一般化楕円型降伏曲面を有する修正Cam-Clayモデルの導入とその適用性

一般化楕円型降伏曲面を有する修正 Cam-Clay モデルの導入とその適用性

原　久夫*

An application of modified Cam-Clay model with expanded elliptic yield function.

Hisao HARA*

Abstract

The modified Cam-Clay model (MCCM) has been widely uesed in the description of elasto-plastic behavior of clays. MCCM has a yield function which is an ellipse in p-q stress system. An adoption of the yeild function is very important because of the form of it effects the stress strain curves of clays.

In this paper, the equation of the ellipse used in MCCM has been extended, and then using this equation, a new elasto-plastic constitutive equation for clay was introduced.

Key Words : clay, constitutive equation, plasticity, stress-strain curve

1．まえがき

修正 Cam-Clay モデル[1]は正規圧密粘土の弾塑性構成モデルとして最もよく使われている．このモデルは粘土のせん断挙動をかなりよく説明できる構成モデルではあるが，まだ粘土の断塑性挙動をすべて表現しているわけではない．

修正 Cam-Clay モデルの降伏曲を$p-q$平面に投影した形は楕円形となっている．ここでは，パラメータの値によって楕円からひし形にまで連続的に形状変化する一般化楕円の方程式を導入し，これを降伏曲面として修正 Cam-Clay モデルの拡張を試みた．この降伏曲面を使って弾塑性構成式を定式化し，非排水三軸試験での粘土の変形挙動を試算した．その結果従来のモデルに比べ，粘土の非排水せん断挙動の予測精度，とくに非排水ストレスパスの挙動の予測精度が飛躍的に向上することが明らかとなった．

本論文ではこの拡張した粘土の構成式を一般化楕円型モデルと呼び，以下にその導入過程と適用性について述べる．

2．一般化楕円型モデルの導入

一般に物質に荷重が作用したとき，応力がある限界応力を越えると変形が急に増大する．この変形は荷重を取去っても元には戻らず永久変形として残る．この変形を塑性変形といい，限界応力を降伏応力という．

粘土材料で塑性変形を考慮するときに修正 Cam-Clay モデルがよく使われている．弾塑性構成式の良否は降伏曲面の形によって大きく左右され，実粘土の挙動を忠実に再現する降伏条件を見つけ出すことが重要な問題となっている．そこでこの章ではまず最初に修正 Cam-Clay モデルの降伏条件について述る．次にこれを拡張し，新しい降伏条件を持つ一般化楕円型モデルを導く．

なおここで扱う応力はすべて有効応力である．

受付：1992年5月11日
実験結果は第27回土質工学会，平成3年度土木学会西部支部研究発表会で発表済
*土木工学科，Dept. of Civil Engineering.

2－1　修正 Cam-Clay モデルの降伏条件

平均応力 p と偏差応力 q の応力平面で，修正 Cam-Clay モデルの降伏曲線は次式で与えられる．

$$\left(p-\frac{p_y}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{\eta_f}\right)^2=\left(\frac{p_y}{2}\right)^2 \tag{1}$$

ここで，

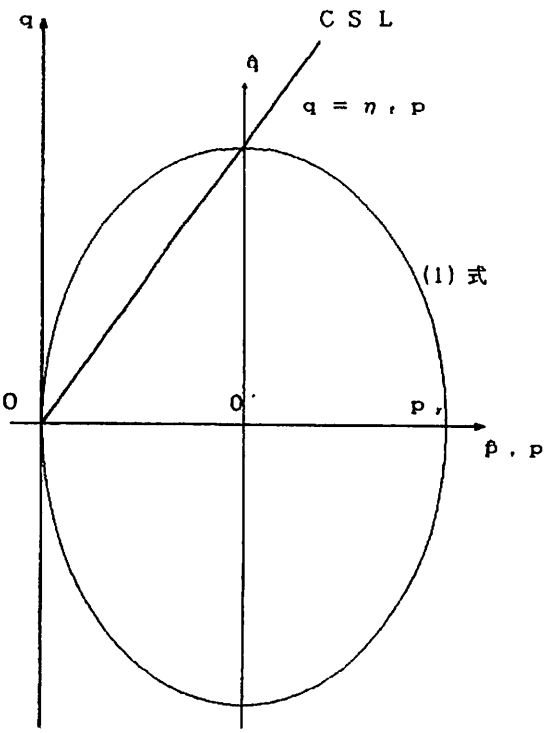
$$p=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \tag{2}$$

