533.6.011.5 : 532.59

擬似衝撃波の構造*

生井武文**, 松尾一泰**, 永井 實***

1. まえがき

管内の超音速流れが亜音速に減速される際の衝撃波は管壁境界層と強い干渉を起こす. その結果衝撃波は平面状の垂直衝撃波ではなく管径の数倍の長さをもつ複雑な形状の擬似衝撃波となる. 従来擬似衝撃波に関しては多くの実験結果[1)~(9)]が報告されているがなお不明な点が多い. 一方擬似衝撃波にはつぎの二つの解析的取扱いがある. 一つは Crocco[10)] のショックレスモデル (shockless model) で, これによると管内の擬似衝撃波の区間における壁面のなだらかな静圧上昇を定性的に説明できるが, 実験結果との定量的比較は不可能で, 擬似衝撃波の区間の長さを予測することもできない. 他の一つは玉木ら[8)]の衝撃波反射モデルで, これによると擬似衝撃波内部で管路中心線上の静圧が管軸方向に脈動する現象を説明できるが, 擬似衝撃波内部の流れを計算するには, 衝撃波先頭部における管壁境界層のはく離領域のくさび角の大きさ, 先頭衝撃波後の気流の膨張の大きさおよびその後の再圧縮の大きさなどの実験データを用いなければならない. なお後述のように実際の擬似衝撃波は管路内で前後にはげしく振動しており, 衝撃波反射モデルのように静止した衝撃波の系によって説明することはかなり困難と思われる.

本論文ではショックレスモデルを改良した擬似衝撃波の拡散モデルを提案して擬似衝撃波の長さや擬似衝撃波における管軸方向の静圧分布状態を説明し, 実験結果と比較検討した.

記号

A : 断面積
c : 高速領域の流速の減衰係数
c_p : 定圧比熱
D : 管の等価直径
J : 衝撃関数 $\equiv mu+pA$
L : 擬似衝撃波の長さ
l : 無次元化した擬似衝撃波の長さ $\equiv L/D$
M_1 : 擬似衝撃波直前の気流マッハ数 $=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left\{\left(\frac{P_0}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1\right\}}$
m : 質量流量
P_0 : 集合胴圧力
p : 静圧
$\mathfrak{R}$: 気体定数
T_0 : 集合胴温度
u : 気流速度 $=M\sqrt{\frac{2c_pT_0}{1+\{(\gamma-1)/2\}M^2}}$
w : 無次元速度 $\equiv u/\sqrt{2c_pT_0}$
Δw : 無次元速度差 $\equiv w_1-w_2$
X : 擬似衝撃波先端から管軸方向への距離
x : 無次元化した管軸方向への距離 $\equiv X/D$
γ : 比熱比
μ : 低速領域の流量の全流量に対する比 $\equiv m''/m_1$

添字

0,1,2 : よどみ点状態, 擬似衝撃波直前の状態, 擬似衝撃波直後の状態
* : 音速状態
′,″ : 擬似衝撃波内部の高速領域, 低速領域

2. 実験の装置と方法

図1に示す大気吹出し式超音速風胴において, 高圧空気源の乾燥空気は, 集合胴でいったんよどみ点状態に回復したのちラバール管で超音速に加速され, 断面

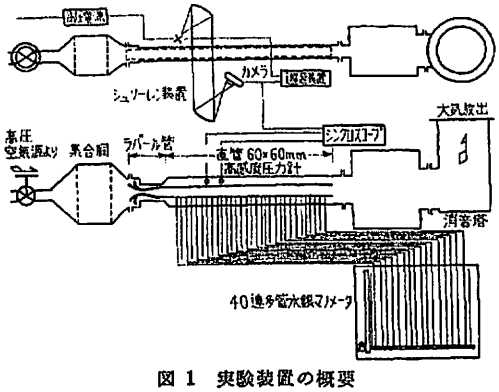


図1 実験装置の概要

* 昭和47年4月2日 第49期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和46年10月13日.
** 正員, 九州大学工学部.
*** 正員, 琉球大学理工学部 (那覇市首里).

60×60 mm², 長さ 830 mm の正方形断面の直管を通過して大気へ放出される．直管部入口の気流マッハ数は 1.33～2.79 の範囲内で 13 とおりに変えられた．観察は，直管内に擬似衝撃波が存在する状態で集合胴圧を一定に保って行なわれた．なお擬似衝撃波後流の静圧はほぼ大気圧である．管路の上下壁面において 15 mm 間隔で軸方向の静圧分布を多管水銀マノメータにより測定した．管路の急拡大部の擬似衝撃波は前後に振動し，それに伴って壁面静圧が激しく変動することが報告されている[10]が，本実験における直管部の擬似衝撃波にも同様の振動現象が観察された．したがって多管水銀マノメータで測定される壁面静圧はその時間的平均値である．

シュリーレン法によって光学的観察を行なったが，瞬間光源にはマグネシウム電極間のスパーク光を，連続光源にはタングステンランプを使用した．得られた写真の視野は図1の直管入口より 100～400 mm である．

なお衝撃波直前の気流マッハ数 M_1 は，集合胴圧力 P_0 と衝撃波直前の静圧 p_1 をもとにして等エントロピ流れの仮定から算出した．本実験の集合胴温度 T_0 はほぼ一定で大気温度に等しい．

3. 実験結果

擬似衝撃波の区間における壁面静圧の管軸方向の分布を図2に示す．同図の横軸は無次元距離 X/D で，縦軸は無次元静圧 $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ である．図3は擬似衝撃波のシュリーレン写真で，露光時間は約 10 μs である．図3の（a）～（m）の写真はそれぞれ図2の同符号の曲線（a）～（m）に対応する．

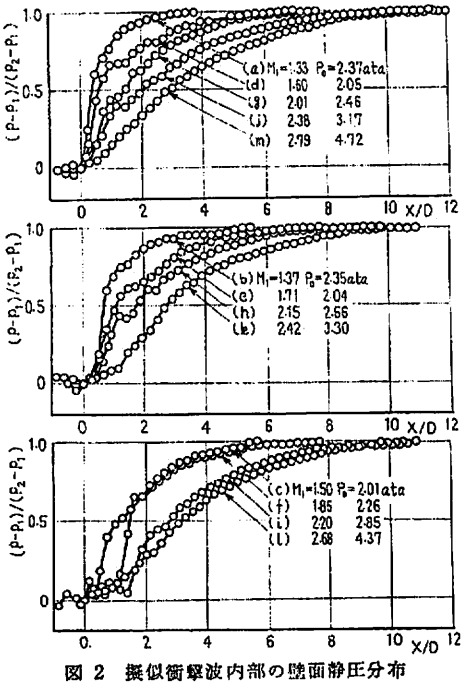


図 2　擬似衝撃波内部の壁面静圧分布

擬似衝撃波直前のマッハ数が $M_1=1.33$ の場合，図3（a）から明らかなように，衝撃波と管壁境界層の干渉は弱く衝撃波の形状は垂直衝撃波に近い．また境界層は衝撃波によってわずかに厚くなり，境界層近傍の流れの乱れがふえ，衝撃波の下流には弱い圧力波が観察される．図2の曲線（a）によればそのときの静圧上昇はかなり急で管径の3.8倍程度の距離で圧力上昇が終了している．

