一般化Voigtモデルによる粘土の粘弾性構成式とその適用」性について

メタデータ	言語:
	出版者: 琉球大学工学部
	公開日: 2007-08-23
	キーワード (Ja):
	キーワード (En): Clay, Viscoelastic, Stress-strain
	作成者: 原, 久夫, Hara, Hisao
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/1436

一般化 Voigt モデルによる粘土の粘弾性構成式とその適用性について

原　久夫*

An Application of Visco-elastic Constitutive Equation by Generalized Voigt Model to Deformation of Clay

Hisao HARA*

Abstract

Clay has the time dependnt characteristics of deformation such as the hysteresis loop of the stress strain curve, creep, stress relaxation, and secondary consolidation. In order to describe these behavior of clay, a viscoelastic constitutive equation by generalized Voigt model has been introduced.

And the applicability of the model is discussed by comparision of the stress- strain- time behavior between the model and real clay.

Key Words: Clay, Viscoelastic, Stress–strain

1．まえがき

粘土の変形には繰り返し載荷によるヒステリシスループ[1),2),3),4),5),6)]，二次圧密挙動[7)]，クリープ現象[8),9),10),11),12),13)]，応力ひずみ曲線のひずみ速度依存性[14),15)]，応力緩和などの顕著な時間依存性の挙動がある．これらの時間依存性挙動を表すのに従来から粘弾性体が用いられてきた．本論文では，4要素一般化Voigtモデル，一般化Maxwellモデルを導出し，それらの力学的等価性を示す，次にこれらのモデルを使って粘弾性体，弾粘性体の時間依存性挙動を明かにし，実粘土の変形の時間依存性挙動を記述する上での問題点とその適用性について検討する．

2 粘弾性体モデル[16)]

2－1 基本モデル

粘弾性体は時間依存性の変形特性をもつ．その基本モデルとしてクリープ現象を表すMaxwellモデルと応力緩和を表すVoigtモデルを図1，2に示す．Maxwellモデルは，ひずみ入力に対する応力の応答，Voigtモデルは応力入力に対するひずみ応答を記述するのに適している．ここで

C_g, C_i　：コンプライアンス（弾性係数の逆数）
η, η_i　：粘性係数
T　：緩和時間
T_i　：遅延時間

である．

緩和時間と遅延時間は次式で定義される．

$$T = C_g\eta = \frac{\eta}{E_g} \tag{1}$$

$$T_i = C_i\eta_i = \frac{\eta_i}{E_i} \tag{2}$$

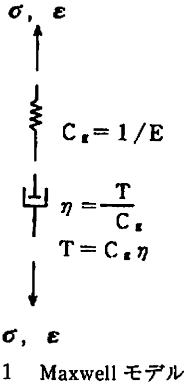


図1　Maxwell モデル

受理　1993年5月10日

* 工学部土木工学科　Dept. of Civil Eng., Fac. of Eng.

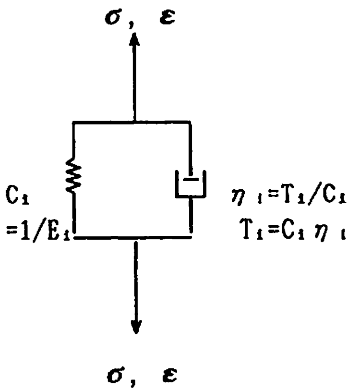


図2　Voigt モデル

2－2　Maxwellモデル

Maxwellモデルの支配方程式は単軸状態の応力とひずみを σ，ε として，次の式で与えられる．

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=C_g\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\eta} \tag{3a}$$

あるいは

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{T}=\frac{1}{C_g}\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{3b}$$

式(5)で表される単位スッテプひずみ関数 $\varepsilon=1(t)$ に対する式(3)の解は次のようになる．

$$\sigma=\frac{1}{C_g}e^{-t/T} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon(t)=0, & t<0\\ \varepsilon(t)=1, & t\geq 0\end{array}\right\} \tag{5}$$
$$\sigma=1(t)$$

また単位ステップ応力 $\sigma=1(t)$ に対するひずみ応答は次のようになる．

$$\varepsilon=C_g+\frac{t}{\eta}=C_g\left(1+\frac{t}{T}\right) \tag{6}$$

式(4)で表される応答の様子を図3に示す．

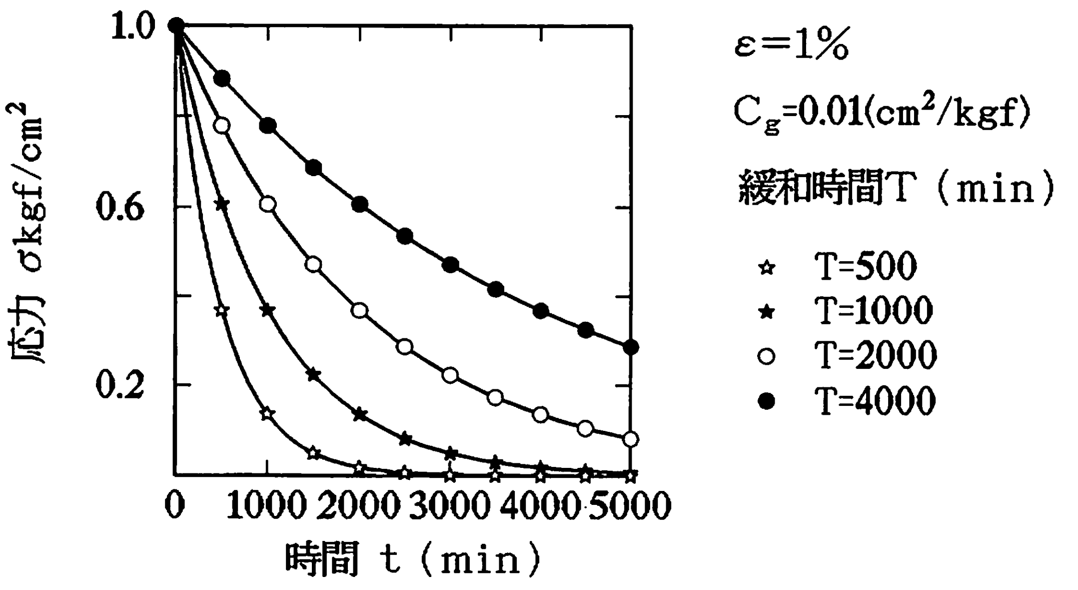


図3　Maxwell モデルの単位ステップひずみに対する応力の応答（応力緩和）

2－3　Voigtモデル

Voigtモデルの支配方程式は次のようである．

$$\sigma=\frac{\varepsilon}{C_i}+\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{7}$$

ステップ応力に対する式(7)の解は次のようになる．

$$\varepsilon=C_i\left\{1-exp\left(-\frac{t}{T_i}\right)\right\} \tag{8}$$

式(8)で表されるひずみ応答の様子を図4に示す．

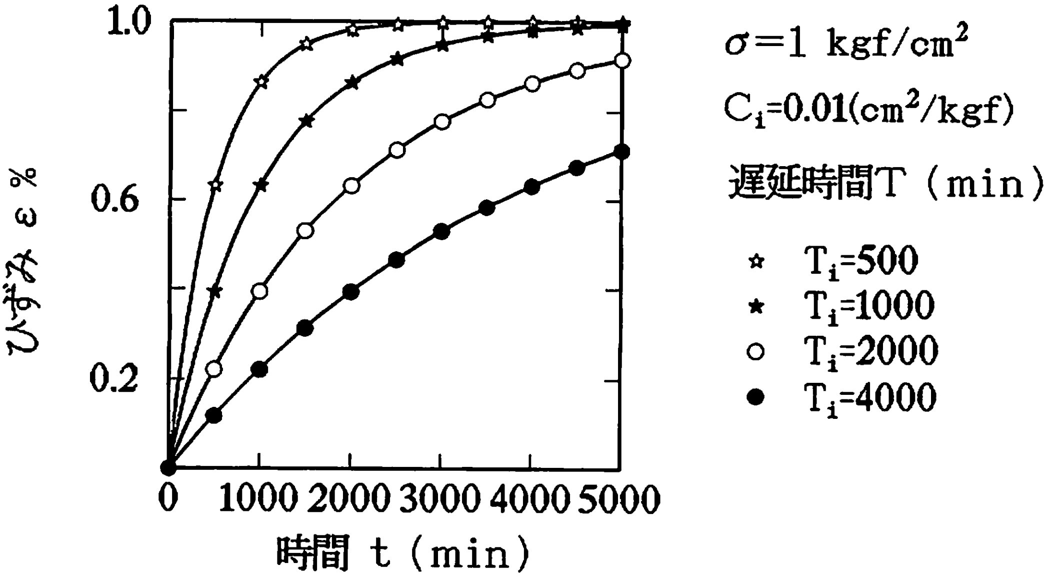


図4　Voigt モデルの単位ステップひずみに対する応力の応答(クリープ)

2－4　Maxwell モデルと Voigt モデルの定数決定

材料特性を Maxwell モデルあるいは Voigt モデルのような2要素のモデルで表すときにはステップ応力を与えるクリープ試験を行い，その応答関数式(6)，(8)から定数を決定すればよい．