$$q=\sigma_1-\sigma_3 \tag{3}$$

σ_i：主応力（i＝1，2，3）

η_f：$p-q$ 面での破壊線CSLの勾配

p_y：代表降伏応力．降伏曲線の大きさを与える応力パラメータ．降伏曲線と p 軸との交点の p 座標値（図－1参照）．



図－1　修正 Cam-Clay モデルの降伏曲線

2－2　一般化楕円の導入

p 方向に $p_y/2$ だけ平行移動した座標系 $0'\ \bar{p}\ \bar{q}$ を考える．(1)式で表される楕円をこの座標系で表すと，

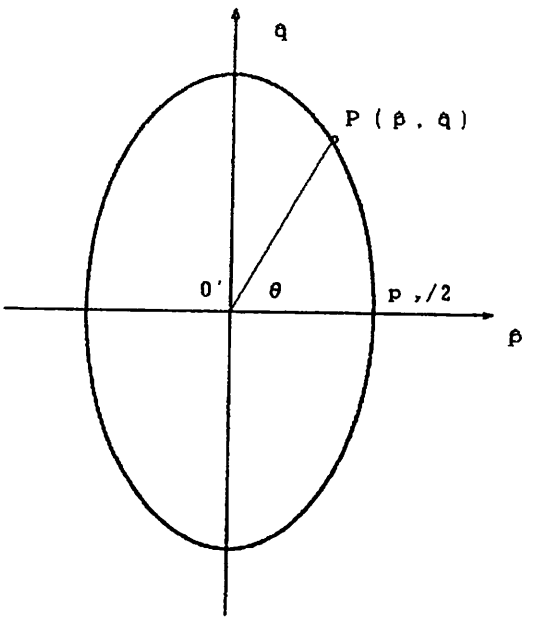
$$\bar{p}=p-\frac{p_y}{2} \tag{4}$$

$$\bar{q}=q \tag{5}$$

より

$$\bar{p}^2+\left(\frac{\bar{q}}{\eta_f}\right)^2=\left(\frac{p_y}{2}\right)^2 \tag{6}$$

となる．(6)式は 0' 点に中心を持つ反径 p_y，長径 $\eta_f p_y$ の楕円である．これは θ を媒介変数として，次式で表される．



図－2　媒介変数による楕円の表示

$$\bar{p}=\frac{p_y}{2}\cos\theta \tag{7}$$

$$\bar{q}=\frac{\eta_f p_y}{2}\sin\theta \tag{8}$$

(7)，(8)式を基本として次のように楕円を拡張する．

$$\bar{p}=\frac{p_y}{2}\cos^L\theta \tag{9}$$

$$\bar{q}=\frac{\eta_f p_y}{2}\sin^L\theta \tag{10}$$

(9), (10)式で与えられる曲線でL＝1とすると楕円となることは明らかである．このことからこの曲線を一般化楕円と呼ぶことにする．

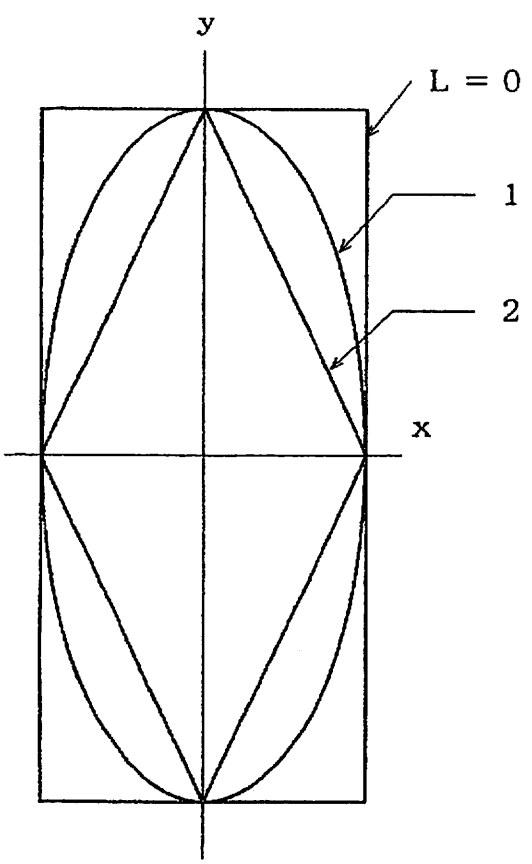
(9), (10)式より

$$\left(\frac{d\hat{p}}{d\theta}\right)_{\theta=0}=\infty \tag{11}$$

$$\left(\frac{d\hat{q}}{d\theta}\right)_{\theta=\pi/2}=\infty \tag{12}$$

となる．したがって一般化楕円は $\hat{p}$ 軸，$\hat{q}$ 軸と直交することがわかる．

パラメータ L による一般化楕円の形状変化の様子を図－3に示す．L は降伏曲線の形状を与えるパラメータであることからこれを形状係数と呼ぶ．



図－3　一般楕円型の形状変化の様子

2－3　一般化楕円による降伏面

粘土の複合硬化則による降伏条件式は次式で与えられる[21]．

$$f(\hat{\sigma})-f(H)=0 \tag{13}$$

$$\hat{\sigma}=\sigma-\hat{\alpha} \tag{14}$$

$$H=\varepsilon_v^p \tag{15}$$

ここで

$f(\hat{\sigma})$：負荷関数
$f(H)$：硬化関数
σ：応力テンソル
$\hat{\alpha}$：降伏局面の移動を表すテンソル
H：硬化パラメータ
ε_v^p：塑性体積ひずみ

