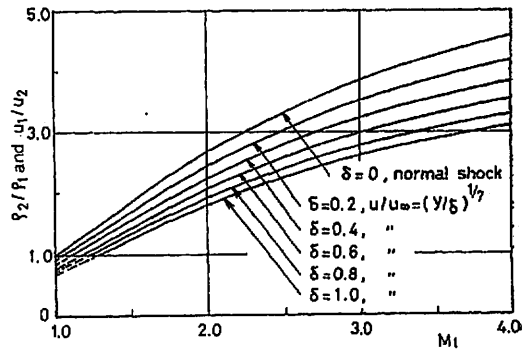


図 5 擬似衝撃波前後の密度比および速度比

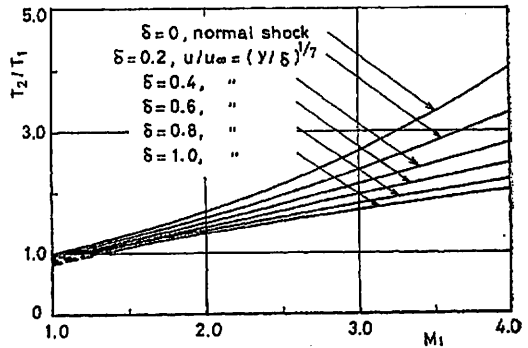


図 6 擬似衝撃波前後の温度比

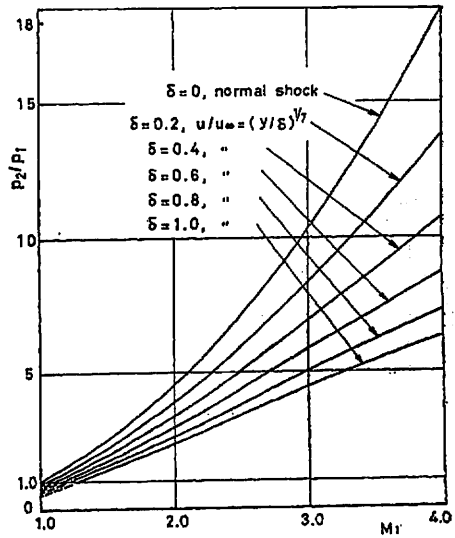


図 7 擬似衝撃波前後の圧力比

は、擬似衝撃波の後流でお主流部のマッハ数が1以上である場合も起こり得ることになる。

図5に密度比および速度比の逆数の計算例を示す。垂直衝撃波の場合と比較すると、 δ の増大とともに密度比 ρ_2/ρ_1 は減少し速度比 u_2/u_1 は増加する。また