クリープ試験の時間－ひずみ曲線上の任意の2つの時間t_1，t_2におけるひずみをε_1，ε_2とするとMaxwellモデルの定数は次式で与えられる．

$$C_g=\frac{\varepsilon_1 t_2-\varepsilon_2 t_1}{t_2-t_1}\ \frac{1}{\sigma} \tag{9}$$

$$T=\frac{\varepsilon_1 t_2-\varepsilon_2 t_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \tag{10}$$

$$\eta=\frac{t_2-t_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\sigma \tag{11}$$

次にクリープ試験の時間－ひずみ曲線上の任意の2つの時間t_1，t_2におけるひずみをε_1，ε_2，ひずみ速度を$\dot{\varepsilon}_1$，$\dot{\varepsilon}_2$とするとVoigtモデルの定数は次式で与えられる．

$$C_i=\frac{\dot{\varepsilon}_2\varepsilon_1-\dot{\varepsilon}_1\varepsilon_2}{\dot{\varepsilon}_2-\dot{\varepsilon}_1}\ \frac{1}{\sigma} \tag{12}$$

$$\eta_i=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\dot{\varepsilon}_2\varepsilon_1-\dot{\varepsilon}_1\varepsilon_2}\ \sigma \tag{13}$$

$$T_i=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\dot{\varepsilon}_2-\dot{\varepsilon}_1} \tag{14}$$

3　多要素モデル

実粘土の時間依存性挙動はMaxwellモデルやVoigtモデルのような単純なモデルでは表現できずこれらの基本要素を組み合わせていくことになる．

ばね要素とダッシュポットをそれぞれ一つの要素として考え，その要素を適当に組み合わせて対象としている粘弾性体の挙動を表そうとすることは自然であろう．組み合わせの方法は自由で，実際に問題に応じて数多くのモデルが提案されている．その中で本論文で述べる一般化Maxwellモデルあるいは一般化Voigtモデルは，前節で述べたMaxwellモデルとVoigtモデルの持つ特徴を残し，かつ両者が等価であるという利点を有している．

3－1　一般化 Maxwellモデル

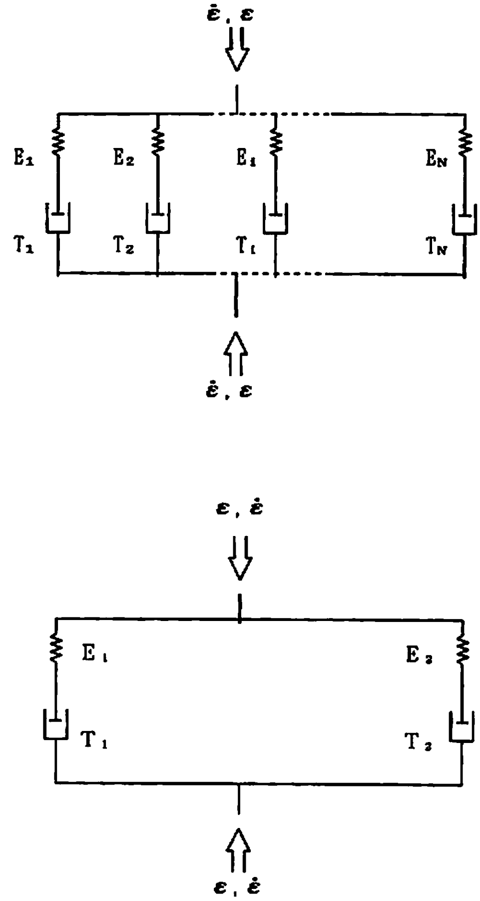


図5　一般化 Maxwell モデルと 4 要素 Maxwll モデル

一般化 Maxwell モデルは単純 Maxwell モデルを並列につないだモデルで，図5に示すようである．このうち単純 Maxwell モデルを2個並列につないだものを4要素 Maxw-ell モデルと呼ぶ．このモデルは左右のひずみ，ひずみ速度が等しく，ひずみ入力に対する応力応答計算に適している．

左要素

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{T_1} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{15}$$

右要素

$$\frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{T_2} = E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{16}$$

応力分担から

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{17}$$

式(15)，(16)，(17)から σ_1，σ_2 を消去して次の支配方程式を得る．

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T_1 T_2} = (E_1 + E_2)\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{18}$$

単位ステップひずみ $\varepsilon = 1$ (t) に対する式(18)の応力応答は次式のようである．

$$\sigma(t) = E_1 exp\left(\frac{-t}{T_1}\right) + E_2 exp\left(\frac{-t}{T_2}\right) \tag{19}$$

4要素の場合と同様にして n 個の Maxwell モデルからなる一般化 Maxwell モデルの単位ステップひずみに対する応力応答は次のようになる．

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} E_i exp\left(\frac{-t}{T_i}\right) \tag{20}$$

式(20)は Prony 級数と呼ばれ，n 個の緩和時間 T_i を特性値としその重み E_i の指数関数の重ね合わせとして与えられる．

式(19)による応力緩和の計算例を図6に示す．図では左要素の緩和時間 T を変化させたときのパラメトリック解析結果を示している．どのケースも応力は0に漸近していき，その様子は緩和時間の大きさによって変化する．特に緩和時間が無限に大きくなると応力緩和は有限値で安定する．この時の応力応答は式(19)に対して式(21)，式(20)に対して式(22)と表され，これらを奇数要素の一般化Maxwellモデルという．

$$\sigma(t) = E_1 + E_2 exp\left(\frac{-t}{T_2}\right) \tag{21}$$

$$\sigma(t) = E_1 + \sum_{i=2}^{n} E_i exp\left(\frac{-t}{T_i}\right) \tag{22}$$

奇数要素の一般化 Maxwell モデルはひずみエネルギーが保存されることを意味し，弾性個体としてとらえることができる．一方，有限の緩和時間を持つ材料では完全に応力緩和し，応力がゼロとなる．これは粘性液体としての性質である．これらのことから一般化 Maxwell モデルは，緩和時間を適当に選べば，弾性個体から完全粘性液体までの挙動を表現できることが分かる．

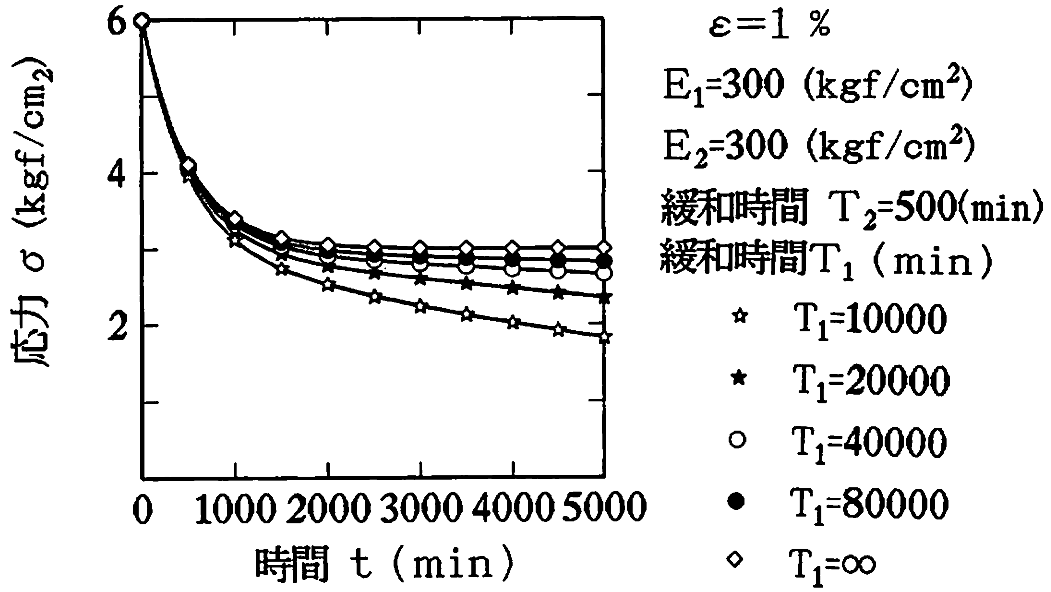


図6　単位ステップひずみに対する一般化 Maxwell モデルの応力緩和

3－2　一般化 Voigt モデル

一般化 Voigt モデルは単純 Maxwell モデルと単純 Voigt モデルを直列につないだモデルで，図7に示すようである．単純 Maxwell モデルと Voigt モデルを1個ずつつないだモデルを4要素 Voigt モデルと呼ぶ．

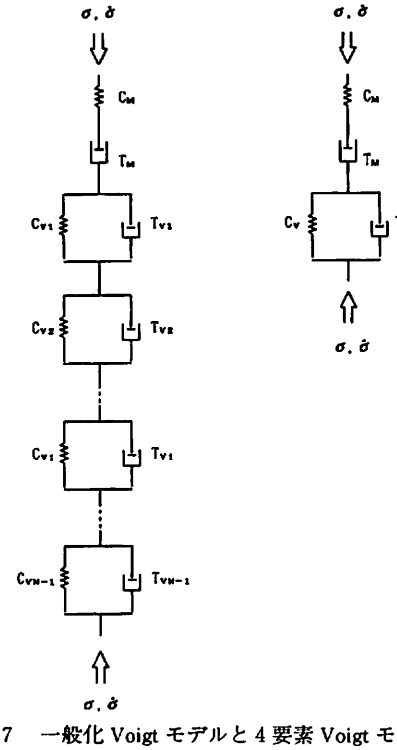


図7　一般化 Voigt モデルと4要素 Voigt モデル

一般化Voigtモデルは単純 Maxwellモデルと単純 Voigtモデルの応力が等しく，応力入力に対するひずみ応答の計算に適している．また，一般化 Voigt モデルの支配方程式は一般化 Maxwell モデルの支配方程式と同一形式で表されることから，両モデルは力学的に等価である．このことはばねとダッシュポットを任意に組み合わせて構成されるその他の粘弾性モデルと比較して大きな利点となっている．