である．

(9), (10)式から θ を消去して

$$\hat{p}^{2/L}+\left(\frac{\hat{q}}{\eta_f}\right)^{2/L}=\left(\frac{p_y}{2}\right)^{2/L} \tag{16}$$

一方

$$\hat{p}=I_{\hat{\sigma}}/3 \tag{17}$$

$$\hat{q}=\sqrt{3J_{\hat{\sigma}}} \tag{18}$$

であるので(16), (17), (18)式より，

$$I_{\hat{\sigma}}^{2/L}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{\eta_f}\right)^{2/L}J_{\hat{\sigma}}^{2/L}=\left(\frac{3p_y}{2}\right)^{2/L} \tag{19}$$

を得る．(19)式を(13)式と比較して
負荷関数，硬化関数はそれぞれ次のようになる．

$$f(\hat{\sigma})=I_{\hat{\sigma}}^{2/L}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{\eta_f}\right)^{2/L}J_{\hat{\sigma}}^{1/L} \tag{20}$$

$$F(H)=\left(\frac{3p_y}{2}\right)^{2/L} \tag{21}$$

ここで

$I_{\hat{\sigma}}$：$\hat{\sigma}$ の一次不変量
$J_{\hat{\sigma}}$：$\hat{\sigma}^*$の二次不変量
$\hat{\sigma}^*$：$\hat{\sigma}$ の偏差テンソル

である．

2－4　p_y と ε_v^p との関係

粘土材料の弾塑性構成式を扱う際，通常硬化パラメータとして塑性体積ひずみをとることが多い．修正 Cam-Clay モデルでも硬化パラメータは塑性体積ひずみである．ここでもそれにならう．

(13) 式から分かるように硬化関数は降伏曲面の大きさを与える関数であり，(21) 式ではこれが p_y の関数として示されている．ここでは p_y と硬化パラメータ H との関係を与える．

図－4 は圧密圧力 p と体積比 $v=1+e$ との関係を示している．

変形前後の状態を A, B とする．A, B ともに降伏状態にあり塑性変形が継続中とする．これらの状態は p, q, v の 3 次元空間で点として表され，その座標は次のようである．

A (p_A, q_A, v_A)
B (p_B, q_B, v_B)

A, B に対応する代表降伏応力を p_{yA}，p_{yB} とする．図－4 は状態点を $\ln p-v$ 平面に投影し直したものである．NCL ($q=0$) は等方圧密曲線で $\ln p-v$ 平面では傾き λ の直線関係となることが実験的に知られている．AA', BB' 線は膨潤曲線とよばれ，$dq=0$ で除荷したときの体積変形の回復曲線である．ここで代表降伏応力とは状態点を通る膨潤曲線と等方圧密曲線との交点の平均応力のことをいう．

状態点 A から B に移る場合の体積ひずみを考える．圧縮を正にとると

$$\varepsilon_v=\varepsilon_v^e+\varepsilon_v^p$$

$$=\frac{v_A-v_B}{v_A}=\frac{v_P-v_B}{v_A}+\frac{v_A-v_P}{v_A}$$

$$=\frac{\kappa}{v_A}\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)+\frac{\lambda-\kappa}{v_A}\ln\left(\frac{p_{yB}}{p_{yA}}\right) \tag{22}$$

(22) 式の第一項は変形の回復成分，第二項は非回復成分であることから，

$$\varepsilon_v^p=\frac{\lambda-\kappa}{v_A}\ln\left(\frac{p_{yB}}{p_{yA}}\right) \tag{23}$$

$$\varepsilon_v^e=\frac{\kappa}{v_A}\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \tag{24}$$

となる．これらのことから初期状態での代表降伏応力を p_{y0}，任意の応力点での代表降伏応力 p_y としたとき (23) 式で

$p_{yA} \rightarrow p_{y0}$
$p_{yB} \rightarrow p_y$
$v_A \rightarrow v_0$

と読み替えて

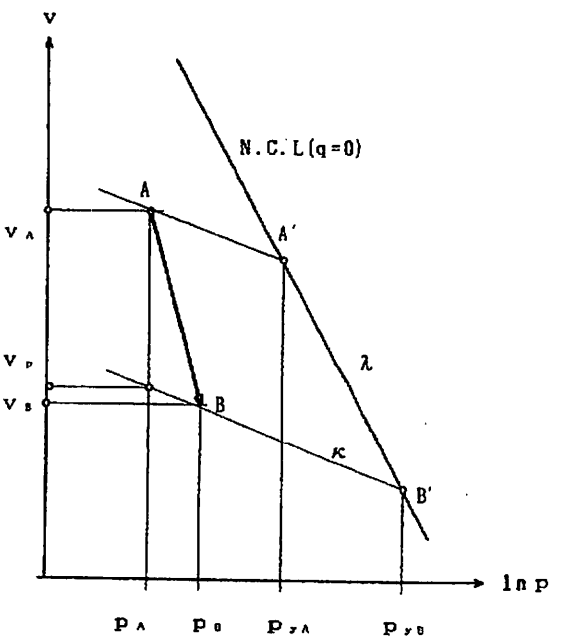
$$p_y=p_{y0}\exp\left(\frac{v_0\varepsilon_v^p}{\lambda-\kappa}\right) \tag{25}$$