M_1 が大きくなるにつれ，図3(b),(c),(d) からわかるように衝撃波と境界層の干渉の度合が増し，壁面近傍で衝撃波の分枝がおこる．衝撃波との干渉によって境界層厚さは増加し，衝撃波の下流に観察される圧力波も強さが増して，第2，第3の衝撃波が形成される．図3(c),(d) では衝撃波と境界層の干渉の度合が上壁面と下壁面で異なり，擬似衝撃波の構造が上下非対称である．一方図(2)の曲線(b),(c),(d) に示すように，壁面静圧分布は M_1 の増加とともにしだいにゆるやかになり，圧力が上昇する区間の長さ（擬似衝撃波の長さ）が増加する．また第2，第3の衝撃波が発生することにより，静圧分布曲線は階段状の脈動のあるものとなり，各段の圧力上昇の開始位置は，それぞれ先頭，第2および第3の衝撃波の位置に対応している．図3(e) は $M_1=1.71$ の場合で，先頭が λ 形衝撃波でその後に第2～第6の衝撃波がつづく典型的な擬似衝撃波を示している．

M_1 がさらに大きくなると，図3 (f)～(j) からわかるように，衝撃波と境界層の干渉がさらに激しくなり先頭衝撃波が λ 形からX形へ移行し，擬似衝撃波全体の構造はさらに複雑になる．写真から観察される擬似衝撃波の長さは図2の静圧上昇区間とほぼ一致する．一方静圧分布は，図2の曲線 (f),(g),(h),(i) および（j）からわかるように，M_1 の増加とともにさらにゆるやかになり，先頭衝撃波による静圧上昇が擬似衝撃波全体の静圧上昇に対する割合はかなり小さくなる．

図3 (k),(l),(m) はさらにマッハ数が大きくなった場合の擬似衝撃波の先頭部分で，それはもはやめいりょうなX形でなく，多数の弱い斜め衝撃波によって構成されている．擬似衝撃波の上流のマッハ波と比較すると，これらの斜め衝撃波はかなり弱いことがわかる．この場合の静圧分布は図2の曲線（k），(l),

(m) に示すようにさらにゆるやかになり，曲線 (d)～(j) で観察される脈動は観察されない．なお曲線 (k), (l), (m) の形状は互いにほぼ一致し，このことから擬似衝撃波内部の静圧分布曲線は M_1 の増加とともに一定形状に漸近するといえる．

図4の (a), (k) は，それぞれ図3 (a), (k) の流れを露出時間 1/125 秒で撮影したもので，露出時間が長いため輪郭があまくなっている．図4 (a) では図3 (a) の先頭衝撃波の後方の弱い圧力波が観察されない．また図4 (k) では図3 (k) で観察された斜め衝撃波や流れの乱れが認められず，わずかに先頭と第2，第3，第4の圧縮領域の存在が認められる程度である．これは，前節でのべたように，擬似衝撃波内部の各衝撃波が前後に激しく振動しているためで，この現象は高速度カメラによる観察でも確認された．

つぎに，図2の各曲線の圧力上昇区間の長さより得られる擬似衝撃波の無次元長さ L/D を，集合胴温度を283°Kとして計算した垂直衝撃波前後の速度差 Δu で整理すると，図5のようにほぼ直線で表わされる．図から，擬似衝撃波の長さは近似的に

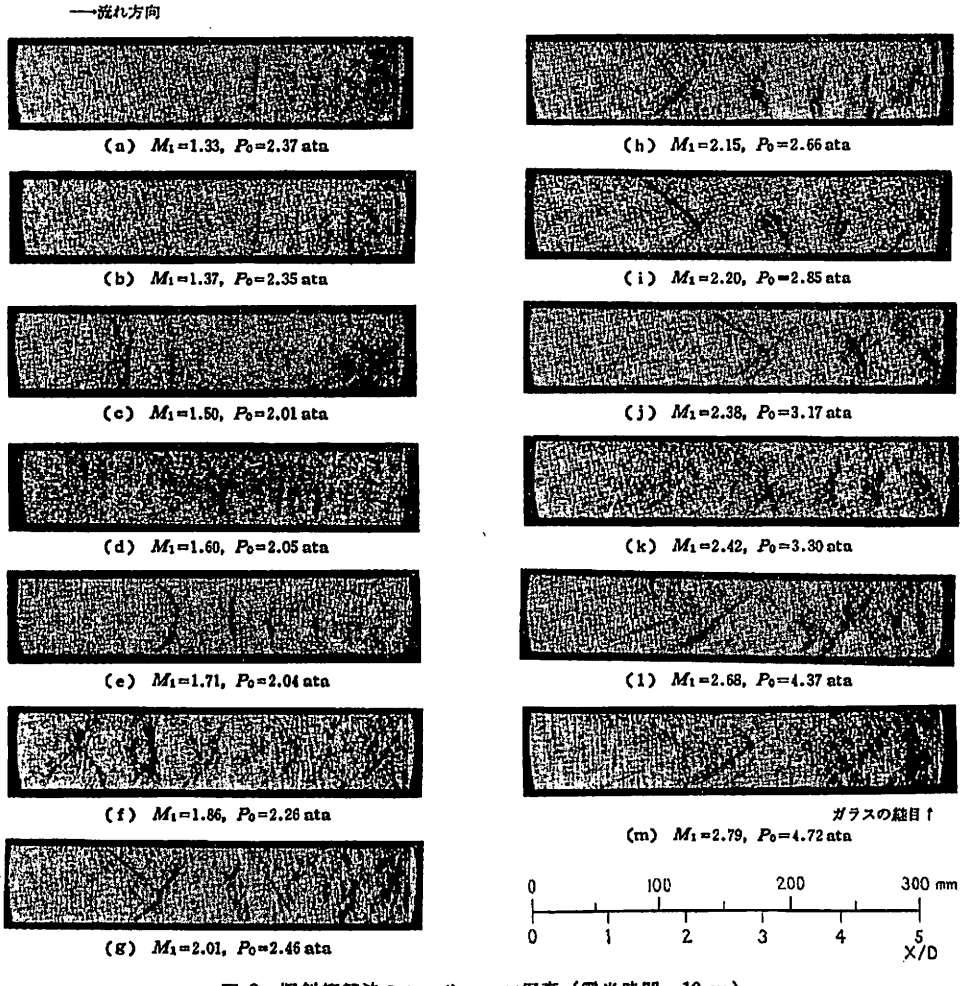


図 3　擬似衝撃波のシュリーレン写真（露光時間　10 μs）

図 4　擬似衝撃波のシュリーレン写真（露光時間　1/125 s）

$$L/D=0.0208\,\Delta u \quad \cdots\cdots(1)$$

で求められる.