一般化 Voigt モデルの支配方程式は以下のように導かれる．

単純 Maxmwell 要素

$$\frac{d\varepsilon_M}{dt} = C_M \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_M} \tag{23}$$

Voigt要素

$$\frac{d\varepsilon_V}{dt} = \frac{\varepsilon_V}{T_V} = \frac{C_V}{T_V}\sigma \tag{24}$$

全体のひずみは

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_V \tag{25}$$

であることより，一般化Voigtモデルの支配方程式として次式を得る．

$$C_M \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{C_M}{T_M} + \frac{C_M + C_V}{T_V}\right)\frac{d\sigma}{dt} + \frac{C_M}{T_M T_V}\sigma$$

$$= \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{T_V}\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{26}$$

上式は一般化 Maxwell モデルの支配方程式(18)と比較して同一形式の微分方程式になっていることが分かる．このことは一般化 Maxwell モデルと一般化 Voigt モデルモデルが力学的に等価なモデルあることを示している．式(18)と式(26)の σ，ε について各項の係数を比較して，両モデル定数間の関係が次のように与えられる．

$$\frac{1}{C_M}\left(\frac{C_M}{T_M} + \frac{C_M + C_V}{T_V}\right) = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \tag{27}$$

$$T_M T_V = T_1 T_2 \tag{28}$$

$$\frac{1}{C_M} = E_1 + E_2 \tag{29}$$

$$\frac{1}{C_M T_V} = \frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2} \tag{30}$$

式(27)-(30)より4要素 Voigt モデルの定数が与えられたとき，等価な4要素 Maxwell モデルの定数は次式で与えられる．

$$T_2 = \frac{-B + \sqrt{(B^2 - 4T_M T_V)}}{2} \tag{31}$$

$$T_1 = \frac{T_M T_V}{T_2} \tag{32}$$

$$E_1 = \frac{T_M - T_1}{T_2 - T_1} C_M \tag{33}$$

$$E_2 = \frac{T_2 - T_M}{T_2 - T_1} C_M \tag{34}$$

$$B = -T_V - T_M\left(1 + \frac{C_V}{C_M}\right) \tag{35}$$

4要素 Maxwell モデルと4要素 Voigt モデルの定数が式(27)-(30)あるいは式(31)-(35)の関係式を満たしていればその両モデルは力学的に等価である．

4要素 Voigt モデルに単位ステップ応力 $\sigma = 1$ (t) が作用したときのひずみ応答はクリープを表し，次式のようになる．

$$\varepsilon(t) = C_M + \frac{t}{T_M} + C_V\left\{1 - exp\left(\frac{-t}{T_V}\right)\right\} \tag{36}$$

同様にして2n要素の一般化 Voigt モデルの単位ステップ応力に対するひずみ応答は次式のようになる．

$$\varepsilon(t) = C_M + \frac{t}{T_M} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{Vi}\left\{1 - exp\left(\frac{-t}{T_{Vi}}\right)\right\} \tag{37}$$

式(36)，(37)において Maxwell モデルの緩和時間 T_M →∞とするとクリープひずみはある有限値で安定する．これは先に述べた一般化 Maxwell モデルの奇数要素に対応する．

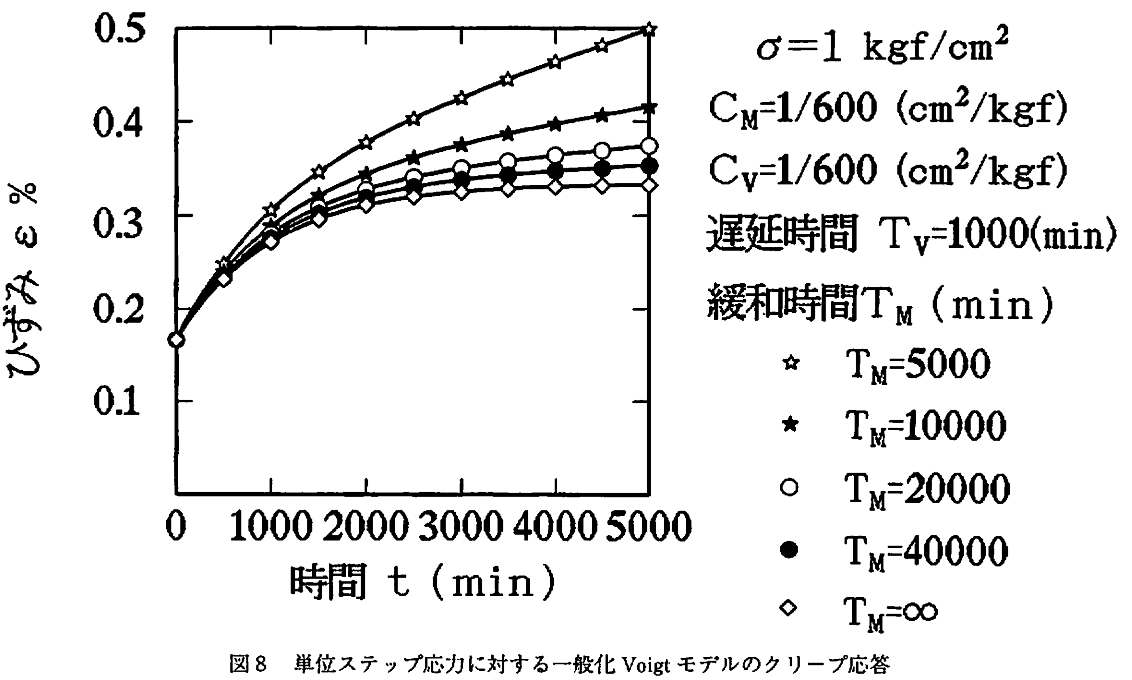


図8　単位ステップ応力に対する一般化 Voigt モデルのクリープ応答

4要素 Voigt モデルの挙動の計算例として図6で計算した一般化 Maxwell モデルと力学的に等価なモデルのクリープ応答を図8に示す．図に示すように Maxwell モデルの緩和時間 T_M が大きくなるに連れてクリープひずみが有限値で安定し，緩和時間の増加に対応して弾粘性体から粘弾性体に移行していく様子が分かる．レオロジーの立場からいえば奇数要素の一般化 Voigt モデルは個体，偶数要素の Voigt モデルは液体でありその違いは決定的である．しかし4要素の Voigt モデル計算例でも分かる通り材料を一般化 Voigtモデル（弾粘性体）で表現しておけば，Maxwell 要素の緩和時間を変えるだけで（粘弾性体）の挙動も記述することができる．現実の物質も観測者の時間スケールによってその挙動が個体的であったり，液体のように流れたりする．このような幅の広い現象に対応するには選択の自由度が高い4要素の Voigt モデルが有利である．

またこのモデルは，一般化 Maxwell モデルと等価であるという利点も持つ．したがって，4要素の Voigt モデルを時間依存生挙動材料の基本モデルとするのが適当と考える．

4　一般応力状態での挙動

4要素モデルを基本に等方粘弾性体について3次元応力，ひずみの問題として扱う．前節で述べたようにひずみ入力応力応答の問題に対しては一般化 Maxwell モデル，応力入力ひずみ応答問題に対しては一般化 Voigt モデルを使う．各モデル間の定数は等価性を保つようにこれを定める．以下においては，ひずみ，応力等はテンソル量を表わすものとする．

4－1　一般応力状態の一般化 Maxwell モデル

まず単純 Maxwell モデルについて考える．全ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}$ を粘性によるひずみ増分 $\dot{\varepsilon}^v$ と弾性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}^e$ に分ける．さらに $\dot{\varepsilon}^v$ を体積成分 $\dot{\varepsilon}^v{}_m$ とせん断成分 $\dot{\varepsilon}^v{}_s$ に分けて考え，等方弾性体との類似から次式のように表す．

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \tag{38}$$

$$\dot{\varepsilon}^v = \dot{\varepsilon}^v{}_m + \dot{\varepsilon}^v{}_s \tag{39}$$

