一様流中における二次元角柱の風直角方向応答の理論的解析

一様流中における二次元角柱の風直角方向応答の理論的解析

天野輝久*　福島弘志**　川井田英之**

A Theoretical Analysis of Cross-Wind Response of Two-dimensional Square Cylinder in Uniform Flow

Teruhisa AMANO*　Hirosi FUKUSIMA**　Hideyuki KAWAIDA**

Abstract

The self-excited oscillation has become a major concern in wind resistent design of high-rise buildings. In this study, for the wake behind a two-dimensional square cylinder in uniform flow, proposed is a non-linear equation of motion which has a Rayleigh-type damping and a hardening spring. The influences of mass ratio, the linear term of the aerodynamic damping and the coefficient relating to Magnas effect affecting on the frequency lock-in and the stability diagram are discussed through the approximate periodic solutions for the coupled equations of motions of the cylinder and the wake. Furthermore, the responses of the cylinder and the unsteady forces are analyzed numerically through the Runge-Kutta method applying a seventh degree polynominal for the stationary forces. The results on the responses and the unsteady force have shown good agreements with the experimental data. As a consequence, it is concluded that the proposed model is useful to understand the mechanism of the interaction of the vortex-induced oscillation and galloping.

Keywords : two-dimensional square cylinder, vortex- induced oscillation, galloping, wake-oscillator, frequency locking, mass-damping parameter

1. 序論

1.1 緒言

我が国初の高層建築物である霞ヶ関ビルの竣工(1968年)以来現在までに，高さ100m以上の高層建築物は220棟近く建設されている[1]．これらのなかには主要骨組が風荷重で決まる[2]ものもあり，その合理的評価が重要であるばかりでなく，アスペクト比が大きく軽量で減衰性に乏しい場合には，渦励振やギャロッピング等の空力不安定振動が生じる可能性がある．

ギャロッピングの発生機構はDen Hartogによって初めて理論的に解明された．空気力を相対迎角の1次関数で近似する準定常理論によりその発振風速を予測できる[3]．G.V.Parkinson[4]は空気力を7次の多項式近似に発展させ，不安定なリミットサイクルを含む応答全体を極めて良く説明した．M.Novak[5,6]は振動モードや乱れの影響について理論的拡張を行った．しかし，これらの理論は共振風速に比べて高風速域が対象であり，高層建築物で重要となる渦励振との複合現象は考慮されていない．

渦励振は物体背後に生じるカルマン渦に起因する共振現象で，渦発生周波数が物体の固有振動数に近い風速域で発生する．物体が十分重い場合には単純な共振だが，軽い場合には渦発生周波数が物体の振動に引き込まれるいわゆるロックイン(lock-in)が生じ，現象は『物体ー流体系』の複雑な連成自励振動となる[7]．このような振動物体周りの流体場の数値解析[8,9]が最近精力的に試みられ，現象がある程度シミュレートできるようになってきた．しかし，現段階では次に述べるように，この系を適切にモデル化し現象の基本的メカニズムを明らかにすることが重要と思われる．

1.2 既往の研究

G.Birkhoof[10]は円柱背後の死水領域の回転慣性と周りの流れによる復元モーメントとのつりあいにより，『魚の尾の如く揺れる』後流運動をモデル化し，ストローハル数を評価した．船川[11]はこのBirkhoofモデルに強制振動の共振曲線から求めた正の減衰を仮定し，円柱の非定常空気力を求めた．中村[12]は物体が静止していても死水領域は小振幅で

受理：1996年5月20日
学内発表（平成8年5月22日）
*琉球大学工学部環境建設工学科　(Dept. of Civil Eng. and Architecture, Fac. of Eng.)
**大学院工学研究科建設工学専攻　(Graduate Student, Architectural and Civil Eng.)

振動しており，安定なリミットサイクルをもたらす何等かの非線形減衰作用が介在しているはずであるが，減衰項を省略しても現象の本質は失われないとして，Birkhoofモデルを用いて円柱の渦励振を2自由度フラッタとして扱った．

リミットサイクルをもたらす非線形減衰項の最初の導入はHartlen他[13]によって行われ，Rayleigh型の減衰項を持つ後流振動子(wake-oscillator)の数理モデルが提案された．しかし，パラメータの値を決定する手掛りがなく，また，振動子の運動に対する強制力を物体の振動速度に比例するとしたため，あまり良い結果は得られなかった．一方,田村[14)~16)]はG.D.Silvio[17]の円柱背後の渦の模式図を参考にして，後流振動子の長さが回転に伴って変化するという優れた着想により，van der Pol 型の減衰項を持つモデルを巧みに誘導した．そして，周波数ロックイン，多価応答，揚力が最大となる風速と共振風速とのずれなど渦励振の特徴を極めて良く説明した．

一方，円柱以外の物体に関しては，日野[18]は平板の高次のロックイン現象をBirkoofモデルを用いて解析した．田村[19),20)]は自身のモデルを角柱にそのまま適用し，非定常空気力や渦励振とギャロッピングの複合現象を解析した．また，Corless他[21]は『田村モデル』を用いて角柱の風直角方向応答を摂動法により解析している．

1.3　研究の目的

以上のように，共振風速を含む広範囲の風速域における角柱の風直角方向応答に関する解析理論は未だ十分確立されているとは言い難い．田村モデルを用いた解析により渦励振やギャロッピングの性状が定性・定量的にかなりの程度把握できるようであるが，田村モデルは，元来，円柱後流の運動から導かれたものであり，角柱後流への適用には少しく詳細な吟味が必要と思われる．

本研究は超高層建築物の空力不安定振動を解析するための基礎理論を得るために，一様流中の二次元角柱を対象として，角柱背後の後流域における渦形成とその発達過程をモデル化し，後流の運動方程式を誘導する．そして，後流と角柱との連成振動を既往の研究に準じて定式化し，近似的な定常解に基づいて系の応答周波数，応答振幅および空力不安定領域について考察する．更に，空気力を7次の多項式で近似した方程式系をRunge-Kutta法により数値解析し，応答および非定常空気力に関する既往の実験結果と比較し，モデルの妥当性を検討する．

2. 後流運動の定式化

2.1　モデル化の基本的考え方

静止物体背後の死水領域と呼ばれる特定の領域は渦の放出に伴って回転運動をする．田村[14]は前章で述べたように，この領域を後流振動子として捉え，その長さが『独立渦が形成され後流に流出した瞬間に最小になる』とする振動子の伸縮という概念を導入し，その伸縮と渦放出との相関性から非線形減衰項を導出し運動方程式を誘導した．ここでは振動子の伸縮という概念を導入する代りに，物体背後の後流域における渦形成とその発達および減衰過程を循環の変動と移動として捉え，その回転運動をモデル化する．

2.2　後流の挙動

図－1は溝田他[22]による一様流中における二次元静止角柱周りの半周期間の非定常流線である．左上図の時刻 $t=-3T/12$（T：渦発生周期）では角柱には上向きの最大揚力が作用し，逆に，半周期後の $t=3T/12$ では下向きの最大揚力が作用している．隅角部から剥離した流れと死水領域との不連続面から発達する渦の形成により，破線で示した1対の渦を含む角柱背後の後流域は，$t=-3T/12$ では時計回りに，$t=3T/12$ では反時計回りに最も回転している．円柱の場合，剥離点が回転し一種のマグナス効果による揚力が発生する[11]．角柱の場合にも同様の効果があると考えて良く，揚力 C_L と回転角 α との間には，