図6は，実験的に得られた擬似衝撃波前後の静圧比$(p_2/p_1)_{ex}$を，非粘性一次元垂直衝撃波の理論的静圧比$(p_2/p_1)_{th}$と比較したものである．図によれば擬似衝撃波前後の静圧比は垂直衝撃波のそれよりもかなり低く，マッハ数とともに減少する．これは擬似衝撃波の長さが増大するための壁面摩擦の増加[7][8]や擬似衝撃波後方の流れの乱れによる運動量の損失に基づくものと考えられる．

以上の実験結果から（1）擬似衝撃波の内部の流れは激しく振動している．（2）擬似衝撃波内部の時間的平均静圧分布曲線はマッハ数が高いほどゆるやかになり一定形状に漸近する．（3）擬似衝撃波の長さはその前後の速度差にほぼ比例することが明らかになった．これらの結果は，擬似衝撃波の構造を衝撃波でなく気流の拡散によって説明したCroccoの考えの妥当性を実証しているように思われる．

4. Croccoのショックレスモデルの問題点

図7にCrocco[9]のショックレスモデルを示す．検査面*1*と*2*は擬似衝撃波の先端および後端で，擬似衝撃波の内部は中心部の高速領域と壁面近傍の低速領域にわけられる．高速領域は等エントロピ流れで，低速領域はエントロピ上昇のある拡散流れと仮定する．擬似衝撃波の先端よりしだいに発達する低速領域が断面*2*でついに管路の全面積に広がり，高速領域がなくなることによって擬似衝撃波の区間は終了する．壁面における摩擦および熱伝導は無視する．擬似衝撃波内部の静圧は各断面にわたって一定で，その値は高速領域の等エントロピの仮定から次式のようになる．

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{1-w'^2}{1-w_1^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \cdots\cdots(2)$$

質量，運動量およびエネルギの保存方程式および式(2)を用いれば，低速領域の流量の全流量に対する比$\mu\equiv m''/m_1$を与えることにより擬似衝撃波内部の諸量を計算できる．

図8はショックレスモデルによる$M_1=3.0$の場合の計算例で，横軸はμ，縦軸は無次元表示した静圧および高速領域と低速領域の速度である．図から明らかなように，高速領域の最終速度w_2'は低速領域の最終速度w_2''に一致せず，本例では超音速である($w_2'>w^*=0.408$)．図8の計算結果を実験結果と比較するには，擬似衝撃波内部における低速領域の全流量に対する流量比μのX軸方向分布が必要で，方程式$\mu=\mu(X)$が与えられなければならないが，これについてCroccoは明らかにしていない．

Croccoのショックレスモデルの問題点を整理すれば，（1）擬似衝撃波の終了点で高速領域の速度が低速領域の速度と一致しない．（2）静圧分布が擬似衝撃波の終了点でかなり急なこう配をもっており後方の静圧との接続が不自然である．（3）$\mu=\mu(X)$が与えられないので，擬似衝撃波の長さや管軸方向の静圧分布が計算できないなどである．

上記の問題点のうち(1)および(2)は，高速領域を等エントロピ流れと仮定したことによると思われる．

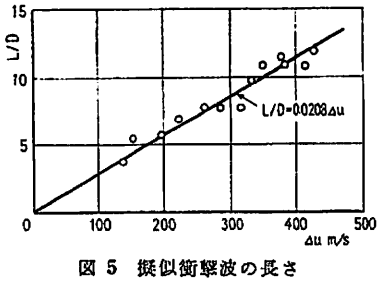


図5　擬似衝撃波の長さ

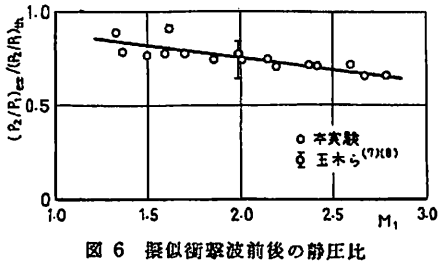


図6　擬似衝撃波前後の静圧比

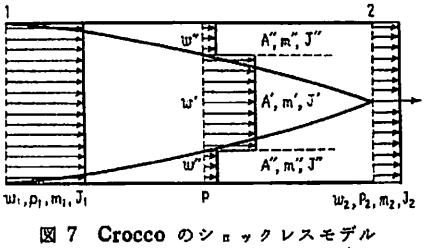


図7　Croccoのショックレスモデル

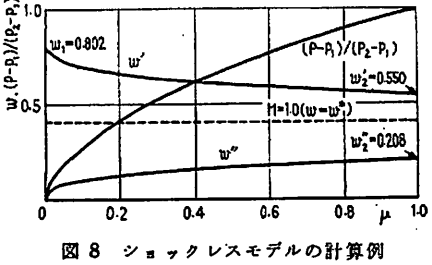


図8　ショックレスモデルの計算例
($M_1=3.0$, $\gamma=1.4$)

さらに(3)の問題を解決するには，X 軸方向への w' と w'' の拡散の様相が与えられなければならない．これらの問題点を解決するため，ショックレスモデルを改良した拡散モデルをつぎに提案しよう．

5. 擬似衝撃波の拡散モデル

図9は擬似衝撃波の拡散モデルで，検査面 1 と 2 を擬似衝撃波の先端および後端にとり，その位置をそれぞれ $x=0$ および $x=l$ で表わす．そうすると x と l はそれぞれ管径を基準にとって無次元化した擬似衝撃波先端からの距離 X/D と擬似衝撃波の長さ L/D を表わすことになる．壁面における摩擦および熱伝導を無視し，擬似衝撃波内部の静圧は各断面にわたって一定であるとする．擬似衝撃波の内部では，高速領域と低速領域が相互に拡散し，$x=l$ で両者が等しい速度になると考える．図7のショックレスモデルと異なる点は，高速領域が等エントロピ流れではないこと，擬似衝撃波の後端で高速領域の流量は零ではなくその速度が低速領域の速度と一致すること，および軸方向の距離 X を導入したことである．

擬似衝撃波の先端および後端の境界条件はつぎのようになる．

$$\left.\begin{array}{l} x=0: w'=w_1,\ w''=0,\ \mu=0,\ p=p_1 \\ x=l: w'=w''=w_2,\ 0<\mu\leqq 1,\ p=p_2 \end{array}\right\} \cdots(3)$$

w は速度 u を最大速度 $u_{max}=\sqrt{2c_pT_0}$ を基準にとって無次元化した値で，マッハ数 M から一意的に決まる．流量 m および衝撃関数 J は w を用いて次式のように表わされる．

$$m=\frac{pA}{\sqrt{\mathfrak{R}T_0}}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\frac{w}{1-w^2} \cdots\cdots(4)$$

$$J=m\sqrt{\mathfrak{R}T_0}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}w+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{w}\right) \cdots\cdots(5)$$

擬似衝撃波の内部では，流量および運動量保存の関係から次式が成立する．

$$m'+m''=m_1=m_2 \cdots\cdots(6)$$

$$J'+J''=J_1=J_2 \cdots\cdots(7)$$

同様に各流線のエネルギが保存されるとしてつぎのように仮定する．

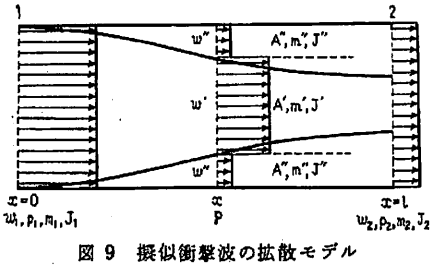


図 9　擬似衝撃波の拡散モデル

$$T_0'=T_0''=T_{01}=T_{02} \cdots\cdots(8)$$

また，幾何学的条件より次式が成立する．

$$A'+A''=A_1=A_2 \cdots\cdots(9)$$

つぎに擬似衝撃波内部の高速領域と低速領域の拡散を次式のように仮定する．

$$\frac{dw'}{dx}=-cw' \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{dw'}{dx}+B\frac{dw''}{dx}=0 \cdots\cdots(11)$$