を得る．

(21), (25) より硬化関数 F は次式のようになる．

$$F=\left\{\frac{3p_{y0}}{2}\exp\left(\frac{v_0\ \varepsilon_v^p}{\lambda-\kappa}\right)\right\}^{2/L} \tag{26}$$

$$F'=\frac{dF}{d\varepsilon_v^p}=\frac{2Fv_0}{L(\lambda-\kappa)} \tag{27}$$



図－4　圧密圧力と体積比例の関係

2－5　降伏曲面の中心

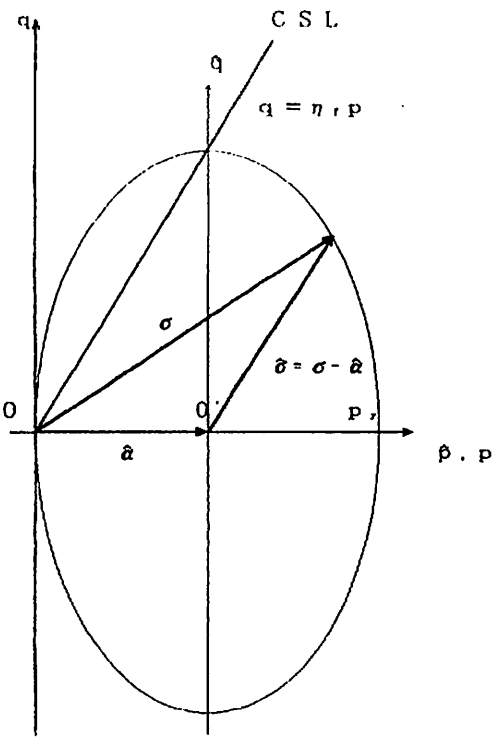
(14) 式における $\hat{\alpha}$ について検討する．$\hat{\alpha}$ は降伏曲面の移動を表すテンソルで図－5 から，I を単位テンソルとして

$$\hat{\alpha} = \frac{p_y}{2} I \tag{28}$$

となる．(25)，(28) から

$$\hat{\alpha} = \frac{p_{y0}}{2} \exp\left(\frac{v_0 \varepsilon_v^p}{\lambda - \kappa}\right) I \tag{29}$$

を得る．



図－5　降伏曲線の中心移動テンソル

3　応力ひずみ関係

3－1　ひずみ速度の分離と弾性ひずみ速度

ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ は弾性成分 $\dot{\varepsilon}^e$ と塑性成分 $\dot{\varepsilon}^p$ の和で与えられると仮定する．

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \tag{30}$$

このうち弾性ひずみ速度は弾性係数テンソル E を使って次のように表される．

$$\dot{\varepsilon}^e = E^{-1}\dot{\sigma} \tag{31}$$

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e \tag{32}$$

3－2　塑性ひずみ速度

降伏条件式 (13) を時間微分して

$$\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}}(\dot{\sigma} - \dot{\hat{\alpha}})\right\} - F'\dot{H} = 0 \tag{33}$$

関連流れ則を仮定すると $\dot{\hat{\lambda}}$ を比例係数として，塑性ひずみ速度が次式で与えられる．

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\hat{\lambda}}\hat{n} \tag{34}$$

$$\hat{n} = \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \Big/ \left\| \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right\| \tag{35}$$

3－3　ひずみ速度と応力速度の関係

(30)，(31)，(34)，(39) 式よりひずみ速度と応力速度の関係式 (36) を得る．

$$\dot{\sigma} = \left\{E - \frac{(\hat{n}E)\otimes(\hat{n}E)}{\hat{D}\mathrm{tr}(\hat{n}E\hat{n})}\right\}\dot{\varepsilon} \tag{36}$$

(36) 式は (13) 式の降伏条件に対する弾塑性構成式となっている．(36) 式中の｛　｝内の各量の詳細を次に述べる．

(36) 式の $\dot{\hat{\lambda}}$ を用いて (33) 式の $\dot{H}$，$\dot{\hat{\alpha}}$ は次のようになる．

$$\dot{\hat{\alpha}} = \dot{\hat{\lambda}}\hat{a} \tag{37}$$

$$\dot{H} = \dot{\hat{\lambda}}\hat{h} \tag{38}$$

(37)，(38) 式と (33) 式より $\dot{\hat{\lambda}}$ が求められる．

$$\dot{\hat{\lambda}} = \frac{\mathrm{tr}(\hat{n}\dot{\sigma})}{\hat{D}} \tag{39}$$