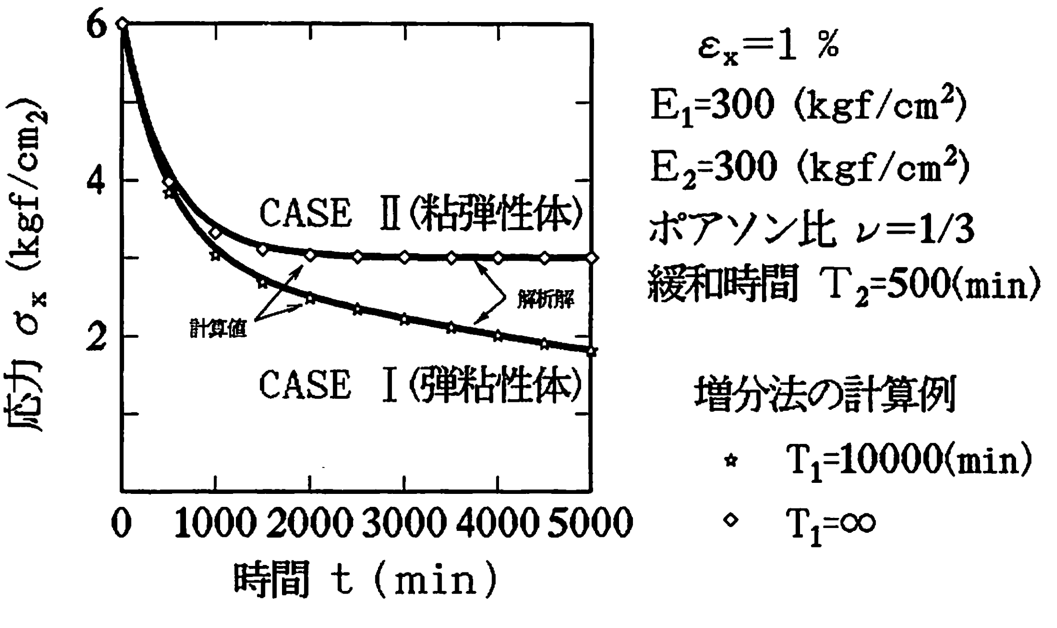


図9　解析解と増分計算の比較 Maxwell モデルの応力緩和

$$\dot{\varepsilon}^{v}{}_{m} = \frac{\sigma_d}{2\eta_G} \tag{40}$$

$$\dot{\varepsilon}^{v}{}_{m} = \frac{\sigma_m}{3\eta_K} I \tag{41}$$

式(38)～(41)より

$$\dot{\varepsilon}^{e} = \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_d}{2\eta_G} + \frac{\sigma_m}{3\eta_K} I \tag{42}$$

となり，式(42)の両辺に左から弾性係数Eをかけて整理して次式を得る．

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_m I}{T_K} - \frac{\sigma_d}{T_G} \tag{43}$$

ここで

$$T_K = \frac{\eta_K}{K} \tag{44}$$

$$T_G = \frac{\eta_G}{G} \tag{45}$$

である．式(43)右辺第２，３項は時間依存性の粘性による見かけの応力である．

図５のように単純 Maxwell モデルが並列に結合されているときには，ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ が各要素で等しく，応力増分をそれぞれが分担する．したがって第 i 番要素ごとに式(43)が成立する．

$$\dot{\sigma}_i = E_i\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_{mi} I}{T_{Ki}} - \frac{\sigma_{di}}{T_{Gi}} \tag{46}$$

この総和をとって全体の応力ひずみの関係式は次のように表される．

$$\dot{\sigma} = \sum_i E_i\dot{\varepsilon} - \sum_i \frac{\sigma_{mi} I}{T_{Ki}} - \sum_i \frac{\sigma_{di}}{T_{Gi}} \tag{47}$$

４要素の場合は次のようになる．

$$\sigma = (E_1 + E_2)\,\dot{\varepsilon} - \left(\frac{\sigma_{m1}}{T_{K1}} + \frac{\sigma_{m2}}{T_{K2}}\right) I + \left(\frac{\sigma_{d1}}{T_{G1}} + \frac{\sigma_{d2}}{T_{G2}}\right) \tag{48}$$

式(47)，(48)は一般化Maxwellモデルの構成式である．この式で $\dot{\varepsilon} = 0$ のまま保持されたときを考えると，式(46)より $\dot{\sigma}_i < 0$ となり $t \to \infty$ で $\sigma_i = 0$ となる．これは応力緩和を表している．

一方奇数要素の場合はT_{k1}，$T_{G1} = \infty$で表され，$\dot{\sigma}_1 = 0$，σ_1＝一定となり，$\dot{\sigma}_2 < 0$ で $t \to \infty$の時$\sigma_2 = 0$となる．これは$\sigma = \sigma_1$で応力緩和が終了することを意味している．

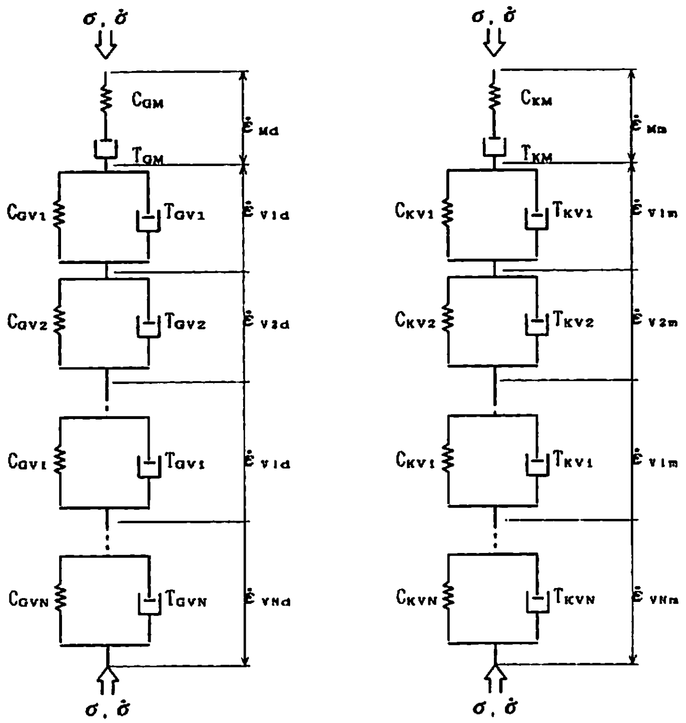
これらの構成式はΔtで区分された変形段階ごとに右辺第２，３項を既知量としてその時点での応力速度

	CASE I (弾粘性体) ☆		CASE II (粘弾性体) ◇	
	左要素	右要素	左要素	右要素
せん断変形	$G_1=112.5$ $T_{G1}=10,000$	$G_2=112.5$ $T_{G2}=500$	$G_1=112.5$ $T_{G1}=\infty$	$G_2=112.5$ $T_{G2}=500$
体積変形	$K_1=300$ $T_{K1}=10,000$	$K_2=300$ $T_{K2}=500$	$K_1=300$ $T_{K1}=\infty$	$K_2=300$ $T_{K2}=500$
	$E_1=300$，$\nu_1=1/3$ $E_2=300$，$\nu_2=1/3$	⇨	G_1，G_2 K_1，K_2	

(G，K，E : kgf/cm^2　　T : min)

表１　応力緩和計算における４要素 Maxwell モデルの定数

$\dot{\sigma}$を与える．Δt 間のひずみ増分$\Delta\varepsilon$，応力増分$\Delta\sigma$を求め，これを重ね合わせて，その段階での応力とひずみが計算される．このようにして計算された結果を図９に示す．計算例では図６の計算例と同じ材料に一軸状態で軸ひずみ$\varepsilon_x = 1$％を与えたときの軸応力σ_xの緩和の様子を示している．その定数は表１に示す通りである．この材料の応力緩和の応答の解析解は式(19)，(21)で与えられる．



せん断変形成分　　　体積変形成分

図10　一般応力状態での一般化 Voigt モデルの変形成分の分割

４－２　一般応力状態の一般化Voigtモデル

全ひずみ増分$\dot{\varepsilon}$を単純Maxwell要素の成分$\dot{\varepsilon}_M$と単純 Voigt要素の成分$\dot{\varepsilon}_{vi}$に分ける（図１０参照）．

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_M + \Sigma\dot{\varepsilon}_{Vi} \tag{49}$$

ここでも材料の等方性を仮定すると Maxwell要素に対しては式(38)～(41)より次の式が得られる．

$$\dot{\varepsilon}_M = E^{-1}\dot{\sigma} + \frac{\sigma_d}{2\eta_{GM}} + \frac{\sigma_m I}{3\eta_{KM}} \tag{50}$$

第 i 番目のVoigt要素についてはバネ要素とダッシュポット要素とのひずみ増分が等しいので，せん断変形について上添字 d，体積変形について上添字 m をつけて表わすと

$$\sigma_d = \frac{2\varepsilon^d_{Vi}}{C_{GVi}} + 2\eta_{GVi}\dot{\varepsilon}^d_{Vi} \tag{51}$$

$$\sigma_m = \frac{3\varepsilon^m_{Vi}}{C_{KVi}} + 3\eta_{KVi}\dot{\varepsilon}^m_{Vi} \tag{52}$$

が得られる．式(51)，(52)より$\dot{\varepsilon}^d_{Vi}$，$\dot{\varepsilon}^m_{Vi}$を求めると次のようになる．

$$\dot{\varepsilon}^d_{Vi} = \frac{\sigma_d}{2\eta_{GVi}} - \frac{\varepsilon^d_{Vi}}{T_{GVi}} \tag{53}$$

$$\dot{\varepsilon}^m_{Vi} = \frac{\sigma_m}{3\eta_{KVi}} - \frac{\varepsilon^m_{Vi}}{T_{KVi}} \tag{54}$$

$$\dot{\varepsilon}_{Vi} = \dot{\varepsilon}^d_{Vi} + \dot{\varepsilon}^m_{Vi} \tag{55}$$