式(10)は高速領域の速度の減衰を表わす式で，減衰係数 c は実験的に定められる．式(11)は高速領域と低速領域の速度の X 軸方向の変化の関係を一次式で仮定したもので係数 B は境界条件式(3)によって定められる．

式(9)に(4)を代入し，m', m'' のかわりに $(1-\mu)m_1$, μm_1 を用い，さらに式(8)の関係を利用して整理すると，次式が得られる．

$$(1-\mu)\frac{1-w'^2}{w'}+\mu\frac{1-w''^2}{w''}=\frac{p}{p_1}\frac{1-w_1^2}{w_1}=\frac{p}{p_2}\frac{1-w_2^2}{w_2} \cdots\cdots(12)$$

同様に式(7)に(5)を代入して整理するとつぎのようになる．

$$(1-\mu)\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{w'}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}w'\right)+\mu\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{w''}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}w''\right)$$
$$=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{w_1}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}w_1=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{w_2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}w_2 \cdots\cdots(13)$$

式(13)の最後の式よりよく知られたプラントルの関係が得られる．またその結果を式(12)の最後の式に代入するとランキン・ウゴニオの関係式が得られる．すなわち

$$w_2=w^{*2}/w_1 \text{（プラントルの関係）} \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{w_1^2/w^{*2}-w^{*2}}{1-w_1^2} \text{（ランキン・ウゴニオの関係）} \cdots\cdots(15)$$

ここで $w^{*2}\equiv(\gamma-1)/(\gamma+1)$ である．

式(10)と(11)を積分し，それぞれ境界条件式(3)を満足するように積分定数および係数 B を定めるとつぎの式が得られる．

$$w'=w_1e^{-cx} \cdots\cdots(16)$$

$$w''=\frac{w^{*2}}{w_1-w^{*2}/w_1}(1-e^{-cx}) \cdots\cdots(17)$$

式(13)を μ について整理すれば

$$\mu=\frac{(w^{*2}/w'+w')-(w^{*2}/w_1+w_1)}{(w^{*2}/w'+w')-(w^{*2}/w''+w'')} \cdots\cdots(18)$$

となり，これを式(12)に代入すると次式が得られる．

$$\frac{p}{p_1}=\frac{(w^{*2}+w_1^2)(1+w'w'')-w_1(w^{*2}+1)(w'+w'')}{(1-w_1^2)(w^{*2}-w'w'')} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

さらに式 (15) と (19) から

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{w^{*2}\{w_1^2-w_1(w'+w'')+w'w''\}}{(w_1^2-w^{*2})(w^{*2}-w'w'')} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

となる.

式 (16)～(19) は

$x=0$ で

$$w_1'=w_1,\quad w_1''=0,\quad \mu_1=0,\quad p/p_1=1 \cdots\cdots\cdots(21)$$

$x=l$ で

$$\left.\begin{aligned} &w_2'=w_2''=w_2=w_1e^{-cl},\quad \mu_2=1-\frac{w^{*2}}{w_1^2}<1 \\ &\frac{p}{p_1}=\frac{(w_1^2/w^{*2})-w^{*2}}{1-w_1^2}=\frac{p_2}{p_1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

となり，境界条件式 (3) を満足することが確かめられる．式 (22) の μ_2 は擬似衝撃波の後端における低速領域の流量の全流量に対する割合を示し，それは w_1 の関数でその数値を表1に示す．

擬似衝撃波の長さは式 (14) と (22) より

$$l=\frac{1}{c}\ln\frac{w_1^2}{w^{*2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となる．さらに擬似衝撃波の長さと速度差 $\Delta w\equiv w_1-w_2$ との関係を調べるため，式 (14) と (22) より得られる次の関係式

$$\frac{w_1}{w^*}=e^{cl/2},\qquad \frac{w_2}{w^*}=e^{-cl/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

を用いると

$$l=\frac{2}{c}\,\mathrm{arc\,sinh}\left(\frac{\Delta w}{2w^*}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

となる．上式を展開すると

表 1　拡散モデルに関する流れの諸量 ($\gamma=1.4$)