ここで $\hat{D}$ は塑性係数と呼ばれ次式で表される．

$$\hat{D} = \frac{F'\hat{h}}{\left\| \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right\|} + \mathrm{tr}(\hat{n}\dot{\sigma}) \tag{40}$$

3－3　塑性係数 $\hat{D}$ の計算

(40) 式中の $\hat{a}$，$\hat{h}$，などは次のようにして求められる．

3－3－1　$\hat{a}$ について

(29) 式を時間微分して，

$$\dot{\hat{\alpha}} = \frac{v_0 \mathrm{tr}(\hat{n})}{\lambda - \kappa} \frac{p_y}{2} \dot{\hat{\lambda}} I \tag{41}$$

(37), (41)より

$$\hat{a}=\frac{v_0\,\mathrm{tr}(\hat{n})}{\lambda-\kappa}\,\frac{p_y}{2}\,I \tag{42}$$

となる.

3－3－2　$\hat{h}$ について

(15)式を時間微分して

$$\dot{H}=\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\lambda}\,\mathrm{tr}(\hat{n}) \tag{43}$$

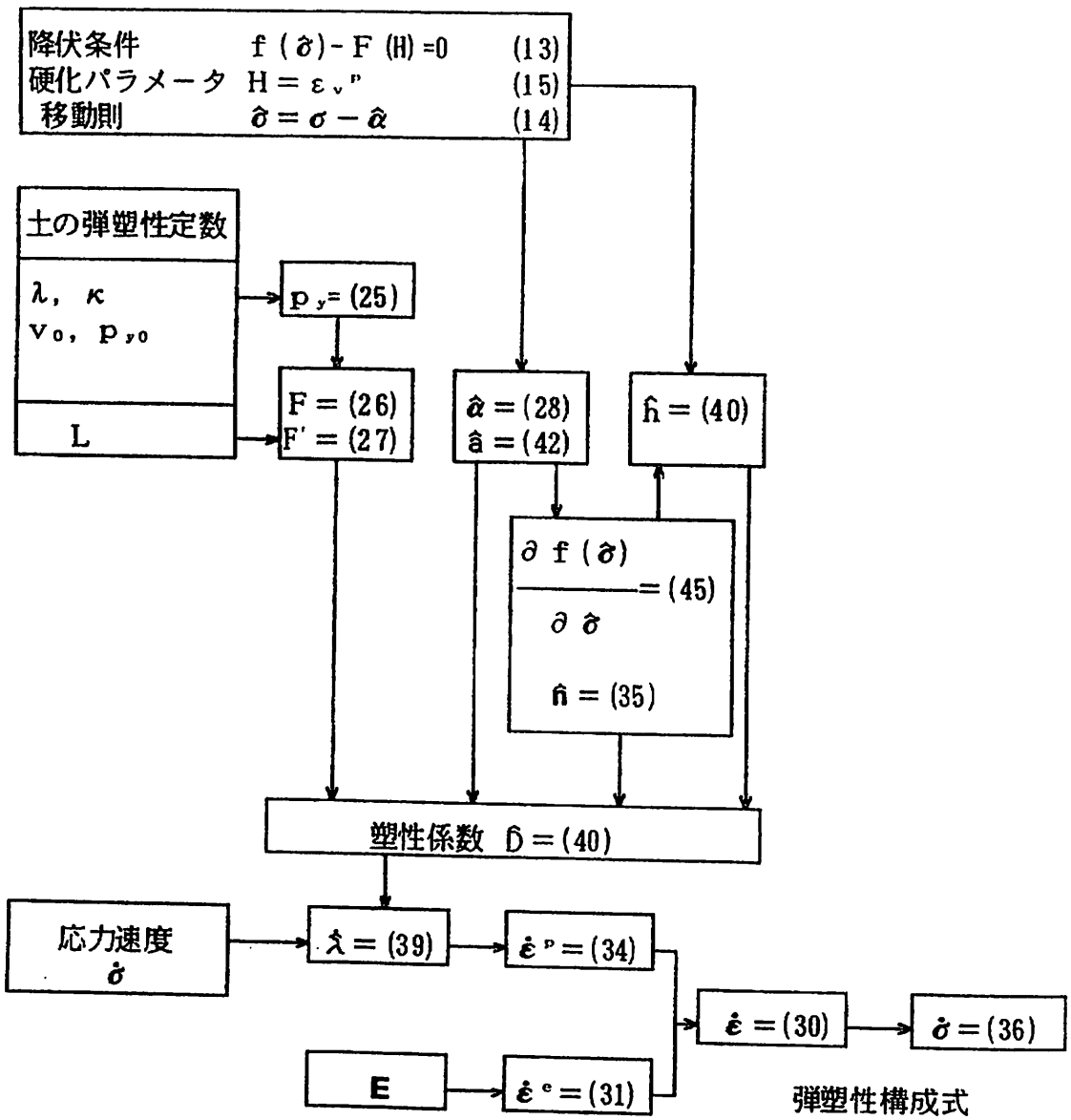
(38), (43) より次式を得る.