式(49)，(50)，(53)，(54)，(55)より一般化Voigtモデル全体の構成式が得られる．

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}\dot{\sigma} + \frac{\sigma_d}{2\eta_{GM}} + \frac{\sigma_m I}{3\eta_{KM}} + \Sigma\left(\frac{\sigma_d}{2\eta_{GVi}} - \frac{\varepsilon^d_{Vi}}{T_{GVi}}\right) + \Sigma\left(\frac{\sigma_m}{3\eta_{KVi}} - \frac{\varepsilon^m_{Vi}}{T_{KVi}}\right) \tag{56}$$

4 要素Voigtモデルの場合には単純Voigtモデルが一個であるので構成式は次のようになる．

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}\dot{\sigma} + \frac{\sigma_d}{2\eta_{GM}} + \frac{\sigma_m I}{3\eta_{KM}} + \frac{\sigma_d}{2\eta_{GVi}} - \frac{\varepsilon^d_{V}}{T_{GVi}} + \frac{\sigma_m}{3\eta_{KV}} - \frac{\varepsilon^m_{V}}{T_{KV}} \tag{57}$$

式(56)，(57)において$\dot{\sigma}=0$を与えるとその応答はクリープ現象を表す．この挙動は次のように説明される．

単純 Voigt 要素のひずみ速度$\dot{\varepsilon}_{vi}$は，式(53)，(54)からε_{vi}の増加に伴って限りなくゼロに近づき，$t\to\infty$で$\dot{\varepsilon}_{vi}\to 0$となる．単純Maxwell要素のひずみ速度は，式(50)から$\dot{\sigma}=0$の時第一項は常に0，第二，三項の粘性項は有限値をもち$\dot{\varepsilon}_M$＝一定で変形が進行する．その速度は粘性係数の大きさによって異なり，粘性係数を大きくとれば粘性項の影響は小さくなり，粘弾性体としてのクリープ挙動を表現することができる．

またVoigt要素のひずみ速度が十分小さくならないうちに次の応力変化が与えられると，応力ひずみ曲線の形状に変化が生じ，過去の応力履歴やひずみ履歴に影響されることになる．逆にVoigt要素のひずみ速度が収束するのに十分な時間が経過していれば同一の応力変化に対するひずみ応答は同一である．これらの現象は粘土の力学的な試験において十分な圧密時間が必要であるという経験則とよく一致する．

式(56)，(57)を計算するには，Δtで区分された変形段階ごとに右辺第5，7項を既知量としてその時点でのひずみ速度$\dot{\varepsilon}$を求める．Δt間のひずみ増分$\Delta\varepsilon$，応力増分$\Delta\sigma$は$\Delta\varepsilon=\dot{\varepsilon}\Delta t$，$\Delta\sigma=\dot{\sigma}\Delta t$として求められる．これを重ね合わせて，その段階での応力とひずみが計算される．このようにして計算された結果を図11に示す．計算例では図8の計算例と同じ材料に一軸状態で軸ひずみ$\sigma_x=1$ (kgf/cm²)を与えたときの軸ひずみε_xのクリープの様子を示している．その定数は表2に示す通りである．この材料のクリープ応答の解析解は式(36)，(37)で与えられる．

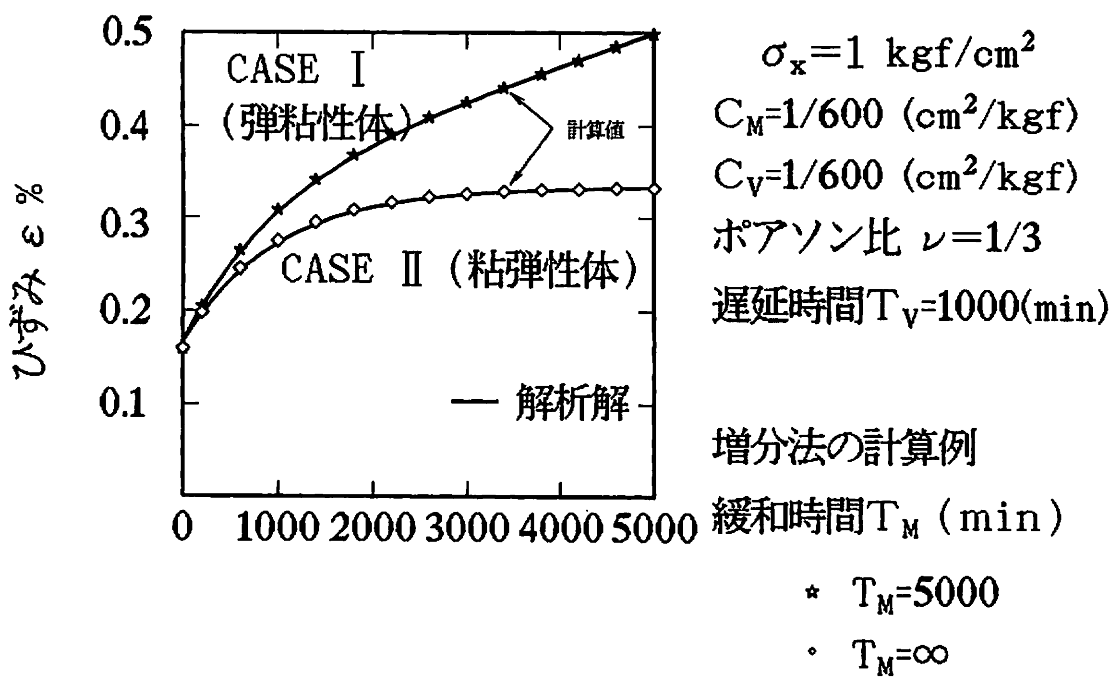


図11　解析解と増分計算の比較 Voigt モデルのクリープ応答

表２　クリープ計算における４要素 Voigt モデルモデルの定数

	CASE Ⅰ（弾粘性体）☆		CASE Ⅱ（粘弾性体）◇	
	Maxwell要素	Voigt要素	Maxwell要素	Voigt要素
せん断変形	$C_{GM}=1/225$ $T_{GM}=5,000$	$C_{GV}=1/225$ $T_{GV}=1000$	$C_{GM}=1/225$ $T_{GM}=\infty$	$C_{GV}=1/225$ $T_{GV}=1000$
体積変形	$C_{KM}=1/600$ $T_{KM}=5,000$	$C_{KV}=1/600$ $T_{KV}=1000$	$C_{KM}=1/600$ $T_{KM}=\infty$	$C_{KV}=1/600$ $T_{KV}=1000$

$C_M=1/600$, $C_V=1/600$ ⇒ $E_1=300,\ \nu_1=1/3$, $E_2=300,\ \nu_2=1/3$ ⇒ $C_{GM},\ C_{VM}$, $C_{KM},\ C_{KV}$

（G，K，E；kgf/cm^2　C；cm^2/kgf　T;min）

5　時間依存性挙動の計算例と実粘土への適用性に関する考察

5－1　粘弾性体と弾粘性体

これまでに述べてきたように，一般化 Maxwell モデル，一般化 Voigt モデルは粘弾性体，弾粘性体の挙動を単純 Maxwell 要素の緩和時間を無限大とするかどうかによって表すことができる．また等方性を仮定すれば，せん断変形と体積変形をそれぞれ独立に扱うことができる．したがって体積変形とせん断変形のそれぞれに対して，粘弾性，弾粘性の特性を持つ表３のような４種類の時間依存性材料を考えることができる．

表３　代表的時間依存性材料

		せん断変形の特性	
		粘弾性	弾粘性
体積変形の特性	粘弾性	体積固体 せん断固体体	体積固体 せん断粘性体
	弾粘性	体積粘性 せん断固体体	体積粘性 せん断粘性体

しかし現実には体積変形について弾粘性の特性を持つ材料はなく，体積変形では粘弾性特性だけを考慮すればよい．そこで表３の中で体積固体せん断固体体をあらためて粘弾性体，体積固体せん断粘性体を弾粘性体と呼ぶことにする．