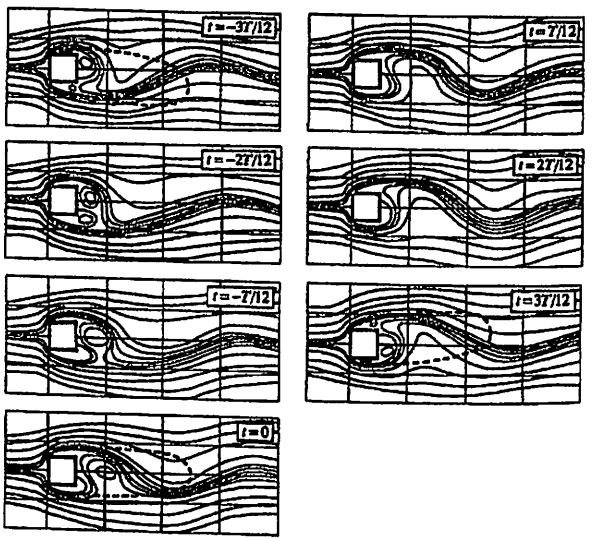
$$C_L=-f\alpha \tag{1a}$$

なる関係がある．すなわち，揚力係数 C_{L0} と回転振幅 α_0 の関係は，

$$C_{L0}=f\alpha_0 \tag{1b}$$

で表わされる．定数 f の値は角柱については不明であり，現段階では，船川[11]がSwansonの実験[23]から求めた円柱に関する値“$f=1.16$”が参考となる．

今，物体背後で時計回りに回転する上側の渦に注目すると，$t=-3T/12$ では既に循環流となっている．この循環流は $t=-4T/12$ における流線図（$t=2T/12$ を上下逆にしたもの）では認められないことから，その形成はそれより少し前（位相角にして30°未満）であることがわかる．この循環流は $t=-2T/12$ で角柱背面から離れ始め明らかに移動を開始する．そして，半周期後の $t=3T/12$ には風上面からの距離が $2.5d\sim3d$（d：角柱の辺長）付近に達し，残りの半周期で $5d$ 程度の位置まで移動する．この間，渦の強さは前半の半周期では不連続面からの渦度の供給を受け成長を続ける



図－1　角柱周りの非定常流線[22]

ように見える．そして，後半の半周期では流線が滑らかになり，後流域の運動に及ぼす影響は次第に減衰していくと見てよい．

2.3　後流運動のモデル化

以上の観察に基づいて，図－2に示すような1対の渦を含む角柱背後の後流域の回転運動をモデル化する．先ず，回転中心を田村[19]に倣い風上面中央におき，後流域の幅を b，長さを $2l$，空気密度を ρ とすれば，回転慣性 I は

$$I = \rho \cdot b \cdot 2l \cdot l_o^2 = 2b^* l^* l_o^{*2} \rho d^4 \tag{2}$$

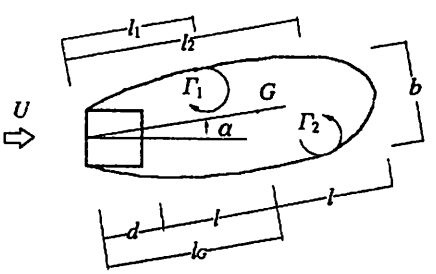
で与えられる．ここに，$b^* = b/d$，$l^* = l/d$，$l_o^* = l_o/d$ である．田村は図－1から判断して，$b^* \approx 1.8$ としている．次に，後流域に加わる周りの流れによる復元モーメント係数 k は，

$$k \approx \kappa\pi \cdot 2l \cdot \rho U^2 \cdot l_o = 2\kappa\pi l^* l_o^* \rho U^2 d^2 \tag{3}$$

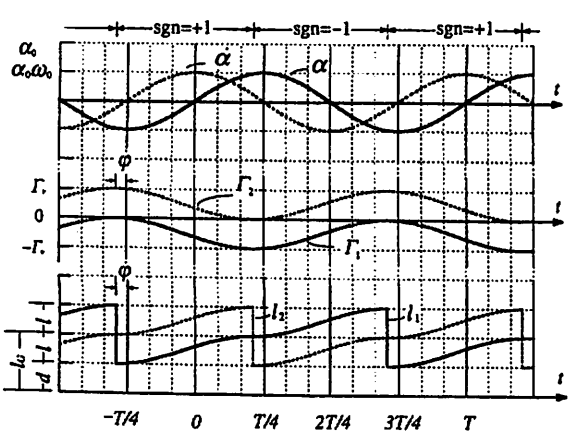
とおける．ここに U は風速である．上式における κ は角柱を含む後流域全体を一つの平板と見なすとき，その縦横比が2.5～3.0の範囲では，平板翼理論による値 $\kappa = 1.0$ を挟んで $\kappa \approx 3/4 \sim 3/2$ で評価できる[24]．

さて，角柱後流域は上式の復元モーメントの他に，移動する循環流による力の作用を受ける．そこで先ず，回転角 α と回転速度 $\dot{\alpha}$ を $\omega_v (= 2\pi f_v)$ を固有円振動数として，

$$\alpha = \alpha_o \sin\omega_v t, \quad \dot{\alpha} = \alpha_o \omega_v \cos\omega_v t \tag{4}$$



図－2　角柱の後流域モデル



図－3　渦の強さとその位置

とおく．次に，渦運動と後流域の運動の間に位相差 φ を導入し，渦の強さ Γ_1，Γ_2 の変動が図－3に示すように最大強さを Γ_v として，前節の考察に基づいて，

$$\Gamma_1 = -\frac{\Gamma_v}{2}\{1 + \sin(\omega_v t + \varphi)\}, \quad \Gamma_2 = \frac{\Gamma_v}{2}\{1 - \sin(\omega_v t + \varphi)\} \tag{5}$$

なる周波数 ω_v をもつ調和関数を用いて表わされると仮定する．更に，渦の位置 l_1，l_2 は前節で見たように，1周期の間に $2l$ の距離だけほぼ直線的に変化するが，ここでは上と同様，調和関数を用いて，

$$l_1 = l_o - \mathrm{sgn}\cdot\frac{l}{2}\{1 - \sin(\omega_v t + \varphi)\}, \quad l_2 = l_o + \mathrm{sgn}\cdot\frac{l}{2}\{1 + \sin(\omega_v t + \varphi)\} \tag{6}$$

で近似できるものとする．ただし，

$$\mathrm{sgn} = \begin{cases} +1, & \cos(\omega_v t + \varphi) \geq 0 \\ -1, & \cos(\omega_v t + \varphi) < 0 \end{cases} \tag{7}$$

である．

以上の仮定に基づけば，後流域の運動方程式は，

$$I\ddot{\alpha} + k\alpha = +\frac{1}{2}\rho U\Gamma_v\{1 + \sin(\omega_v t + \varphi)\}\left[l_o - \mathrm{sgn}\frac{l}{2}\{1 - \sin(\omega_v t + \varphi)\}\right] - \frac{1}{2}\rho U\Gamma_v\{1 - \sin(\omega_v t + \varphi)\}\left[l_o + \mathrm{sgn}\frac{l}{2}\{1 + \sin(\omega_v t + \varphi)\}\right]$$