$$\hat{h}=\mathrm{tr}(\hat{n}) \tag{44}$$

3－3－3　$\left\|\dfrac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial\hat{\sigma}}\right\|$ について

(20)式で与えられる $f(\hat{\sigma})$ に対して微分を実行して次式を得る.

$$\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial\hat{\sigma}}=\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial I_{\hat{\sigma}}}I+\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial J_{\hat{\sigma}}}\hat{\sigma}^* \tag{45}$$



図－6　弾塑性構成式導出の流れ

ここで

$$\frac{\partial f(\tilde{\sigma})}{\partial I_{\tilde{\sigma}}}=\frac{2}{L}I_{\tilde{\sigma}}^{2/L-1} \tag{46}$$

$$\frac{\partial f(\tilde{\sigma})}{\partial J_{\tilde{\sigma}}}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\eta_f}\right)^{2/L}\frac{J_{\tilde{\sigma}}^{1/L-1}}{L} \tag{47}$$

である．

以上の諸量を(36)式に代入して，一般化楕円型モデルによる弾塑性構成式を得る．

これまでの計算の流れを図－6に示す．

4．一般化楕円型のモデルの適用性の検討

新しく導いたモデルの実際問題への適用性を島尻粘土を使った非排水断試験結果[3)4)]と比較して検証する．実験結果の詳細は参考文献に述べてあるのでここでは省略する．

一般化楕円型モデルにおいて $L=1$ とすると従来の修正 Cam-Clay モデルに一致する．そこで一般化楕円型モデルと修正 Cam-Clay モデルについても比較し新モデルによって改良された点を明らかにした．

4－1　一般化楕円型のモデルで使う定数

一般化楕円型のモデルによる計算で必要な弾塑性定数の数は次の5個である．

1　λ：圧縮指数
2　κ：膨潤指数
3　η_f：CSL の勾配（図－1参照）
4　G：せん断弾性係数
5　N：等方圧密線（NCL）上の $p=1$ に対する体積比（図－4参照）

λ，κ は圧密試験によって得られる．η_f は三軸圧縮試験によって得られる．島尻粘土の場合これらの値は表－1に示す値が得られており，この計算においてもこの値を使う．

表－1　島尻粘土の弾塑性定数

項　目	値
λ	0.170
κ	0.126
η_f	1.15
N	2.0
ν	0.3

Gは初期状態でのポアソン比を仮定し，体積弾性係数Kから決定し，応力に対して非依存を仮定し一定とした．

$$K=\frac{\kappa}{pv} \tag{48}$$

$$G=3K\frac{1-2\nu}{1+2\nu} \tag{49}$$

(48)，(49)式から分かるようにKは平均応力の関数となっており，体積変形について非線形弾性体となっている．このG,Kの組み合わせの時 ν は応力依存性である．

4－2　初期条件と非排水条件

弾塑性解析では初期条件がどのようであるかは重要な問題である．

初期の応力状態を p_A，q_A 体積比を v_A とすると，初期の代表降伏応力 p_{yA} は図－4を参照して

$$p_{yA}=\exp\left(\frac{N-v_A-\kappa\ln p}{\lambda-\kappa}\right) \tag{50}$$

$$f=\left(\frac{p_A-p_{yA}/2}{p_{yA}/2}\right)^{2/L}+\left(\frac{q_A/\eta_f}{p_{yA}/2}\right)^{2/L} \tag{51}$$

としたとき

$f=1$：弾塑性状態
$f<1$：弾性状態　(52)