5－2　計算に必要な材料定数

これらの時間依存性材料の応力ひずみ挙動を計算するときに必要な材料定数は前節で述べたように８個であるが，これらをまとめて示すと以下のようである．

４要素一般化Voigtモデル

C_{KM}：単純Maxwell要素の体積変形に関するコンプライアンス

T_{KM}：単純Maxwell要素の体積変形に関する緩和時間

C_{KV}：単純Voigt要素の体積変形に関するコンプライアンス

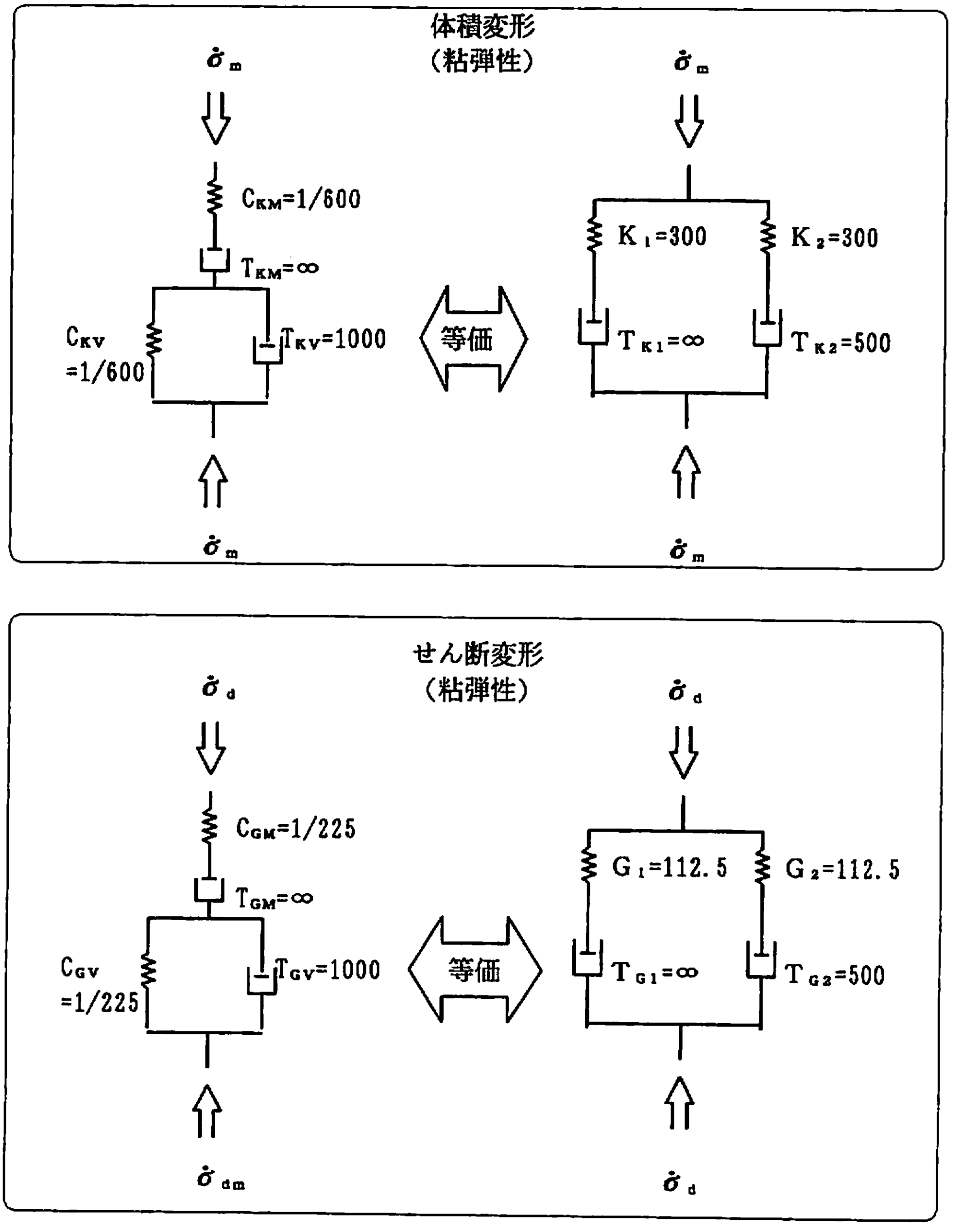


図12　体積固体せん断固体体の一般化 Voigt モデルとの等価 Maxwell モデル（単位：kgf, cm, min）

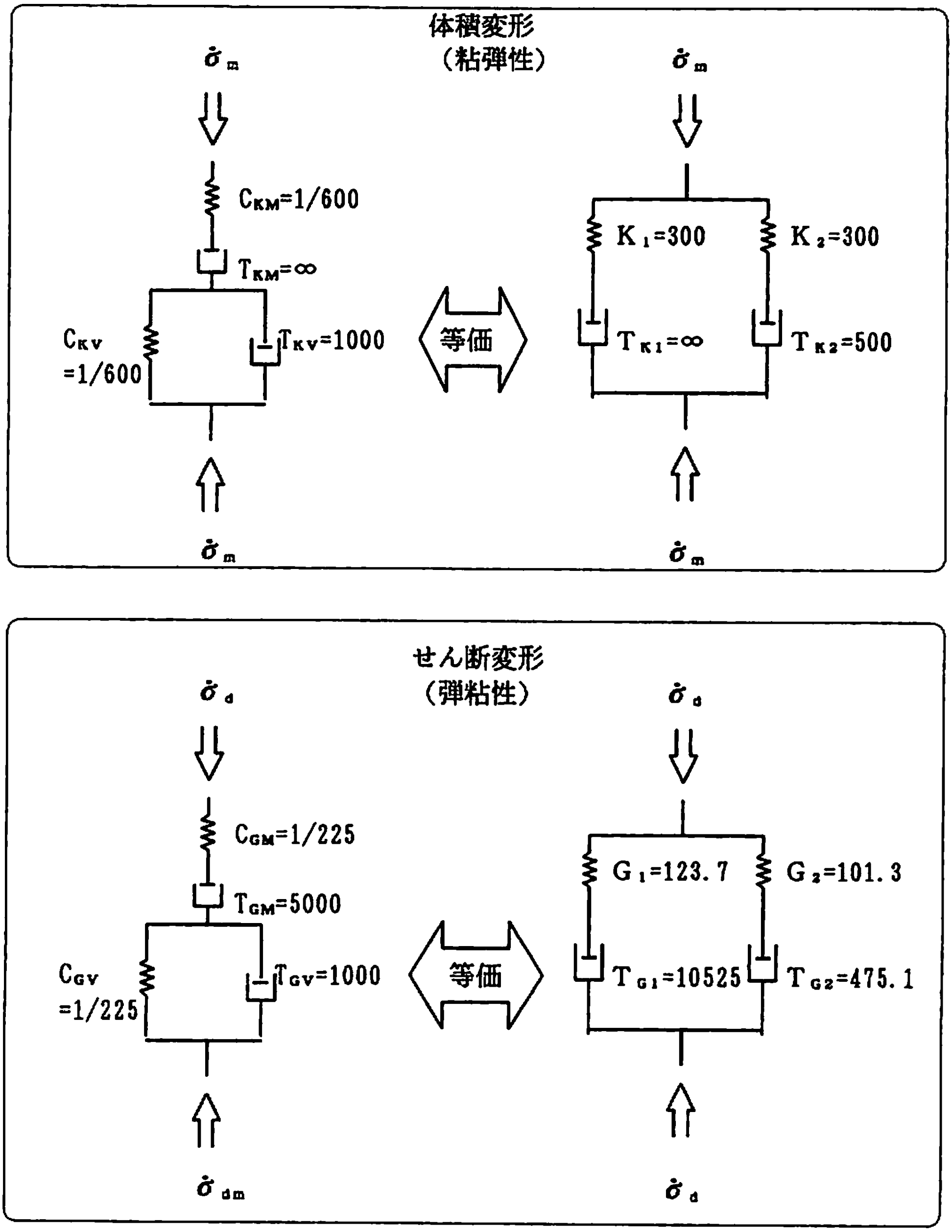


図13　体積固体せん断粘性体の一般化 Voigt モデルとの等価 Maxwell モデル（単位：kgf, cm, min）

T_{KV} ：単純Voigt要素の体積変形に関する遅延時間
C_{GM} ：単純Maxwell要素のせん断変形に関するコンプライアンス
T_{GM} ：単純Maxwell要素のせん断変形に関する緩和時間
C_{GV} ：単純Voigt要素のせん断変形に関するコンプライアンス
T_{GV} ：単純Voigt要素のせん断変形に関する遅延時間

4要素一般化Maxwellモデル
K_1 ：左Maxwell要素の体積弾性係数
T_{K1} ：左Maxwell要素の体積変形に関する緩和時間
K_2 ：右Maxwell要素の体積弾性係数
T_{K2} ：右Maxwell要素の体積変形に関する緩和時間
G_1 ：左Maxwell要素のせん断弾性係数
G_{K1} ：左Maxwell要素のせん断変形に関する緩和時間
G_2 ：右Maxwell要素のせん断弾性係数
T_{G2} ：右Maxwell要素のせん断変形に関する緩和時間

4要素一般化Maxwellモデル，4要素一般化Voigtモデルを使って時間依存性挙動を計算した結果を以下に示す．それぞれの材料定数は図12，13に示す通りである．

5－3　時間依存性挙動の計算例

時間依存挙動の計算例は
Ⅰ クリープ
Ⅱ 応力緩和
Ⅲ 荷重制御一軸圧縮試験の荷重速度依存性挙動
Ⅳ 繰り返し荷重による応力ひずみ関係の解析
Ⅴ 一定速度一次元沈下中の応力応答と沈下停止後の応力緩和の解析の5ケースである．以下にそれぞれの計算条件と結果について述べる．

Ⅰ　クリープ

円柱形供試体に鉛直方向応力σ_zが作用し続ける時の鉛直ひずみε_z，半径方向ひずみε_rの時間的変化について計算した．計算モデルは4要素Maxwellモデルである．入力応力状態は次のようである．
保持する応力状態

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_z = 1\ kgf/cm^2\\ \sigma_r = 0\\ \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)\end{array}\right\} \tag{58}$$

図14に計算結果を示す．この図において☆印は弾粘性体，◇印は粘弾性体の挙動を表す．この図に示すように弾粘性体の場合は時間経過とともに変形が収束するが，弾粘性体の場合はいつまでも変形が持続する．この変形を体積変形とせん断変形に分けて図示したものが図15である．この図から弾粘性体のクリープ変形も最終的には体積一定のまません断変形だけが進行していくことが分かる．このような挙動は一般的には粘性流体の流れとして知られている．