で与えられる．すなわち，

$$I\ddot{\alpha} + k\alpha = \rho U\Gamma_v l_o \sin(\omega_v t + \varphi) - \rho U\Gamma_v \cdot l/2 \cdot |\cos(\omega_v t + \varphi)| \cdot \cos(\omega_v t + \varphi) \tag{8}$$

である．上式が後流域の運動方程式の基礎式である．右辺第2項は2乗減衰項と呼ばれ，これを持つ方程式はリミットサイクルは持たないが，振幅が小さくなるに従って正弦波に近づく特性を持っている[25]．

2.4　運動方程式の近似化

式(8)の2乗減衰項をフーリエ級数展開すれば，

$$|\cos(\omega_v t + \varphi)| \cdot \cos(\omega_v t + \varphi) = \frac{8}{3\pi}\cos(\omega_v t + \varphi) + \frac{8}{15\pi}\cos 3(\omega_v t + \varphi) - \frac{8}{105\pi}\cos 5(\omega_v t + \varphi) + \cdots$$

となる．上式の右辺第3項以下を無視して式(8)に代入し整理すれば，

$$I\ddot{\alpha} + k\alpha = \rho U\Gamma_v l_o D_0\left(1 + \varepsilon_v' \cos^2\omega_v t\right)\sin\omega_v t + \rho U\Gamma_v l_o \varepsilon_v\left(1 - C_0\cos^2\omega_v t\right)\cos\omega_v t \tag{9}$$

が得られる．ここに，

$$C_0 = \frac{16}{15\pi}\frac{l^*}{l_o^*}\cos 3\varphi \Big/ \varepsilon_v \tag{10a}$$

$$\varepsilon_c = \sin\varphi - \frac{4}{3\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\cos\varphi + \frac{12}{15\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\cos 3\varphi \tag{10b}$$

$$D_0 = \cos\varphi + \frac{4}{3\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\sin\varphi - \frac{4}{15\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\sin 3\varphi \tag{10c}$$

$$\varepsilon_k' = \frac{16}{15\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\sin 3\varphi \Big/ D_0 \tag{10d}$$

である．

ところで，式(9)におけるΓ_vは渦が後流域の重心付近に達した時の強さを表わしており，その評価はかなり難しい．田村は物体に働く揚力から類推される物体周りの循環と同程度としているが，それよりかなり大きいとする資料[26),27)]もある．そこで，ここでは剥離流と死水領域の不連続面の過度のおよそ1/3が物体背後の循環になる[28)]ことを考慮して，ここでは前者が後流域が最も回転している時の周りの流れによる復元モーメント$k\alpha_0$をもたらす循環と関連づけられるとして，

$$\rho U\Gamma_v l_G \approx \frac{1}{3}k\alpha_0 = \frac{2}{3}\kappa\pi l^* l_G^* \rho U^2 d^2 \alpha_0 \tag{11}$$

で評価する．

従って，上式を用いれば運動方程式(9)は，式(1b)，(3)および(4)を考慮すれば，

$$\begin{aligned} &I\ddot{\alpha} - C_v(\dot{\alpha})\dot{\alpha} + D_v(\dot{\alpha})\alpha = 0 \\ &C_v(\dot{\alpha}) = \frac{2}{3}\kappa\pi l^* l_G^* \rho U^2 d^2 \frac{\varepsilon_c}{\omega_v}\left\{1 - C_0\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right\} \\ &D_v(\dot{\alpha}) = \left(1 - \frac{D_0}{3}\right)2\kappa\pi l^* l_G^* \rho U^2 d^2\left\{1 - \varepsilon_k\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

となる．ここに，

$$\varepsilon_k = \frac{1/3}{1 - D_0/3}\varepsilon_k' \tag{13}$$

である．更に，慣用の表記法に従い，

$$C_v(0)/I = 2\zeta\omega_{v0}$$
$$D_v(0)/I = \omega_{v0}^2$$

とおけば，

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} - 2\zeta\omega_{v0}C'(\dot{\alpha})\dot{\alpha} + \omega_{v0}^2 D'(\dot{\alpha})\alpha = 0 \\ &C'(\dot{\alpha}) = 1 - C_0\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2 \\ &D'(\dot{\alpha}) = 1 - \varepsilon_k\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

のように整理される．ここに，

$$\omega_{v0} = \sqrt{\frac{(3 - D_0)\kappa\pi}{3b^* l_G^*}}\frac{U}{d} \tag{15}$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon_c}{2(3 - D_0)}\frac{\omega_{v0}}{\omega_v} \tag{16}$$

である．

最後に，式(4)を式(14)に代入し，基本周波数に関する項どうしを等置すれば，

$$\omega_{v0}^2 = \frac{1}{1 - \varepsilon_k/4}\omega_v^2 \tag{17}$$

なる関係が得られ，式(14)は最終的に，

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} - 2\zeta\omega_v C(\dot{\alpha})\dot{\alpha} + \omega_v^2 D(\dot{\alpha})\alpha = 0 \\ &C(\dot{\alpha}) = \left\{1 - C_0\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right\}\Big/\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_k\right)^{1/2} \\ &D(\dot{\alpha}) = \left\{1 - \varepsilon_k\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right\}\Big/\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_k\right) \end{aligned} \tag{18}$$

となる．角柱後流の運動方程式(18)は，円柱後流の運動から誘導されたvan derPol型の減衰項を有する田村モデル，

$$\ddot{\alpha} - 2\zeta\omega_v\left\{1 - 4\left(\frac{f}{C_{L0}}\right)^2\alpha^2\right\}\dot{\alpha} + \omega_v^2\alpha = 0 \tag{19}$$

（ただし，$\zeta = f\Big/\left(2\sqrt{2}\pi l^*\right)$）と異なって，Rayleigh型の減衰項と硬化型の非線形バネを持つ方程式であることがわかる．

2.5　定数の決定

運動方程式(18)における定数C_0，ε_kおよび減衰定数ζは次のようにして決定できる．先ず，式(18)の減衰項が1周期の間になす仕事W，

$$\begin{aligned} W &\approx -2\zeta\omega_v\int_0^T\left(1 - C_0\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right)\dot{\alpha}^2 dt \\ &= -2\pi\zeta\left(\frac{C_{L0}\omega_v}{f}\right)^2\left(1 - \frac{3}{4}C_0\right) \end{aligned} \tag{20}$$

はリミットサイクルにおいては零なので，$C_0 = 4/3$でなければならない．従って，式(10a)と(10b)から，

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3\pi}\frac{l^*}{l_G^*}\right) \tag{21}$$

が得られる．一方，ストローハル数Sは式(15)および(17)から，

$$S(= f.d/U) = \sqrt{\frac{(3 - D_0)\kappa}{12\pi b^* l_G^*}\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_k\right)} \tag{22a}$$