である．

対象とする実験例は正規圧密粘土であるので，初期状態からすでに弾塑性状態にあり，(52)式が成立している．

次に非排水条件について考える．計算例はひずみ制御による応力応答解析である．実験は非排水状態でお行われているのでこれを式で表すと，

$$\mathrm{tr}(\dot{\varepsilon})=0 \tag{53}$$

さらに軸対象条件より

$$\dot{\varepsilon}_{22}=\dot{\varepsilon}_{33} \tag{54}$$

となるので，(53)，(54)式より非排水条件として次式が得られる．

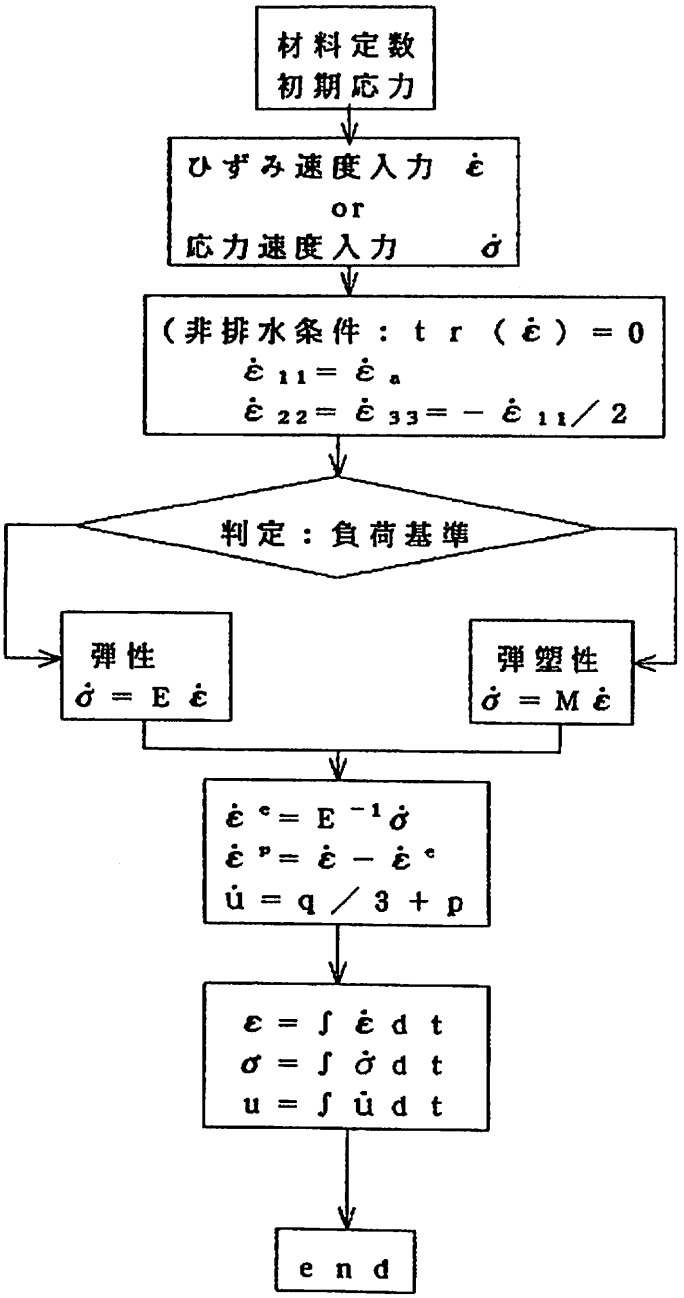
$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_a \tag{55}$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33} = -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_a \tag{56}$$

これを行列で表すと，

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_a/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_a/2 \end{bmatrix} \tag{57}$$

となり，この $\dot{\varepsilon}$ を(36)式に代入して応力応答 $\dot{\sigma}$ を求めることになる．



図－7　非排水計算の流れ

4－3　計算の流れ

一般化楕円型モデルでの非排水計算の順序を図－7に示す．

図に示すように，まず最初に材料定数と初期条件を設定する．次に軸ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_a$ を与え，これと非排水条件からひずみ速度テンソル $\dot{\varepsilon}$ を求める．

次に土の応力状態が弾塑性状態であるかどうかを判定し弾性状態であれば弾性係数テンソル E を，弾塑性状態であれば弾塑性テンソル M を求める．

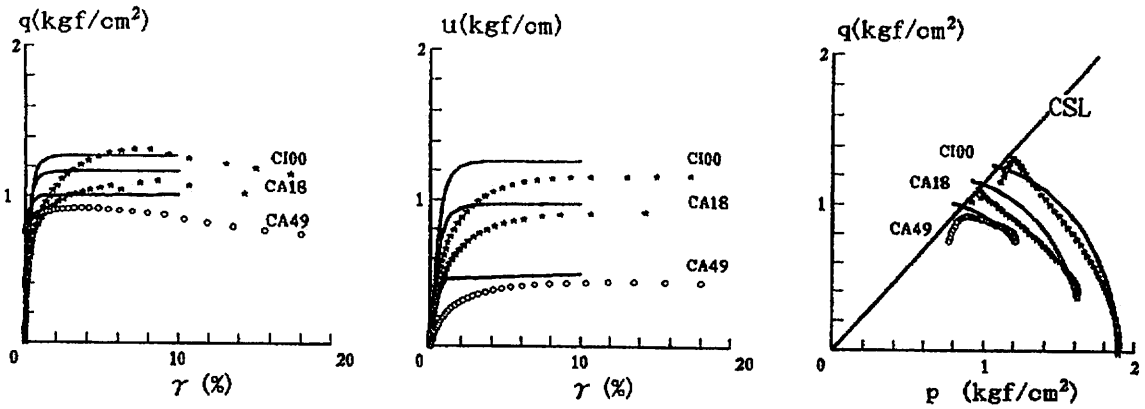
次に $\dot{\varepsilon}$ に対応する応力速度 $\dot{\sigma}$ を求め，$\dot{\sigma}$ から弾性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^e$，塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^p$ を求める．ひずみや応力の増分が求められたならこれらを積分してひずみ，応力を求める．