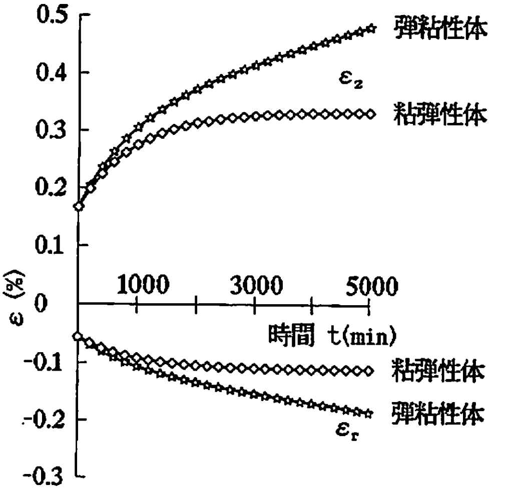


図14　粘弾性体と弾粘性体のクリープ挙動の比較

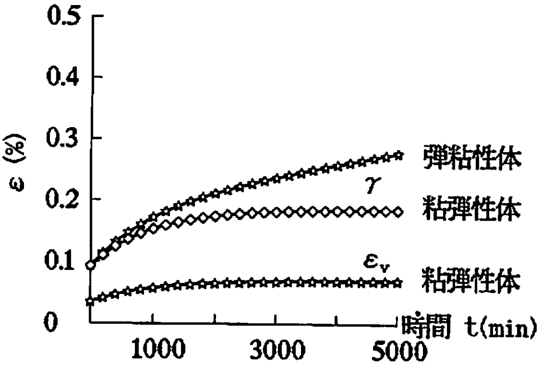


図15　粘弾性体と弾粘性体のクリープ挙動の比較

粘性土のクリープ変形では変形速度が一定となることはなく，破壊に至らないクリープ挙動では粘弾性体

と非常に良く似た挙動を示し，逆に破壊に至るクリープ挙動ではひずみ速度がある時点を過ぎると急速に増加することが確認されている．これらの粘性土のクリープ挙動は４要素一般化Maxwellモデルのクリープ挙動と異なっている．したがってMaxwell要素の緩和時間が一定のままではクリープ破壊を表現できず，緩和時間の応力依存性を考えるなどの工夫が必要である．

Ⅱ 応力緩和

円柱形供試体に $t=0$ において鉛直方向に応力を作用させ，瞬時変形を生じさせる．その後その変形状態を保ったままにしておく時の鉛直方向応力 σ_z，半径方向応力 σ_r の時間的変化を計算した．計算モデルは４要素Voigtモデルである．

保持するひずみ状態は次式のようである．

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= 1\,\% \\ \varepsilon_r &= -\nu\varepsilon_z \\ \varepsilon_{zr} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

計算結果を図16，17に示す．これらの図において☆印は弾粘性体，◇印は粘弾性体の挙動を表す．

図16に示すように σ_z は時間経過に伴って減少していくが，粘弾性体ではその変形に弾性体として対応する応力状態に収束する．一方弾粘性体では σ_z の減少だけでなく σ_r の増加が見られ，最終的にはせん断応力がゼロとなり，等方応力状態となる．このような現象は図17の平均応力 p，偏差応力 q の時間的変化からも分かる．このことは土質力学的に見た場合，土圧係数Ｋあるいは応力比 η の変化として捕らえられる．そこで応力緩和中の土圧係数と応力比の時間的な変化について弾粘性体と粘弾性体の両者について比較したものが図17 (a)，(b) である．図に示すように弾粘性体の

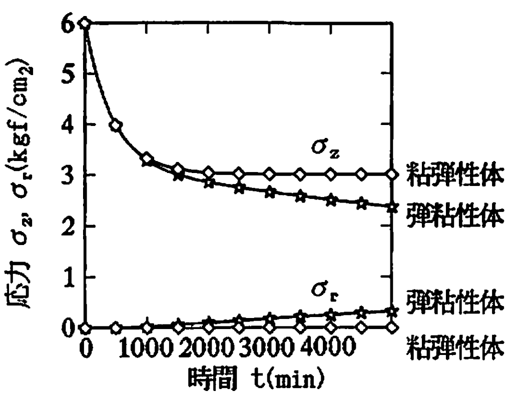


図16　粘弾性体と弾粘性体の応力緩和の比較

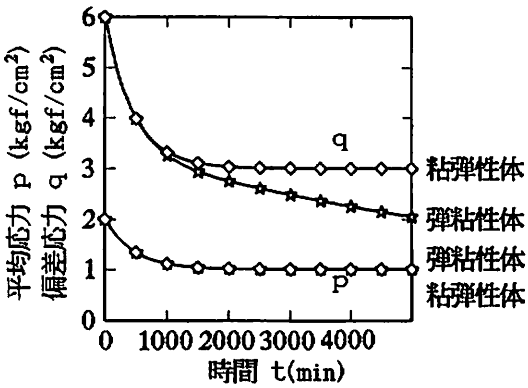


図17　粘弾性体と弾粘性体の応力緩和の比較

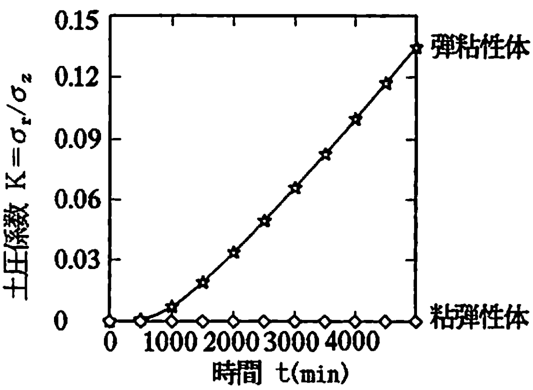


図17(a)　粘弾性体と弾粘性体の応力緩和時の土圧係数の比較

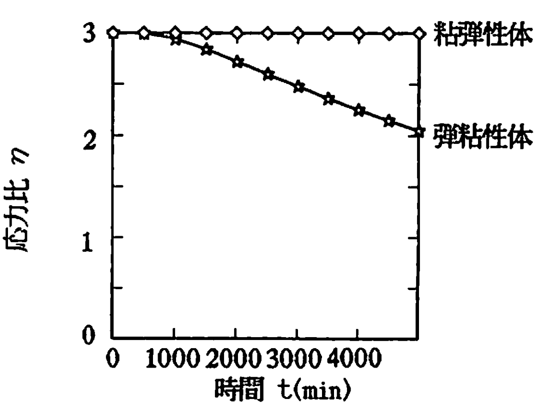


図17(b)　粘弾性体と弾粘性体の応力緩和時の応力比の比較

土圧係数は，時間とともに増加していき最終的には $K=1$ となる．また応力比は時間とともに減少していき，最終的にはゼロとなる．その速さは T_{GV} に依存する．実地盤の多くはすでに変形が止まり，応力緩和も十分

に進んでいると考えられる．この実地盤の土圧係数は$K \neq 1$となっていることから弾粘性体では実粘土の挙動を表わすには無理がある．

Ⅲ　一軸圧縮試験における応力ひずみ曲線の荷重速度依存性挙動

円柱供試体を拘束圧なしで圧縮する場合を考える．この時次の3種類の荷重速度で圧縮するものとして応答ひずみを計算した．計算モデルは4要素Voigtモデルである．

計算ケース[A-1]:荷重載荷速度 1/10(kgf/cm²/min)でq=1.0kgf/cm²まで載荷し，そのままの応力状態でクリープする．

計算ケース[A-3]:荷重載荷速度 1/1000(kgf/cm²/min)でq=1.0kgf/cm²まで載荷し，そのままの応力状態でクリープする．

計算ケース[B-1]:荷重載荷速度 1/10(kgf/cm²/min)でq=0.25kgf/cm²まで載荷し，その後載荷速度を1/1000(kgf/cm²/min)としてq=0.5kgf/cm²まで載荷する．その後再び載荷速度を1/10 (kgf/cm²/min)としてq=1.0kgf/cm²まで載荷しそのままの応力状態でクリープする．

図18，19，20に計算結果を示す．図18(a)，19(a)，20(a)は載荷荷重と時間の関係を示している．

図18(b)はこの時に得られる粘弾性体の応力ひずみ関係，図19(b)は弾粘性体の応力ひずみ関係である．両者とも載荷速度が速くなると同一応力であってもひずみが小さくなり応力ひずみの関係が載荷速度の影響を受けていることが分かる．