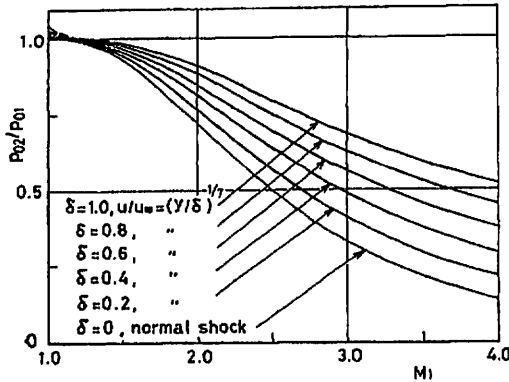


図8 擬似衝撃波前後のよどみ点圧力比

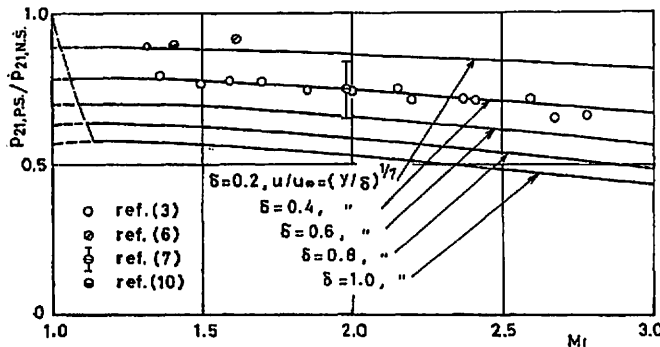


図9 擬似衝撃波前後の圧力比の垂直衝撃波前後の圧力比に対する割合

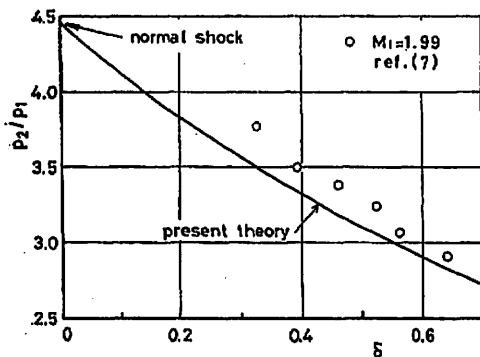


図10 境界層厚さと擬似衝撃波前後の圧力比

この場合、式(17)より擬似衝撃波前後の密度比、および速度比の垂直衝撃波前後の密度比および速度比に対する割合はそれぞれ

$$(\rho_{21})_{P.S.}/(\rho_{21})_{N.S.} = \zeta \dots\dots\dots(21)$$

$$(u_{21})_{P.S.}/(u_{21})_{N.S.} = 1/\zeta \dots\dots\dots(22)$$

となって、いずれも ζ すなわち速度分布のみによって定まり、擬似衝撃波上流のマッハ数 M_1 にはよらないことになる。

図6および7は温度比 T_2/T_1 および圧力比 p_2/p_1 の計算例で、計算値はいずれも δ の増加とともに垂直衝撃波の場合よりも減少することを示している。またその減少率は δ の小さい範囲で急であり、薄い境界層の存在によっても擬似衝撃波前後の温度比および圧力比は大きな影響を受けることが認められる。

図8は擬似衝撃波前後のよどみ点圧力比の計算例である。図より本計算によれば δ の増加とともに擬似衝撃波前後のよどみ点圧力比は垂直衝撃波の場合よりも増加する。すなわち衝撃波によるエントロピー増加率は減少することがわかる。

図9に、本計算によって得られた擬似衝撃波前後の圧力比 $p_{21,P.S.}$ と垂直衝撃波前後の圧力比 $p_{21,N.S.}$ の比および従来の実験結果を示す。図より、著者らによる文献(3)の測定値は、 $\delta = 0.4$, $u/u_\infty = (y/\delta)^{1/2}$ とした場合の本計算結果とかなり良く一致していることが認められる。文献(6)および(10)の実験値は境界層がかなり小さい場合のものであり、計算結果と同様、垂直衝撃波からのずれは比較的小さい。

文献(7)は擬似衝撃波直前の境界層厚さ δ_1 を種々変化させた実験を行っているので、擬似衝撃波直後の境界層厚さ δ_2 も δ_1 に等しいと仮定した場合の本計算結果との比較を図10に示す。図より、計算結果と実験値の傾向はかなり良く一致しており、本理論は境界層厚さが擬似衝撃波前後の圧力比に及ぼす影響をよくあらわしているものと判断される。

5. 結 論

本論文によって、管内流における擬似衝撃波前後の関係式はほぼ式(16)~(20)で与えられることがわかった。ただし、これらの式は擬似衝撃波の前後で速度分布が互いに相似であるという仮定を含んでいるの

で、より一般的には、式(8)~(12)を用いて擬似衝撃波前後の境界層厚さの変化の影響を明らかにしなければならない。さらにこれらの手法を用いて噴流中に発生する擬似衝撃波前後の關係を求めること、および断面内の密度分布と温度分布の影響をも考慮に入れた計算を行うことなどは今後の課題である。

また、擬似衝撃波の区間における壁面摩擦力の影響を考慮に入れる場合には、基礎方程式(2)'のかわりに

$$p_1 + \beta_1 \rho_1 u_1^2 = p_2 + \beta_2 \rho_2 u_2^2 + \beta_\tau \rho_2 u_2^2 \dots\dots(2)''$$

として、摩擦力 τ_w による修正係数 β_τ を評価すれば良いが、円形断面として壁面摩擦係数 $c_f = 0.003$ 擬似衝撃波の長さを管径の 10 倍としても $\beta_\tau = 0.06$ の程度であり、さらに擬似衝撃波が壁面からのほく離を伴う流れであることを考慮に入ればその値はいっそう小さくなり、その影響は β_1, β_2 で示される速度分布の効果に比べれば二次の程度になると思われる。

なお本計算で得られた式(15)によって、拡散モデルによる擬似衝撃波の無次元長さ⁽³⁾を修正すれば

$$l = \frac{1}{c} \ln \left\{ \zeta \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

となり、速度分布を考えない場合に比べて $|1/c \ln \zeta|$ だけ短くなることがわかる。

最後に、本研究に対して終始ご指導、助言および討論をいただいた九州大学 生井武文教授、松尾一泰助教授および琉球大学 山里栄昭教授ほかの方々に厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) Liepmann, H.W. and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, (1958), 57, John Wiley & Sons.
- (2) Crocco, L., *Fundamentals of Gas Dynamics*, B (1958), 64, Princeton.
- (3) 生井・ほか 2 名, 機論, 39-326 (昭 48-10), 3654.
- (4) 辻・ほか 2 名, 機論, 37-294 (昭 46-2), 383.
- (5) 永井, 琉球大学理工学部紀要工学編, 12 (昭 51-4), 1.
- (6) 玉木・ほか 2 名, 機論, 35-273 (昭 44-5), 1028.
- (7) 玉木・ほか 2 名, 機論, 36-392 (昭 45-12), 2056.
- (8) 松尾・ほか 2 名, 機精論, No. 750-8 (昭 50-8), 73.
- (9) Mabey, D.G. and Sawyer, W.G., *Rep. & Mem., Aeron. Res. Council*, 3784 (1974-9).
- (10) Seddon, T., *Rep. & Mem., Aeron. Res. Council*, 3502 (1967).