M_1	M_2	w_1	w_2	Δw	$\Delta w/2w^*$	cL/D	$L/D(c=0.114)$	μ_2
1.00	1.000 0	0.408 2	0.408 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1.10	0.911 8	0.441 4	0.377 6	0.063 8	0.078 2	0.156 2	1.370 3	0.144 6
1.20	0.842 2	0.472 9	0.352 5	0.120 4	0.147 5	0.293 9	2.577 8	0.254 6
1.30	0.786 0	0.502 6	0.331 6	0.171 0	0.209 4	0.415 9	3.648 0	0.340 2
1.40	0.739 7	0.530 7	0.314 1	0.216 6	0.265 3	0.524 5	4.601 1	0.408 2
1.50	0.701 1	0.557 1	0.299 2	0.257 9	0.315 9	0.621 7	5.453 4	0.463 0
1.60	0.668 4	0.581 9	0.286 4	0.295 5	0.361 9	0.708 9	6.218 4	0.507 8
1.70	0.640 5	0.605 2	0.275 4	0.329 8	0.404 0	0.787 4	6.907 2	0.545 0
1.80	0.616 5	0.627 1	0.265 8	0.361 3	0.442 5	0.858 3	7.529 2	0.576 1
1.90	0.595 6	0.647 5	0.257 4	0.390 1	0.477 8	0.922 5	8.092 5	0.602 5
2.00	0.577 4	0.666 7	0.250 0	0.426 7	0.510 3	0.980 8	8.603 7	0.625 0
2.10	0.561 3	0.684 6	0.243 5	0.441 1	0.540 3	1.033 9	9.068 9	0.644 4
2.20	0.547 1	0.701 3	0.237 6	0.463 7	0.567 9	1.082 2	9.493 1	0.661 2
2.30	0.534 4	0.717 0	0.232 4	0.484 6	0.593 5	1.126 4	9.880 7	0.675 8
2.40	0.523 1	0.731 7	0.227 8	0.503 9	0.617 1	1.166 9	10.235 6	0.688 7
2.50	0.513 0	0.745 4	0.223 6	0.521 7	0.639 0	1.204 0	10.561 1	0.700 0
2.60	0.503 9	0.758 2	0.219 8	0.538 3	0.639 3	1.238 1	10.860 3	0.710 1
2.70	0.495 6	0.770 2	0.216 4	0.553 8	0.678 2	1.269 5	11.135 7	0.719 0
2.80	0.488 2	0.781 4	0.213 3	0.568 1	0.695 8	1.298 4	11.389 7	0.727 0
2.90	0.481 4	0.791 9	0.210 5	0.581 5	0.712 1	1.325 2	11.624 4	0.734 2
3.00	0.475 2	0.801 8	0.207 9	0.593 9	0.727 4	1.349 9	11.841 4	0.740 7
3.10	0.469 5	0.811 0	0.205 5	0.605 5	0.741 6	1.372 9	12.042 6	0.746 6
3.20	0.464 3	0.819 7	0.203 3	0.616 4	0.754 9	1.394 1	12.229 2	0.752 0
3.30	0.459 6	0.827 9	0.201 3	0.626 5	0.767 3	1.413 9	12.402 7	0.756 8
3.40	0.455 2	0.835 5	0.199 5	0.636 0	0.779 0	1.432 3	12.564 2	0.761 2
3.50	0.451 2	0.842 7	0.197 8	0.644 9	0.789 9	1.449 5	12.714 6	0.765 3
3.60	0.447 4	0.849 5	0.196 2	0.653 3	0.800 1	1.465 5	12.855 1	0.769 0
3.70	0.443 9	0.855 8	0.194 7	0.661 1	0.809 7	1.480 4	12.986 3	0.772 5
3.80	0.440 7	0.861 9	0.193 4	0.668 5	0.818 7	1.494 4	13.109 0	0.775 6
3.90	0.437 7	0.867 5	0.192 1	0.675 4	0.827 2	1.507 5	13.224 0	0.778 5
4.00	0.435 0	0.872 9	0.190 9	0.681 9	0.835 2	1.519 8	13.331 8	0.781 2
4.10	0.432 4	0.877 9	0.189 8	0.688 1	0.842 7	1.531 4	13.433 0	0.783 8
4.20	0.429 9	0.882 7	0.188 8	0.693 9	0.849 8	1.542 2	13.528 1	0.786 1
4.30	0.427 7	0.887 2	0.187 9	0.699 4	0.856 5	1.552 4	13.617 6	0.788 3
4.40	0.425 5	0.891 5	0.187 0	0.704 5	0.862 9	1.562 0	13.702 0	0.790 3
4.50	0.423 6	0.895 5	0.186 1	0.709 4	0.868 9	1.571 1	13.781 4	0.792 2
4.60	0.421 7	0.899 4	0.185 3	0.714 1	0.874 5	1.579 6	13.856 5	0.794 0
4.70	0.419 9	0.903 0	0.184 6	0.718 4	0.879 9	1.587 7	13.927 3	0.795 6
4.80	0.418 3	0.906 5	0.183 9	0.722 6	0.885 0	1.595 4	14.994 3	0.797 2
4.90	0.416 7	0.909 8	0.183 2	0.726 5	0.889 8	1.602 6	14.057 8	0.798 6
5.00	0.415 2	0.912 9	0.182 6	0.730 3	0.894 4	1.609 4	14.117 8	0.800 0
5.10	0.413 8	0.915 8	0.182 0	0.733 9	0.898 8	1.615 9	14.174 8	0.801 3
5.20	0.412 5	0.918 7	0.181 4	0.737 2	0.902 9	1.622 1	14.228 8	0.802 5
5.30	0.411 3	0.921 4	0.180 9	0.740 5	0.906 9	1.627 9	14.280 2	0.803 7
5.40	0.410 1	0.923 9	0.180 4	0.743 5	0.910 6	1.633 5	14.328 9	0.804 8
5.50	0.409 0	0.926 4	0.179 9	0.746 5	0.914 2	1.638 8	14.375 3	0.805 8
5.60	0.407 9	0.928 7	0.179 5	0.749 2	0.917 6	1.643 8	14.419 5	0.806 8
5.70	0.406 9	0.930 9	0.179 0	0.751 9	0.920 9	1.648 6	14.461 5	0.807 7
5.80	0.405 9	0.933 1	0.178 6	0.754 4	0.924 0	1.653 2	14.501 6	0.808 6
5.90	0.405 0	0.935 1	0.178 2	0.756 9	0.927 0	1.657 5	14.539 8	0.809 4
6.00	0.404 2	0.937 0	0.177 9	0.759 2	0.929 8	1.661 7	14.576 3	0.810 2
∞	0.378 0	1.000 0	0.166 7	0.833 3	1.020 7	1.791 8	15.717 4	0.833 3

$$l=\frac{2}{c}\left\{\left(\frac{\Delta w}{2w^*}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta w}{2w^*}\right)^3+\frac{3}{40}\left(\frac{\Delta w}{2w^*}\right)^5\cdots\cdots\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$\Delta w/2w^*$ の値は，表1に示すように，$M_1=1$ で零で，M_1 とともに増加し，$M_1=\infty$ で 1.0207 となる．もし M_1 が小さい場合には式 (26) の右辺の第2項以下は無視できる〔たとえば，$M_1=3.0$ の場合は $\Delta w/2w^*$ は 0.727 で $(1/6)(\Delta w/2w^*)^3$ は 0.064 である〕．したがって擬似衝撃波の長さは近似的に次式で表わされる．

$$l\equiv\frac{L}{D}\fallingdotseq\frac{\Delta w}{c\,w^*} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

上式によれば，擬似衝撃波の無次元長さ l は，近似的に速度差 Δw に比例し高速領域の流速の減衰係数 c に反比例する．c は実験的に定められるが，上式より得られる無次元量 cL/D は M_1 によって一意的に定まる関数で，その値を表1に示す．

実験式 (1) の右辺を無次元化すれば

$$\frac{L}{D}=21.56\,\Delta w \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

これを式 (27) に代入すると係数 c の値が得られる．すなわち

$$c=0.114 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

この場合の L/D の値を表1に示す．

式 (16) と (17) を式 (18)〜(20) に代入すると擬似衝撃波内部における μ, p/p_1, $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ の X 軸方向分布を計算することができる．式 (20) より擬似衝撃波内部の静圧分布は，つぎのようになる．

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{\{w_1^2(w_1^2-2w^{*2})+w_1^2w^{*2}e^{-cx}\}(1-e^{-cx})}{(w_1^2-w^{*2})^2-w_1^2(w_1^2-w^{*2})e^{-cx}(1-e^{-cx})} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

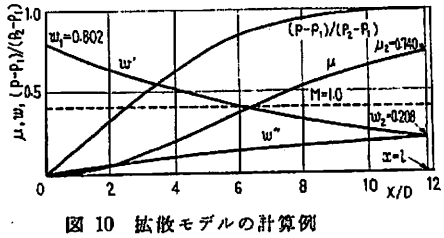


図 10　拡散モデルの計算例
($M_1=3.0$, $c=0.114$, $\gamma=1.4$)

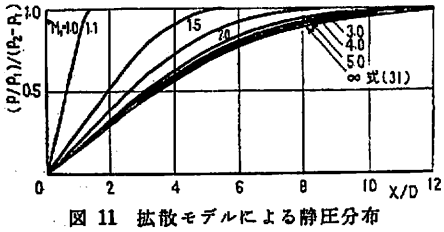


図 11　拡散モデルによる静圧分布
($c=0.114$, $\gamma=1.4$)

ここで，$w_1\to1$ すなわち $M_1\to\infty$ の場合

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{(1-2w^{*2}+w^{*2}e^{-cx})(1-e^{-cx})}{(1-w^{*2})^2-(1-w^{*2})e^{-cx}(1-e^{-cx})} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

が得られる．上式は，いま考えているモデルのように擬似衝撃波の内部で流れが十分に拡散されるような場合の，擬似衝撃波内部の静圧分布の極限値である．

図10は $M_1=3.0$, $c=0.114$ の場合についての計算例である．図から擬似衝撃波の長さは約 $11.9D$ で，擬似衝撃波の内部で高速領域の流速は指数関数的に減少し，$x=l$ で低速領域の流速と一致する．静圧は x とともに上昇し，そのこう配は先端で急で，しだいにゆるやかになり，後端では擬似衝撃波の後流の静圧になめらかに接続する．低速領域の流量比 μ は，先端ではゆるやかに途中でやや急激に上昇し，$x=l$ で約 0.74 となる．以上のことから，本モデルによると前述のショックレスモデルに関する三つの問題点が解決されることがわかる．