となる．上式において$\kappa = 3/2$とし，更に，2.2節で述べたように$\varphi \ll 1$であるので，式(10c)および(10d)より$D_0 \approx 1$，$\varepsilon_k \ll 1$とすれば，

$$S \approx \sqrt{\frac{1}{4\pi b^* l_G^*}} \tag{22b}$$

のようにBirkhoofモデルの場合と本質的に同一の関係式となる．そこで，$S = 0.125$[22)] $b^* = 1.8$を上式に代入すれば，$l_G^* \approx 2.8$が得られる．この値は2.2節の考察から妥当な値であると言える．そして，式(21)から$\varphi_1 \approx 16^\circ$または$\varphi_2 \approx 196^\circ\left(= \varphi_1 + 180^\circ\right)$の2根が得られ，2.2節の考察から$\varphi_1$

が妥当な解となる．なお，第2根の解釈については《付録》を参照されたい．最後に，式(10b)，(10c)，(10d)から，$\varepsilon_r \approx 0.12, D_0 \approx 1.00, \varepsilon_t' \approx 0.16$となり，式(13)および(16)より，$\varepsilon_t \approx 0.08$および$\zeta \approx 0.03$が得られる．

3. 角柱の風直角方向応答の解析

3.1 系の運動方程式

前章では静止角柱の後流域の運動方程式を誘導した．ここでは図－4に示すような角柱と後流域の連成運動を考える．

角柱が振幅yで風直角方向に振動すると，振り子の支点を振った時の運動と同じく，後流域は角柱の振動加速度に比例した強制力を受ける．それと同時に，迎角が$-\dot{y}/U$だけ増加する[11]．その結果，後流域の運動方程式(18)は，

$$\ddot{\alpha} - 2\zeta\omega_r C(\dot{\alpha})\dot{\alpha} + \omega_r^2 D(\dot{\alpha})\{\alpha - (-\dot{y}/U)\} = -\ddot{y}/l_G \tag{23}$$

のようになる．一方，角柱には相対迎角を考慮した有効回転角による変動揚力の他に，物体の振動に伴って迎角が変化することによる準定常空気力F_yが作用する．M, C, Kを角柱の単位長さ当たりの質量，減衰係数，バネ定数とすれば，角柱の運動方程式は，

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -1/2 \cdot \rho U^2 d\left[f\left\{\alpha - \left(-\frac{\dot{y}}{U}\right)\right\} + C_{F_y}\right] \tag{24}$$

で表わされる．C_{F_y}は相対迎角$-\dot{y}/U$の奇数次からなる7次の多項式，

$$C_{F_y} = A_1\left(-\frac{\dot{y}}{U}\right) - A_3\left(-\frac{\dot{y}}{U}\right)^3 + A_5\left(-\frac{\dot{y}}{U}\right)^5 - A_7\left(-\frac{\dot{y}}{U}\right)^7 \tag{25}$$

で近似する．

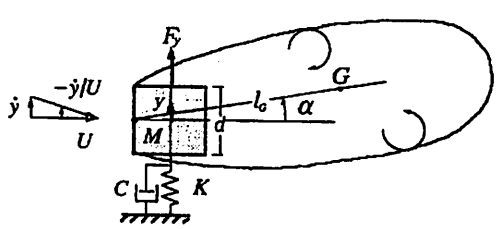
角柱の固有円振動数をω_0として無次元時間$\tau\ (=\omega_0 t)$を用い，τに関する微分を$'$と表記すれば，式(23)は，

$$\alpha'' - 2\zeta V F(\alpha')\,\alpha' + V^2 G(\alpha')\left(\alpha + \frac{S_0 Y'}{V}\right) = -B_0 S_0 Y'' \tag{26}$$

のように無次元化される．ただし，

$$F(\alpha') = \left\{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{f}{C_{L0}V}\right)^2 \alpha'^2\right\} \Big/ \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_t\right)^{1/2}$$
$$G(\alpha') = \left\{1 - \varepsilon_t\left(\frac{f}{C_{L0}V}\right)^2 \alpha'^2\right\} \Big/ \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_t\right) \tag{27}$$

である．$Y(=y/d)$は無次元振幅であり，$\zeta = 0.03, \varepsilon_t = 0.08$，$S_0 = 2\pi S, B_0 \approx 2b^* S$である．また，$V\{=(U/f_0 d)/(1/S)\}$は風速比である．一方，角柱の運動方程式(24)は，



図－4　角柱と後流域の連成系

$$Y'' + H(V, Y')Y' + Y = -\mu C_f V^2 \frac{\alpha}{S_0} \tag{28}$$

ただし，

$$H(V, Y') = 2h + \mu V\{C_f - C_{A1} + C_{A3}\left(\frac{S_0 Y'}{V}\right)^2 - C_{A5}\left(\frac{S_0 Y'}{V}\right)^4 + C_{A7}\left(\frac{S_0 Y'}{V}\right)^6\} \tag{29}$$

となる．hは減衰定数，$\mu(=\rho d^2/2M)$は質量比であり，$C_f = f/S_0$，$C_{A1} = A_1/S_0$，$C_{A3} = A_3/S_0, \cdots$である．

3.2 応答の近似解法

振動方程式(26)および(28)はαとYに関する連立非線形微分方程式で一般に解くのは容易でない．そこで，先ず，系の基本的特性を明らかにするために，$\varepsilon_t = 0$，$C_{A3} = C_{A5} = C_{A7} = 0$として，後流域の運動方程式の減衰項にのみ非線形性を有する場合の定常解を次のような近似的方法によって求める．

先ず，後流域と角柱の応答振幅をα_0，Y_0，無次元周波数をω，位相差をϕとして

$$\alpha = \alpha_0 \sin\omega\tau$$
$$Y = -Y_0 \sin(\omega\tau - \phi) \tag{30}$$

とおく．これを式(26)に代入して$\sin\omega\tau$と$\cos\omega\tau$の係数を等置すれば，

$$B_0\omega^2 Y_0 \cos\phi - V\omega Y_0 \sin\phi = \left(\omega^2 - V^2\right)\frac{\alpha_0}{S_0} \tag{31}$$

$$B_0\omega^2 Y_0 \sin\phi + V\omega Y_0 \cos\phi = -2\zeta V\omega\left\{1 - (f/C_{L0}V)^2\omega^2\alpha_0^2\right\}\frac{\alpha_0}{S_0} \tag{32}$$

同様に，式(28)に代入すれば，

$$\left(1-\omega^2\right)Y_0\cos\phi + \{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\}\omega Y_0 \sin\phi = \mu C_f V^2 \frac{\alpha_0}{S_0} \tag{33}$$