4－4　計算結果の比較

図－8，9は一般化楕円型モデルによる応力～ひずみ～間隙水圧関係を計算し実験値と比較してみた結果である．実験は正規圧密粘土の非排水三軸圧縮試験であり，この時のひずみ速度は $\dot{\varepsilon}_a$＝1／1000％／min である．

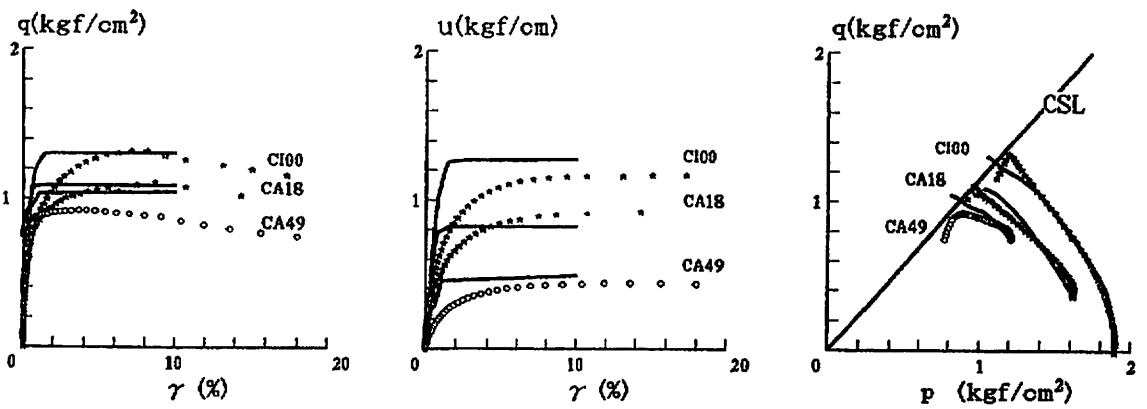
図中のマーク点が実験値であり，太線が計算値である．図－8は修正 Cam-Clay モデルによる計算値，図－9は一般化楕円型モデルによる計算値である．

応力ひずみ関係については両モデルともせん弾の初期部分で実験値よりひずみの発生量を小さく計算している．この原因としては，粘性ひずみが考慮されていないことが考えられる．



(a) 応力－ひずみ関係　(b) 間隙水圧－ひずみ関係　(c) 非排水ストレスパス

図－8　一般化楕円型モデルによる計算結果と実験値の比較
(L＝1:修正 Cam-Clay モデル)



(a) 応力－ひずみ関係　(b) 間隙水圧－ひずみ関係　(c) 非排水ストレスパス

図－9　一般化楕円型モデルによる計算結果と実験値の比較

一般化楕円型モデルと修正 Cam-Clay モデルの計算値比較をすると，全体的には特に大きな差は認められない．

ところが非排水ストレスパスについて見ると，一般化楕円型モデルの場合，修正 Cam-Clay モデルで見られた不一致がなくなり実験値とよく合致していることが分かる．

5　結論

正規圧密粘土の構成式として修正 Cam-Clay モデルの降伏曲線の表示式を拡張した一般化楕円型モデルを新しく導いた．このモデルによると従来から指摘されていた修正 Cam-Clay モデルでは良く合わなかった点が改良され粘土のせん断挙動特に非排水ストレスパスの挙動が非常に良く再現できることが確かめられた．しかしこのモデルでも軟化現象，時間依存性挙動が表されず，これらの点に改良の余地がある．これらを取り入れてより一般的な構成式を確立する必要がある．

謝辞：本論文の内容の大部分は筆者が広島大学研修中にまとめたものです．本論文中で利用した実験データは平成３年度卒業研究のテーマとして精力的に実験を実行してくれた瑞慶覧長賢君と宮崎光秀君によるものです．特に瑞慶覧長賢君には日夜実験室に閉じこもり微妙な操作を行い精度の高い実験データを提供して頂きました．ここに記して感謝します．また筆者の不在中実験を指導をし，適切な指示を与えてくださいました上原方成教授，大学院生呉屋健一君にお礼を申し上げます．

参考文献

1）Roscoe, K.H and Burland, J.B. (1968)："On the Generalised Stress-Strain Behavior of ' Wet' Clay", Engineering Plasticity eds. J. Heyman and F.A.Leckie, Cambridge University Press, pp.535-609.

2）橋口公一，最新弾塑性学，朝倉書店．

3）呉屋健一，上原方正，原久夫：正規圧密粘土の繰り返し平均主応力一定排水せん断試験結果について，平成３年土木学会西部支部研究発表会講演概要集，pp.586-587.（1992-3）．

4）瑞慶覧長賢，上原方成，原久夫，呉屋健一，住岡宣博：正規粘土の平均有効応力一定繰り返し排水せん断試験結果,第27回土質工学発表会講演概要集（992-6）．