図11は M_1 をパラメータとした静圧分布の計算例で，係数 $c=0.114$ にとった．図より，M_1 が 1.0 からしだいに増加すると静圧分布曲線は，M_1 が小さい範囲では急激にゆるやかな曲線へ移行し，M_1 が大きくなると変化が小さくなり，$M_1=5.0\sim\infty$ の範囲ではほぼ極限値，すなわち式 (31) に一致するといえる．$M_1=\infty$ の場合の擬似衝撃波の長さ（最大長さ）は，管径の約 15.7 倍で，管径の 10 倍で圧力上昇の 95 % が得られ，残りの 5 % を上昇するのに管径の 5.7 倍を要する．

6.　拡散モデルの実験的検証

擬似衝撃波の長さに関する著者らの実験と従来の実験の結果を図12に示す．横軸に Δw，縦軸に L/D をとってある．実線①および②は $c=0.114$ の場合の拡

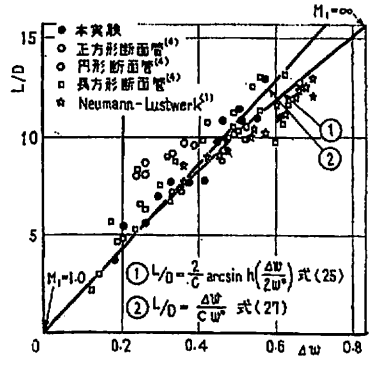


図 12　擬似衝撃波の長さ
($c=0.114$, $\gamma=1.4$)

散モデルの理論式 (25) と (27) から計算した値である．図から実験値と理論値はかなりよく一致することがわかる．

従来，擬似衝撃波の長さ L は気流マッハ数 M_1 によって整理されてきているが，L と M_1 の関係について理論的には明らかにされていない．また文献 (4) では L/D がほぼ $(1-1/M_1)$ に比例するとしているが，その根拠は明らかでない．図 13 は横軸に M_1，縦軸に L/D をとったもので，拡散モデルによる理論式と従来の二つの実験式による値を示してある．理論値は二つの実験値のほぼ中間にあり，これまでの実験値をうまく説明できる．

つぎに擬似衝撃波内部の管軸方向の壁面静圧分布について，拡散モデルの理論値と実験値の比較を図 14 に示す．実線は理論値で，M_1 が大きい場合に理論値と実験値の一致はきわめてよい．これは図 3 のシュリーレン写真からわかるように，M_1 が大きいと擬似衝撃波の内部の流れは拡散状態となるからである．M_1 が小さい場合には実験値は理論値よりも静圧上昇が急である．これは，擬似衝撃波の先頭の垂直状の衝撃波の影響が顕著になり，静圧分布が拡散による静圧上昇

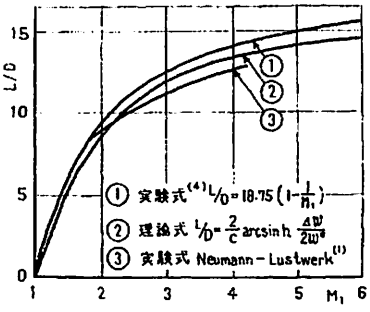


図 13　理論式と実験式の比較

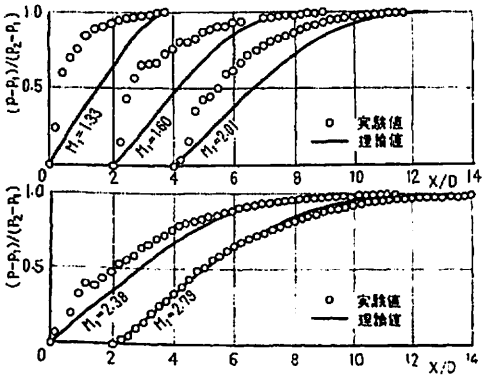


図 14　擬似衝撃波内部の壁面静圧分布（各 M_1 に対する横軸は 2 ずつずらしてある）

より，衝撃波による静圧上昇によって大きく影響されることによるものと考えられる．一方擬似衝撃波の長さについていえば，M_1 にかかわらず実験値は理論値とよく一致する．したがって，擬似衝撃波の長さは内部の拡散が終わる点までの距離と考えてよい．

7. む す び

擬似衝撃波に関する Crocco のショックレスモデルを改良した拡散モデルを提案し，実験結果と比較検討した．その結果

（1） 拡散モデルによって得られる擬似衝撃波の長さは，実験結果とかなりよく一致する．

（2） 拡散モデルにより求められる擬似衝撃波内部の管軸方向の静圧分布は，本実験の結果をよく説明でき，とくに擬似衝撃波直前のマッハ数が大きいほど両者はよく一致する．

（3） したがって擬似衝撃波は，衝撃波でなく中心部の高速気流と壁面近傍の低速気流の拡散現象としてみるほうが妥当と思われる．

などが明らかにされた．

本実験および従来の実験結果に対しては，式 (10) に示す高速領域の流速の減衰係数 c は一定($c=0.114$) と考えても実験と理論はよく一致した．しかし c は厳密にはレイノルズ数や作動気体の特性などに依存すると考えられる．

拡散モデルは擬似衝撃波の巨視的構造を説明するもので，内部構造を詳しく論ずることはできない．前述のように実際の擬似衝撃波ははげしく振動しており，内部の流れは非定常で，その理論的取扱いは困難である．また擬似衝撃波による圧力上昇が，理論値よりも小さくなることも今後の研究課題である．

最後に，本研究に協力された大学院生の北島光比古および佐藤伸一の両氏に感謝の意を表する．

文　献

(1) Neumann, E.P. and Lustwerk, F., *J. Appl. Mech.*, 16-2 (1949-6), 195.
(2) Lukasiewicz, J., *J. Aeron. Sci.*, 20-9 (1953), 617.
(3) Shapiro, A.H., *Compressible Fluid Flow*, Vol. II (1954), 1153, Ronald.
(4) NAVWEPS, *Handbook of Supersonic Aerodynamics*, 6-17 (1959), 271.
(5) Chan, R.Y. and Willams, J.C., *Trans. ASME*, Ser. E, 36-2 (1969-6), 146.
(6) 浅尾・ほか 2 名，機講論，No.710-15 (昭 46-10)，261.
(7) 玉木・ほか 2 名，機論，35-273 (昭44-5)，1028.
(8) 玉木・ほか 2 名，機論，36-292 (昭 45-12)，2056.
(9) Crocco, L., *Highspeed Aerodynamics and Jet Propulsion*, II-B (1958), 110, Princeton.
(10) 生井・ほか 2 名，機講論，No.704-7 (昭 45-6)，85.