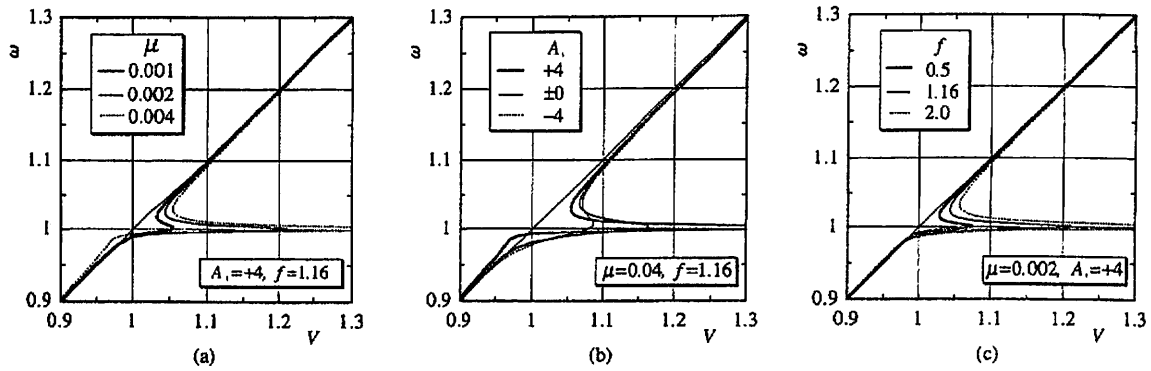
$$\left(1-\omega^2\right)Y_0\sin\phi - \{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\}\omega Y_0 \cos\phi = 0 \tag{34}$$

を得る．

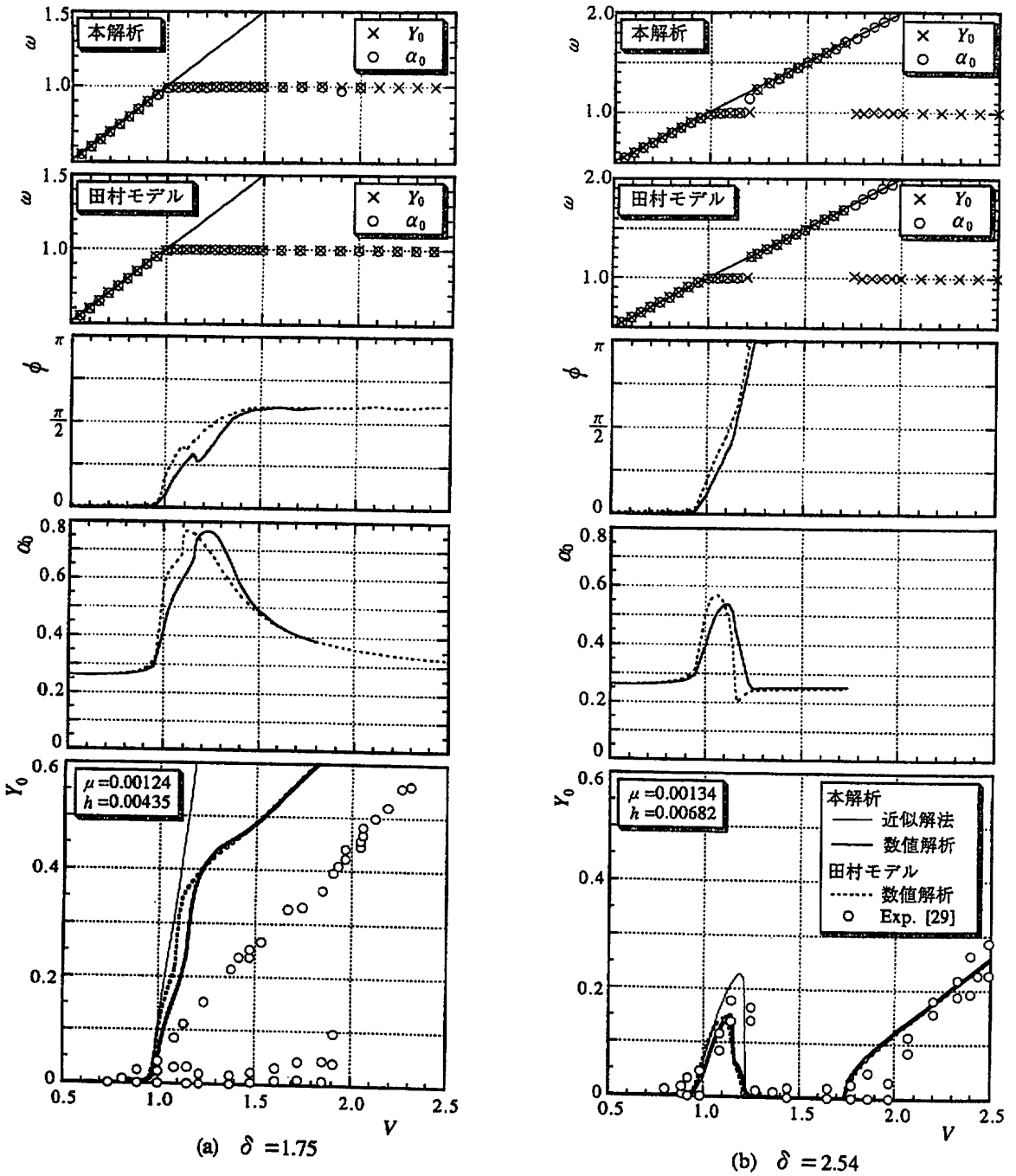
ここで，式(33)と式(34)を式(31)に代入すれば，α_0, Y_0, ϕが消えω^2に関する3次方程式，

$$\left(V^2 - \omega^2\right)\left[\left(1-\omega^2\right)^2 + \{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\}^2\omega^2\right] + \mu C_f V^2\omega^2\left[\left(1-\omega^2\right)B_0 - \{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\}V\right] = 0 \tag{35}$$

が得られる．上式は$h \to 0$で，$\mu \to 0$，すなわち，角柱の質量が極めて大きく後流の運動と全く連成しない場合の解，$\omega = 1$またはVを含むこの系の振動数方程式である．図－5に$h = 0.01$として，μ, A_1およびfの値を変化させた時の$V-\omega$関係を示す．ωは単根または3実根となり，そのうち最小のωが安定な解を与える．Vが小さい間は$\omega \approx V$であるが，Vが1に近づくと$\omega = 1$に漸近するようになり，Vが増し



図－5　V と ω の関係



図－6　角柱と後流域の応答振幅，位相差および応答周波数

てもそのままの関係を保つ．このように周波数が角柱の固有振動数にロックインする風速範囲はμが小さい程，すなわち，質量が大きいほど狭い．A_1を正から負へ変化させても同様の傾向を示す．また，fによってもロックインの範囲が大きく異なる．

次に，式(33)および式(34)を式(32)に代入すれば，後流域の応答振幅α_0，

$$\alpha_0 = \frac{C_{L0}}{f}\frac{V}{\omega}\sqrt{R(V)} \tag{36}$$

ただし，

$$R(V) = 1 + \frac{\mu C_f V}{2\zeta}\cdot\frac{\left(1-\omega^2\right)V + \left\{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\right\}B_0\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2 + \left\{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\right\}^2\omega^2} \tag{37}$$

が求まる．また，Y_0およびϕは式(33)と式(34)より，

$$Y_0 = \frac{\mu C_f V^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + \left\{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\right\}^2\omega^2}}\cdot\frac{\alpha_0}{S_0} \tag{38}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\left\{2h + \mu(C_f - C_{A1})V\right\}\omega}{1-\omega^2}\right] \tag{39}$$

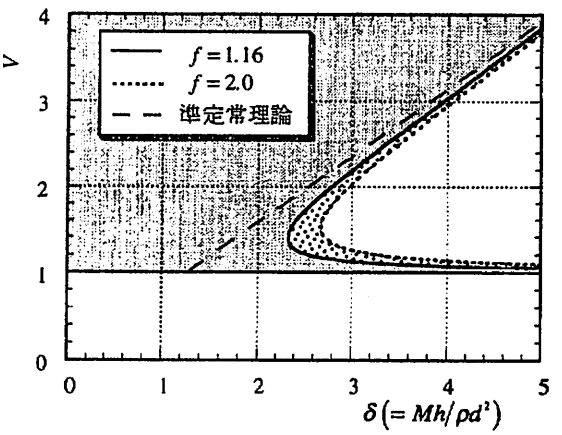
となる．

図－6に田村[19]に倣い，$f = 1.16$, $A_1 = 4$, $C_{L0} = 0.3$とした場合の近似解法による角柱の応答を細い実線で示す．図中の○印はParkinson他[29]による実験結果である．(a)は質量比も減衰定数も小さく(後出の質量減衰パラメータ$\delta \approx 1.75$)，渦励振がそのままギャロッピングに移行する場合である．解析解は$V \approx 1$を越えると急激に増大し発散する．(b)はμもhもやや大きい($\delta \approx 2.54$)場合である．$V \approx 1$以下の応答が実験値に比べて小さいのは(a)と同じだが，$V \approx 1$を少し越えた風速付近での応答は実験値と良く対応している．すなわち，$V \approx 1$を越えると急激に増大する応答が特定の風速で突然収まるという自励的渦励振の特徴が良く捉えられている．図－5に示したように，周波数がロックインする風速範囲がfに大きく依存することを考えると，円柱での値"$f = 1.16$"が角柱にもほぼ適用できることが判る．一方，$V \approx 1.8$付近からギャロピングが発生する．しかし，解析では不安定振動の発現を示唆する$\omega \approx 1$の解がこの風速付近で現われたが，応答値は発散して有意な解とはならなかった．

上述のように，渦励振が発生している間とギャロピングが発現する風速では$\omega \approx 1$の解が現われることから，系の振動数方程式(35)に$\omega = 1$を代入すれば，

$$\left(V^2 - 1\right)(4\delta - C_{A1}V) - C_f V = 0 \tag{40}$$

なるVに関する3次方程式が得られる．ここに，δは質量減衰パラメータ$\left(= Mh/\rho d^2\right)$である．$C_f = 0$とすれば$V = 1$の他に，よく知られた準定常理論によるギャロッピングの発振風速$V_{cr}\left(= 4\delta/C_{A1}\right)$が得られる．図－7は$V = 1$と式(40)の2つの解とで囲まれる空力不安定領域を描いたものである．"$f = 1.16$"の場合，準定常理論で予想されるよりも2倍程度大きい$\delta \approx 2.4$でも，渦励振がそのままギャロッピングに移行することが判る．



図－7　空力不安定領域

3.3　Runge-Kutta法による非線形応答解析

前節では後流域の運動方程式の減衰項にのみ非線形性を有する場合の近似的な定常解に基づいて，系の基本的特性を明らかにした．本節では系の方程式(27)および(29)をRunge-Kutta法により直接数値解析した結果について述べる．

計算に用いた諸定数は前項の近似解法と同一である．解析は$V = 0.5$から始め，初期値にはリミットサイクルの振幅(C_{L0}/f)を与えた．時間ステップ$\Delta\tau$は$2\pi/100$とし，振幅の変動が$1/10^4$以下になったところで定常状態と判断して次の風速の計算に移った．定常空気力の各係数は$A_1 = 4$, $A_3 = 260$, $A_5 = 10^4$, $A_7 = 10^5$とした[19]．前出の図－6に角柱と後流域の応答振幅Y_0, α_0，位相差ϕおよび系の応答周波数ωの解析結果を示す．図中には後流域の運動方程式(18)の代わりに式(19)に示した田村モデルによる解析結果も合わせて示してある．

(a)の$\delta = 1.75$の場合，近似解法では$V \approx 1$を越えると角柱の応答は急激に発散したが，太い実線で示した数値解析では$V \approx 1.1$までは実験値にほぼ対応した形で応答は増大している．後流域の応答振幅のピークが硬化型の復元力の影響で高風速側に移るために，本解析の方が田村モデルに比べて実験値に近い．しかし，$V \approx 1.15$以上では両解析とも実験値との対応はあまり良くない．一方，(b)の$\delta \approx 2.54$の場合，共振風速$V \approx 1$を越えると応答が増加し始めるが，振幅の増加とともに空気力の非線形性に起因して近似解に比べて増加は鈍る．そして，近似解より若干小さい風速で渦励振が突然収まり，振幅の減少とともに再び近似解に接近する．田村モデルと本解析とで応答に大きな差はないが，後流域の応答振幅のピークが高風速側で生じるために，本解析の方が実験値の傾向により近い．更に，準定常理論による発振風速$V_{cr}\left(= 4\delta/C_{A1}\right) \approx 2.0$より若干小さい$V \approx 1.8$以上で系の応答周波数に$\omega \approx 1$の解が現われ，応答が急激に発振するギャロッピングが生じる．この風速域における実験値と解

析値との対応は極めて良い．このように本解析により共振風速を含む広い風速範囲で角柱の応答が極めて良く追跡できる．

3.4 非定常空気力

角柱を一定振幅で強制振動させた時に働く非定常空気力を調べる実験が数多く行われている[30),31)]．非定常空気力は式(24)の右辺であり，係数化して示せば，

$$C_F(Y,Y') = -C_l S_0 \alpha - (C_l - C_{A1}) S_0 \frac{S_0 Y'}{V} - C_{A3} S_0 \left(\frac{S_0 Y'}{V}\right)^3 + C_{A5} S_0 \left(\frac{S_0 Y'}{V}\right)^5 - C_{A7} S_0 \left(\frac{S_0 Y_0}{V}\right)^7 \quad (41)$$

で与えられる．そこで，

$$Y = Y_0 \sin\tau$$
$$\alpha = \alpha_0 \sin(\tau + \psi) \quad (42)$$

とおけば，変位同相および速度同相の非定常空気力係数 C_R, C_I は，

$$C_R = -C_l S_0 \alpha_0 \cos\psi \quad (43a)$$

$$C_I = -C_l S_0 \alpha_0 \sin\psi - (C_l - C_{A1}) S_0 \frac{S_0 Y_0}{V} - \frac{3}{4} C_{A3} S_0 \left(\frac{S_0 Y_0}{V}\right)^3 + \frac{5}{8} C_{A5} S_0 \left(\frac{S_0 Y_0}{V}\right)^5 - \frac{35}{64} C_{A7} S_0 \left(\frac{S_0 Y_0}{V}\right)^7 \quad (43b)$$

となる．加振振幅 Y_0 を与え，後流の運動方程式(26)を数値解析し α_0 と ψ を求めれば，C_R, C_I を決定できる．

非定常空気力の基本的特性を知るために，3.2節と同様の近似解法，すなわち，$\varepsilon_k = 0$ として C_{A3} 以下の項を省略して式(26)を解けば，α_0 は α_0^2 に関する3次方程式，

$$\left(1 - V^2\right)^2 + \left[2\zeta V \left\{1 - \left(\frac{f\alpha_0}{C_{L0} V}\right)^2\right\}\right]^2 = \left(\frac{S_0 Y_0}{\alpha_0}\right)^2 \left(B_0^2 + V^2\right) \quad (44)$$