討　　論

〔質問〕　神元五郎（京都大学工学部）

超音速ラバール管後の長い等断面管路における壁面境界層と衝撃波との干渉問題に対する一次元流れの取扱い方の一つの方法と思うが，次の点について伺いたい．

（1）著者のご提案の拡散モデルは壁面に沿って発達する境界層と衝撃波との干渉領域を低速領域とし，干渉されない中心部を高速領域とした，一様でない流れの入り混じりを一次元的に取扱ったもので，拡散モデル*とは異なるものと思うが，拡散の意義についてご説明願いたい．

（2）著者は壁面における摩擦を無視しているといわれるが，上の低速領域を仮定していること自身が壁面における摩擦を考慮していることにならないか．

（3）図2の壁面静圧分布の測定値からLを測るのに相当誤差が出ると思うが，どのようにしてLを決められたか．

（4）式（10）の減衰係数cの物理的意義について説明していただきたい．同時に式（11）のような仮定の物理的意義も述べていただきたい．

〔回答〕　（1）本論文はCroccoのショックレスモデルを改良発展させたもので，擬似衝撃波を高速流から低速流への拡散現象としてはあくする点では，Croccoと同一の立場に立っている．ただし，Croccoのモデルに見られた不適当な仮定を排し，拡散の様相を新たに仮定して，実験結果をよく説明できる本モデルを得た．擬似衝撃波内部の流れはきわめて乱れ，静圧変動を伴っているが，著者らはそのような流れ場を仮想的な高速流領域と低速流領域の相互拡散の場としてとらえ，これを拡散モデルと呼んだ．拡散の意義についてこのように理解願いたい．

（2）衝撃波との干渉の結果，境界層がはく離するために，壁面に近接する層の流速は著しく減衰する．そのような場合壁面摩擦力は無視しうる程度になると推定される[9]．著者らはこのように考え擬似衝撃波の区間の壁面摩擦力を零としたのであって，これは低速流領域の仮定と矛盾するものではない．

（3）供試管路が直管であるから，管軸に沿った壁面静圧分布は擬似衝撃波の内部で正のこう配，下流側の亜音速流で負のこう配を示すので静圧分布曲線の極大点を擬似衝撃波の終了点とした．M_1が大きいほど極大点近傍の曲率半径が増大することにより，擬似衝撃波の長さLの測定精度は低下するが，たかだか±0.5D程度の誤差である．

（4）相異なる速度をもった二相間の混合では，速度差に基づくせん断力が混合を推進する重要な要素であって，速度差が大きいほど混合が促進されると思われる．このように考えれば式（10）は

$$\frac{d}{dx}(w'-w'')=-c(w'-w'') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)'$$

とすべきだが，壁面のすべりなしの条件を考慮に入れ，簡単のために式（10）の形を採った．すなわち高速流領域の速度の減衰率は速度に比例するとし，その係数をcとした．式（11）の意義は本文に述べたとおりで，現象に対する第一次近似である．ただしw'とw''の断面1および2における値が式（3）と（14）から定まっているので，本式による誤差は大きくないと思われる．

〔質問〕　東野文男（東京大学工学部）

貴論文の拡散モデルにつき，不明な点があるのでお教えいただきたい．

貴論文中の擬似衝撃波の拡散モデルはCroccoのショックレスモデルの特別な場合である．すなわち，一般的には流れの中に流速の差がある「すべり流」として取扱うほうが妥当であり，この影響はM_1が小さい場合のλ形擬似衝撃波に対しては大きいと思うが，その点をどうお考えか．

〔回答〕　λ形の足をもった衝撃波については，垂直衝撃波の部分を通過した気流と足の部分を通過した気流との間に速度差があるため，衝撃波の分枝点より下流へすべり線が発生することがよく知られている(付1)．しかし，本論文で扱っている高速流領域と低速流領域は，擬似衝撃波内部の乱れた流れ場を仮想的な二つの相異なる流速をもった領域間の混合として記述するために用いたもので，必ずしも上述の“すべり流”を想定したものではない．したがってλ形の先頭衝撃波を有する擬似衝撃波がより拡散的であるとは必ずしもいえない．

本拡散モデルは神元氏への回答に述べたようにCroccoのモデルを改良したものである．

〔質問〕　玉木貞一（東京工業大学）

（1）擬似衝撃波はM, $R_{e\delta}$, δ/Dの関数と考えるが，本論文ではMのみの関数として扱われており，$R_{e\delta}$, δ/Dには言及されていないが，これらの因子は

* 高速から低速へと拡散するという意味であればCroccoのショックレスモデルと同じではないか．

(付1) Seddon, J., Rep. & Mem., Aeron. Res. Council. No.3502 (1967).

擬似衝撃波に影響しないと考えておられるのか.

（2） 結論(2)として，図14を根拠に管軸方向の静圧分布が理論式と一致すること，特にマッハ数が大きいほど一致すると述べられているが，図は縦軸として $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ をとってある一方，全体の静圧上昇 p_2/p_1 は図6に示されるように M_1 が大きくなるほど合わなくなる．したがって実際の静圧分布 p/p_1 はマッハ数が大きいときも実験値と理論式とは合わないと思うがいかがか.

〔回答〕 （1） $R_e\delta$, δ/D が大きいほど擬似衝撃波は拡散的になるが，これらが一定程度以上になれば，その変化が擬似衝撃波に及ぼす影響は無視しうると考える.

（2） 富田・山根氏への回答(1)，(2)を参照.

〔質問〕 富田幸雄・山根隆一郎(東京工業大学)

（1） このモデルでは壁面における摩擦を無視しており，上流，下流の速度は一様であるから，結果は垂直衝撃波の場合と全く同じになり，ただ通常不連続面とみなす垂直衝撃波を有限の長さに引伸ばしたものと考えられる．したがって M_1, p_1 のみが与えられれば p_2 は一意的に決まり，この値が実測値と異なることは図6より明らかである．擬似衝撃波区間内の壁面静圧 p も同様に下流へ行くにしたがって理論値と実測値がずれてくるものと思われる．それにもかかわらず図14で圧力を $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ の形に無次元化し，比較することはモデルの検証になるのか.

（2） (1)に関連して図6では M_1 が大きくなるとともに p_2 の理論値と実測値の差が大きくなる（壁面摩擦の影響がきいてくると思われる）にもかかわらず，図14では M_1 が大きくなるほどよく合い，モデルの妥当性が証明されるという結論となっており，奇異な感じがするが，この点いかがお考えか.

（3） 擬似衝撃波には上流の境界層がかなり影響するが，本論文の実験の場合，レイノルズ数，境界層厚さ，境界層内速度分布はどのようになっているか.

〔回答〕 （1） ご指摘のように，本論文の主目的は擬似衝撃波が拡散現象としてはあくできることを示すことにある．$(p_2/p_1)_{ex}$ が理論値より低くなるのは，擬似衝撃波の区間内の壁面摩擦および擬似衝撃波前後端の流れの非一様性によるものと思われ，その程度は擬似衝撃波直前の境界層厚さによっても変化することが質問者によって示されている[7][8]．このように $(p_2/p_1)_{ex}$ については，種々の因子が関与するので当面これらを無視するために $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ で拡散モデルの検証を行なった.

（2） 上述のように考えて，本文の結論(2)は「M_1 が大きいほど擬似衝撃波は拡散的であり，M_1 が小さい場合には必ずしもそうでない」と理解願いたい.

（3） 管路の等価直径を基準にしたレイノルズ数 R_{eD} は $M_1=1.33$ で 2.16×10^6, $M_1=2.79$ で 2.22×10^6 である．境界層厚さはシュリーレン写真から判断して約5 mmと思われるが，境界層内速度分布の定量的測定は行なっていない.

〔質問〕 西岡通男（大阪府立大学工学部）

本論文の静圧分布に関する解析結果は低マッハ数において実験結果とかなり違った傾向を示している．質問者はその原因の検討とこの点を改良するための提案を行ないたい.

衝撃波-境界層の干渉現象は種々のパラメータに依存するが，なかでも高速領域の流れから低速領域の流れへの運動量注入率は現象を決定的に支配する量と考えられる．そこで，まず，この点に着目した運動量方程式（i），（ii）をCroccoモデルの改良のための立脚点として提案する.

$$\frac{dJ'}{dx}=\sigma w'\sqrt{2c_pT_0}\,\frac{dm'}{dx}+p\,\frac{dA'}{dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$\frac{dJ''}{dx}=\sigma w'\sqrt{2c_pT_0}\,\frac{dm''}{dx}+p\,\frac{dA''}{dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

式（i），（ii）は式(7)を高速領域における式と低速領域における式に分解したものである．両式の右辺第1項は低速領域への運動量注入率で，これが混合係数 $\sigma(x)$ を用いて上記のように記述できると仮定する.

本論文の拡散モデルの核心をなす式(10)，(11)に関し，式（i），（ii）に基づいた解釈を試みる．そのため，高速領域における状態量変化が指数 n のポリトロープ変化で記述できるとする．断熱ではあるが，非可逆圧縮過程であるから $n>\gamma$ である．このとき，式（i）より

$$\frac{d\ln w'}{dx}=\lambda\frac{d\ln(1-\mu)}{dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

$$\lambda=(\sigma-1)/[1-(n/\gamma)(\gamma-1)/(n-1)]\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

式（ii）より，

$$\frac{dw'}{dx}+\frac{\mu}{1-\mu}[\lambda^{-1}(\sigma-w''/w')-(A''/A')(n/\gamma)(\gamma-1)/(n-1)]^{-1}\frac{dw''}{dx}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

が得られる．ここで式(10)と式(iii)，式(11)と式（v）の対応関係は明白である．この対応から，

$$\sigma-1=-c[1-(n/\gamma)(\gamma-1)/(n-1)]\Big/\left[\frac{d\ln(1-\mu)}{dx}\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

$$[\lambda^{-1}(\sigma-w''/w')-(A''/A')(n/\gamma)(\gamma-1)/(n-1)]^{-1}\times\frac{\mu}{1-\mu}=\frac{\mu_2}{1-\mu_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vii})$$

となる．式 (vi)，(vii) に関する詳細な議論は別の機会にゆずるとして，質問者が非常に興味深く思うのは，式 (10) が式 (vi) のごとく $\sigma(x)$ の関数形を与えている点である．$\sigma(x)$ は流れの場の性質によって当然異なるであろう．そう考えると，本論文の低マッハ数における静圧分布の計算と実験の間の不一致の原因は式 (10) にあるのではないかと想像される．すなわち，式 (10) はM数が大きく，広いはく離域をもつ流れでしか成立しないのではないかと想像される．

上記の推論のもとに，低速領域の流れがどちらかといえば付着境界層に近い挙動をするであろうと考えられる低マッハ数では式 (10) よりもむしろ

$$\frac{d\ln(1-\mu)}{dx}=-c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(viii)}$$

が成立するのではないかと予想する．すなわち，

$$\sigma-1=-[c^{-1}\{1-(n/\gamma)(\gamma-1)/(n-1)\}]\frac{d\ln w'}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ix)}$$

が成立するのではないかと予想する．式 (viii) は l に関する実験事実を説明しなければならないという点も考慮して式 (iii) より導いたもので，定数 c が本論文の c と同一になることは容易に知れる．そこで次の提案を行ないたい．

「低マッハ数においては式 (10) の代わりに式 (viii) を用い，これ以外については本論文の取扱いをそのまま適用する．」

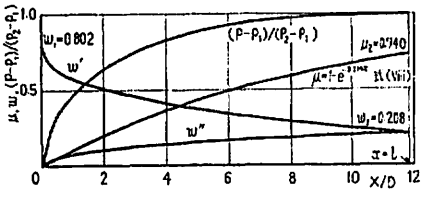
上記の取扱いをするとき，図14の $N_1=1.33, 1.60, 2.01$ の静圧分布の計算と実験が満足すべき一致を示すことが質問者の試算で確かめられているが，著者らによる計算と検討を期待する．

〔回答〕　ご提案の式 (viii) を用いて計算すれば，付図1～3(これらは本文中の図10,11および14にそれぞれ対応する) のようになり，M_1 が小さい場合の静圧分布は実験結果とよく一致することが確かめられた．

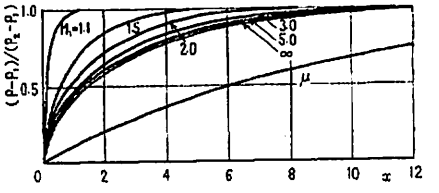
おもに境界層の挙動に着目したといわれる式 (viii) の意義が明確でないが，著者らは拡散モデルによる静圧分布が実験値とずれる原因は，擬似衝撃波先頭部に発生する垂直状の衝撃波によるものと考える．

〔質問〕　西岡通男

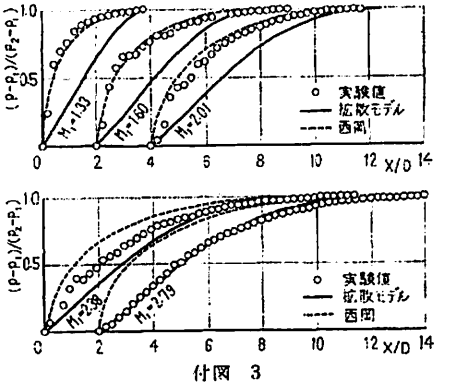
詳細に計算していただき感謝する．式 (viii) の導入は質問者の直感的な推論にすぎないが，乱流境界層の計算法におけるエントレインメントの式に対応するもので，式の物理的な意味は明解である．ところで，「垂直状の衝撃波が原因である」という著者らの説明は拡散モデルの考え方が低マッハ数では適用できないということを意味しているのか．それとも垂直状の衝撃波ができる場合でも，その下流域ではこの考え方が適用できるという意味なのか．後者の場合，式 (10)，(11)は低速領域の流れの性質によらず成立すると考えるべきなのか．



付図 1　西岡の提案 ($M_1=3.0$, $\gamma=1.4$)



付図 2　西岡 ($\gamma=1.4$)



付図 3

〔回答〕　垂直状の衝撃波の近傍の流れは，式 (10)，(11) とは著しく異なる．ただしその下流域では，衝撃波を通過した気流と，壁面近傍の (衝撃波を通過しない) 気流が相互に拡散し，最終的には w_2 は式 (10)，(11) の曲線に漸近する．したがってこの場合，擬似衝撃波内部の静圧分布は拡散モデルの理論値と異なるが，擬似衝撃波の長さは理論値に一致するという実験事実になると考えられる．上述の拡散現象は境界層のはく離によって促進されるが，本モデルの範囲内では，低速領域の流れの性質を特別に考慮する必要はないと思われる．いずれにせよ，擬似衝撃波内部の流れの詳細な解明は今後の課題である．式 (10)，(11) および式 (viii) はその一つの手がかりになると思われる．