の解である．従って，C_R, C_I はそれぞれ，

$$C_R = C_l \frac{H_R(V)}{H_0(V)} S_0^2 Y_0$$
$$C_I = \left[-C_l \left\{\frac{H_I(V)}{H_0(V)} + \frac{1}{V}\right\} + \frac{C_A}{V}\right] S_0^2 Y_0 \quad (45)$$

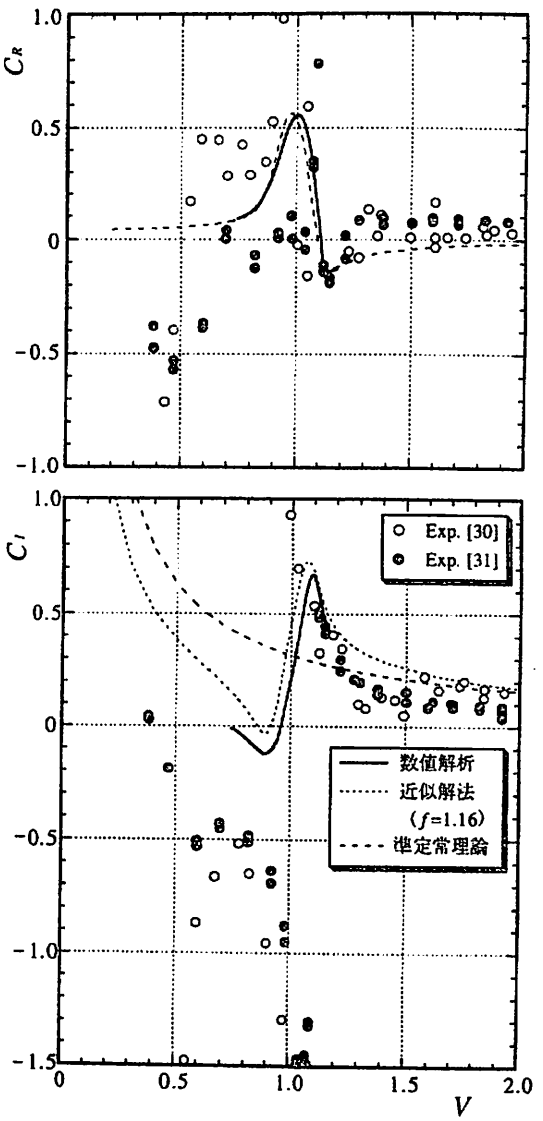
で与えられる．ここに，

$$H_0(V) = \left(1 - V^2\right)^2 + \left[2\zeta V \left\{1 - \left(\frac{f\alpha_0}{C_{L0} V}\right)^2\right\}\right]^2$$
$$H_R(V) = \left(1 - V^2\right) B_0 - 2\zeta V \left\{1 - \left(\frac{f\alpha_0}{C_{L0} V}\right)^2\right\} V$$
$$H_I(V) = \left(1 - V^2\right) V + 2\zeta V \left\{1 - \left(\frac{f\alpha_0}{C_{L0} V}\right)^2\right\} B_0 \quad (46)$$

である．なお，当然のことながら，式(45)で $C_l = 0$ とすれば準定常仮定による非定常空気力係数，

$$C_l = \frac{C_A}{V} S_0^2 Y_0 \quad (47)$$

が得られる．



図－8　非定常空気力

図－8は加振振幅 $Y_0 = 0.1$ の場合について，伊藤他による実験結果[30),31)]と比較したものである．変位同相成分 C_R はばらつきの大きい低風速の範囲を除けば実験値の傾向を概ね捉えている．一方，速度同相成分 C_I は低風速の範囲では実験値との対応は良くないが，$V \approx 1$ 付近では実験値に見られる負から正への急変傾向が，準定常理論と異なって明瞭に捉えられており，不安定性を示す大きな正値が $V \approx 1.1$ 付近で得られている．

4. 結論

本研究は高層建築物の渦励振やギャロッピング等の不安定振動を解析するための基礎理論を得るために，一様流中

における二次元静止角柱後流の運動モデルを誘導し，既往の研究に準じて角柱との連成振動の定式化を行った．

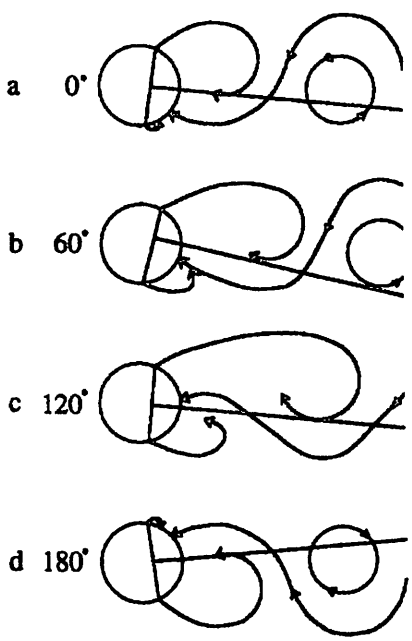
その結果，van der Pol型の減衰項を持つ田村モデルと異なるRayleigh型の減衰項と硬化型の復元力を有する新たな後流域の運動モデルが提案できた．そして，一様流中での風直角方向応答が本モデルより極めて良く追跡できること，非定常空気力の特性が概ね表現できること，円柱のマグナス効果に関する定数が角柱にも適用できること，質量減衰パラメータが準定常理論で予想されるよりも2倍程度大きい場合でも，渦励振がそのままギャロッピングに移行することが系の振動数方程式に基づいて解析的に説明できること等を明らかにした．

今後は本モデルを三次元角柱に拡張することが必要と考えられる．

《付録》　φ_2の物理的解釈と方程式の誘導

リミットサイクルを満たすための条件である$C_0=4/3$を満足する位相差φにはφ_1と$\varphi_2\left(=\varphi_1+180^\circ\right)$の2つの解が存在し，$\varphi_1$は角柱後流に適合する．ここでは第2根$\varphi_2$の物理的意味を考察する．

図－A1は田村[14]が引用したSilvio[17]による静止円柱背後の渦運動の模式図であり，図－1の角柱の場合と比較すると，後流域の回転と渦の発達過程との間の位相関係が異なっているのがわかる．すなわち，角柱の場合，後流域が時計回りに最も回転している瞬間より少し前に"上側"の渦が巻き始めるの対し，円柱の場合には時計回りに最も回転している瞬間(同図b)より少し前に"下側"の渦が巻き込み始めている．換言すれば，角柱の場合より位相がほぼ180°進んでおり，第2根は円柱背後の後流域の運動に適合すると言える．



図－A1　静止円柱後流の流れのパターン[14]

以下，φ_2を採用した場合の運動方程式について考えてみる．先ず，φ_2を式(10a)～(10d)に代入すれば，C_0とε_1はφ_1の場合と同一であるが，ε_cとD_0は符号が反転する．そこで，ε_cを改めて$-\varepsilon_c'$(ε_c'：正)と書けば，運動方程式(12)における減衰項$C_v(\dot{\alpha})$は，

$$
\begin{aligned}
C_v(\dot{\alpha}) &\propto -\varepsilon_c'\left(1-\frac{4}{3}\cos^2\omega_v t\right)\cos\omega_v t \\
&= \frac{\varepsilon_c'}{3}\left(1-4\sin^2\omega_v t\right)\cos\omega_v t \\
&\propto \frac{\varepsilon_c'}{3}\left(1-4\left(\frac{f}{C_{L0}}\right)^2\alpha^2\right)\dot{\alpha}
\end{aligned}
\qquad \text{(a)}
$$

のようにvan der Pol型となる．従って円柱後流の運動方程式は，結果のみ示せば，以下のようなvan der Pol型の減衰項と軟化型の非線形復元力を持つ方程式，

$$
\ddot{\alpha}-2\zeta\omega_v C(\alpha)\dot{\alpha}+\omega_v^2 D(\dot{\alpha})\alpha=0 \qquad \text{(b)}
$$

ここに，

$$
\begin{aligned}
C(\alpha) &= \left\{1-4\left(\frac{f}{C_{L0}}\right)^2\alpha^2\right\}\Big/\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_k\right)^{1/2} \\
D(\dot{\alpha}) &= \left\{1+\varepsilon_k\left(\frac{f}{C_{L0}\omega_v}\right)^2\dot{\alpha}^2\right\}\Big/\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_k\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(c)}
$$

となる．

円柱の場合，後流域の長さは直径の2倍程度であるから，$\kappa=3/4$とし，$D_0\approx-1$を考慮すればストローハル数Sは，

$$
S\approx\sqrt{\frac{1}{4\pi b^*\left(0.5+l^*\right)}}\quad\left(\because\ l_G^*=0.5+l^*\right) \qquad \text{(d)}
$$

となる．そこで，$S=0.2$, $b^*=1.25$[14]とすれば$l^*=1.1$が得られ，式(21)より$\varphi_2\approx196^\circ$となる．最後に，式(13)より$\varepsilon_k\approx0.04$となり，式(16)および式(a)を考慮すれば$\zeta\approx0.005$が得られる．なお，復元力の非線形効果を表わす$\varepsilon_k$は小さいとして無視すれば，式(b)は$\zeta$の値は異なるものの式(19)に示した田村モデルに一致する．

《参考文献》

1) 近藤宏二，"風と超高層"，建築技術，pp.123-125,1994.7
2) 大熊武司，"風と建築－室戸台風から横浜ランドマークタワーまで"，建築技術，pp.60-67, 1994.7
3) 日本建築学会，"建築物荷重指針・同解説"，丸善 pp.254-255, 1981.11
4) Parkinson,G.V.，"Aeroelastic Galloping in one Degree of Freedom"，Proc. Int. Conf.on Wind Effects on Buildings and Structure (Teddington), Her Majesty's Stationary Office, pp.582-609, 1963
5) Novak,M.,"Aeroelstic Galloping of Prismatic Bodies", J. of Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE, pp.115-142, Feb., 1969
6) Novak, M. and Davenport, A.G., "Aeroelstic Instability of Prisms in Turbulent Flow", J. of Eng.Mech. Div., Proc. of ASCE, pp.17-39, Feb., 1970

7) 岡内　功，伊藤　学，宮田利雄，"耐風構造"，丸善，pp.251-252, 1977
8) 岡島　厚，易　東来，小垣哲也，溝田武人，"LSEによる振動角柱周りの流れの数値シミュレーション"，日本風工学会誌，No.63, pp.45-46, 1995
9) 伊藤嘉晃，田村哲郎，和田　章，"3次元シミュレーションによる角柱の非定常空気力と振動応答，日本建築学会大会学術講演梗概集B構造Ⅰ，pp.159-160, 1995.8
10) Birkhoof,G., "Formation of VortexStreets"，J.of Applied Physics, Vol.24, No.1, pp.98-103, Jan., 1953
11) 船川正哉，"流れの中の弾性支持円筒の励振機構"，日本機械学会論文集（第1部）35巻270号，pp.303-312, 昭和44年2月
12) 中村泰治，"二自由度フラッタとしての円柱の渦励振"，構造物の耐風性に関する第1回シンポジウム論文集，pp.161-167, 1970.5
13) Hartlen, R.T. and Currie, I. G., "Lift-oscillator Model of Vortex-induced Vibration", J. of Eng.Mech. Div., Proc. of ASCE, pp.577-591, Oct., 1970
14) 田村幸雄，"円筒の渦励振に関する研究 その1 円筒後流域のモデル化"，日本建築学会論文報告集　第266号，pp.87-95, 昭和53年4月
15) 田村幸雄，"円筒の渦励振に関する研究 その2 渦励振現象のモデル化"，日本建築学会論文報告集 第280号，pp.67-77, 昭和54年6月
16) 田村幸雄，"円筒の渦励振に関する研究ー総括と展望ー"，日本風工学研究会誌 No.10, pp.13-24, 1981.10
17) Silvio,G.D., "Self-controlled Vibration of Cylinder in Fluid Stream", J. of Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE pp.347-361, April,1969
18) 日野幹雄，金子大二郎，"振動平板と後流渦の干渉"，土木学会論文報告集 第193号，pp.35-48, 1971.9
19) 田村幸雄，嶋田健司，"正方形角柱の風直角方向振動のモデル化"，風工学シンポジウム論文集，pp.163-168, 1986
20) Tamura, Y. and Shimada, K., "A Mathematical Model for the Transverse Oscillations of Square Cylinders", Int. Conf. on Flow Induced Vibrations, England, pp.267-275, May 1987
21) Allison, A.E. and Corless, R.M., Prediction of Closed-Loop Hysteresis with a Flow-Induced Vibration Model, CANCAM, pp.512-513, Victoria 1995
22) 溝田武人，岡島　厚，"角柱まわりの非定常流れに関する実験的研究"，土木学会論文報告集 第312号 pp.49-57, 1981.8
23) Swanson, W.M., "The Magnus Effect: A Summary of Investigations to Date", Trans. ASME, Ser. D,83-3, pp.461-470, 1961.9
24) 溝田武人，岡島　厚，"角柱まわりの時間平均流れに関する実験的研究"，土木学会論文報告集 第312号 pp.39-47, 1981.8
25) 武者利光，橋口住久訳，"非線形力学とカオス"，オーム社，pp.21-22，昭和63年
26) Sarpkaya, T., Vortex-Induced Oscillation-A Selective Review, Trans. of ASME, Vol. 46, No. 2, pp.241-258, June 1979
27) 松本武雄，渦励振している正四角柱の後流の性状，日本風工学会誌，No. 63, pp.77-78, 1995
28) 谷　一郎，"流れ学"，岩波全書，pp.89-90, 1967
29) Parkinson,G.V. and Wowzonek,M.A.,"Some Considerations of CombinedEffects of Galloping and Vortex Resonance", J. of Wind Eng. and Ind. Aero., Vol. 8 pp.135-143, 1981
30) 伊藤　学，宮田利雄，森光康夫：正方形角柱に作用する変動抗・揚力，構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集，pp.159-166，1972.12
31) 伊藤　学，宮田利雄，藤沢伸光：振動する正方形断面に作用する空気力の特性，土木学会年次学術講演会講演概要集Ⅰ-208, pp.431-432, 昭和50年10月