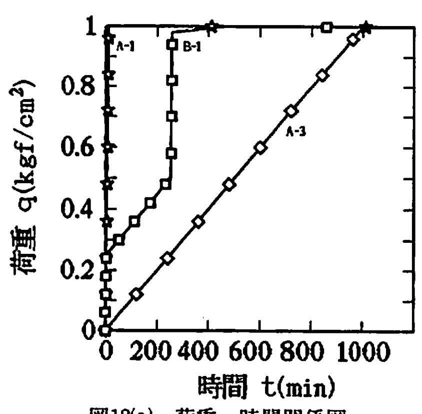


図18(a)　荷重～時間関係図

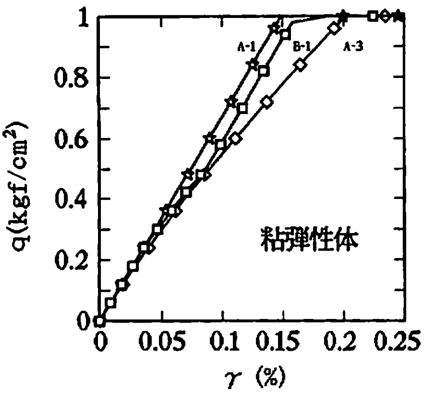


図18(b)　応力～ひずみ関係図

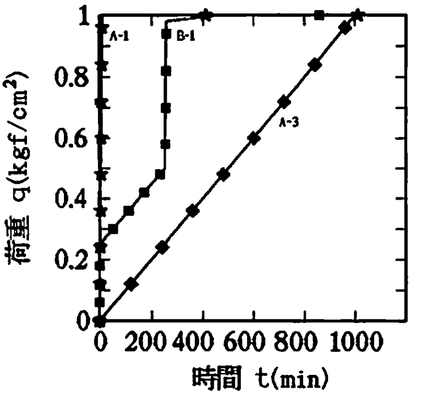


図19(a)　荷重～時間関係図

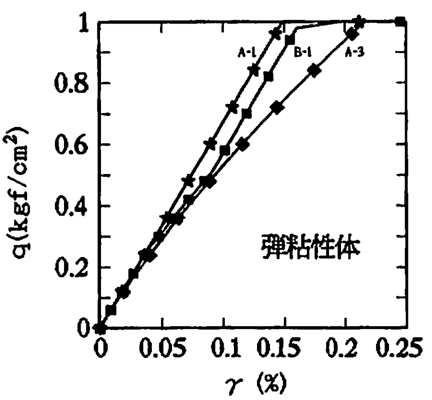


図19(b)　応力～ひずみ関係図

さらに[B-1]のケースの計算から載荷速度が変化することによって応力ひずみ曲線が[A-1]線から離脱し，[A-3]線にほぼ平行になること，さらに載荷速度が変化することによって再び[A-1]線に平行になるように移行する様子が分かる．

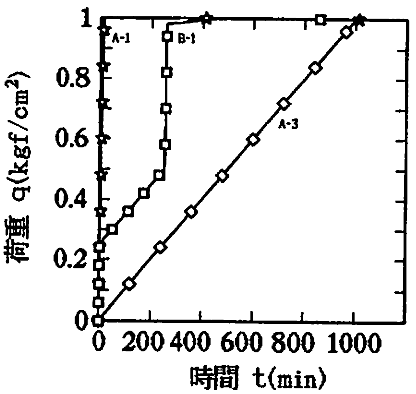


図20(a)　荷重～時間関係図

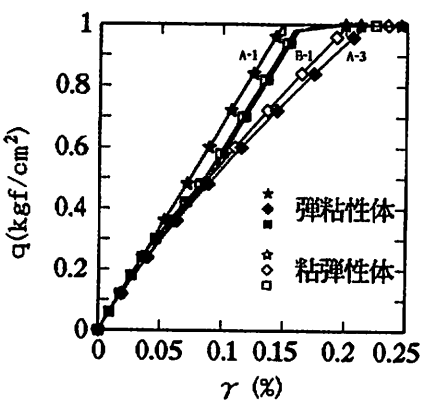


図20(b)　応力～ひずみ関係図

このような応力ひずみ曲線の載荷速度依存性挙動は粘性土の実験結果でも確かめられている．したがって粘性土の構成式においても，粘弾性体と弾粘性体に共通する単純 Voigt要素を含めて考えると都合が良いと考えられる．

図20は同じ応力ひずみ関係を粘弾性体と弾粘性体について比較したものである．図に示すように弾粘性体の方がひずみ量が大きくその後のクリープも止めどなく続く．

Ⅳ　繰り返し荷重による応力ひずみ関係

円柱形供試体が一軸状態で繰り返し荷重を受けた場合の応力ひずみ関係を計算した．計算モデルは４要素Voigtモデルである．この時載荷速度は次の２種類である．

計算ケース[C-1]:載荷速度 1/10(kgf/cm²)
計算ケース[C-2]:載荷速度 1/1000(kgf/cm²)

繰り返し応力状態は次のようである．

$q = 0 \rightarrow 1 \rightarrow -1 \rightarrow 1$ kgf/cm² とした後そのままの応力状態でクリープする．

図21に計算結果を示す．図中☆★印は載荷速度が速い場合を示し，◇◆印はおそい場合を示す．また黒塗り印は弾粘性体，白抜き印は粘弾性体を表す．

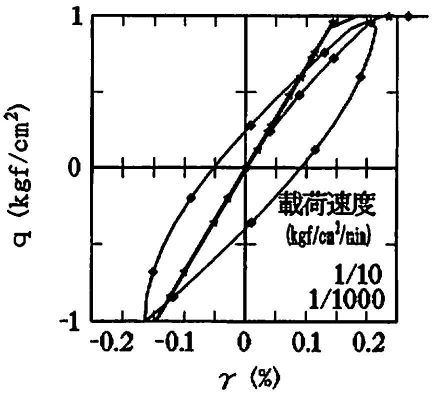


図21(a)　繰り返し荷重を受けた時の応力～ひずみ関係
(弾粘性体)

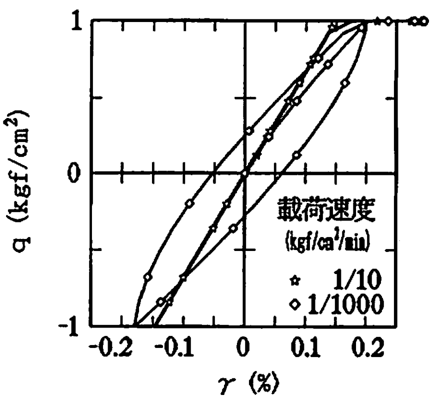


図21(b)　繰り返し荷重を受けた時の応力～ひずみ関係
(弾粘性体)

載荷速度が速い場合には弾粘性体も粘弾性体もほぼ同一の応力ひずみ関係となる．これは単純Maxwell要素，単純Voigt要素のダッシュポットの粘性効果が卓越しこれがほとんど剛体として挙動し，変形の大部分が単純 Maxwell要素のバネによっているからである．

載荷速度が遅い場合には，応力ひずみ曲線は，大きなヒステリシスループを描く．この時，弾粘性体の方が大きなヒステリシスループを描く．さらにヒステリ

シスの骨格曲線は載荷速度が速い場合よりも傾きが大きい．

実粘土の静的繰返し試験でもヒステリシスループを描き，弾粘性体，粘弾性体のどちらも適用できることが分かる．

V　一定速度一次元沈下中の応力応答と応力緩和の解析

標準圧密試験のような側方が拘束されている円柱形供試体を一定速度で沈下させるときの軸方向応力 σ_z，半径方向応力 σ_r を計算する．計算モデルは4要素Maxwellモデルである．

与える軸ひずみ速度は次の2種類である．

高速変形：$\dot{\varepsilon}_z=1/10$ (%/min)
低速変形：$\dot{\varepsilon}_z=1/1000$ (%/min)

与える最終の軸ひずみ量は $\varepsilon_z=1$ %とした．その後，ひずみを固定したままでの応力緩和を計算する．

図22，23，24，25に計算結果を示す．

図22は一定速度で沈下が進行中の応力ひずみ関係である．図中，白抜き印は粘弾性体，黒塗り印は弾粘性体を表すが，ひずみ速度が速いほど発生する応力が大きくなることが分かる．Ⅲ 荷重制御試験やⅣ 繰り返し試験の結果で得られたことと同様に，変形速度が速い場合は，粘弾性体と弾粘性体の応力ひずみ挙動に差はないことが分かる．

図23は沈下が進行中とその後の沈下を止め，ひずみを固定した後の応力緩和の様子を示している．粘弾性体と弾粘性体の挙動の差は変形進行中にはほとんどなく，その後の応力緩和の仕方にある．すなわち，粘弾性体は早い時期に安定し，一定の応力状態に至るが，弾粘性体はいつまでも応力緩和が続く．

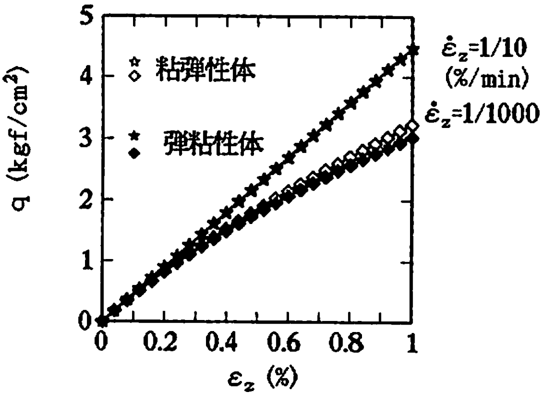


図22　一定速度一次元沈下中の応力～ひずみ関係（ひずみ進行中のみ）

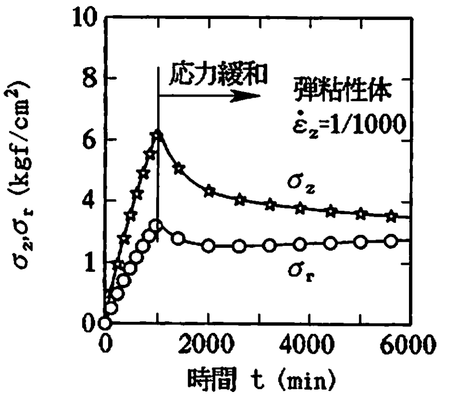


図24　一定速度一次元沈下中の応力の時間的変化とその後の応力緩和

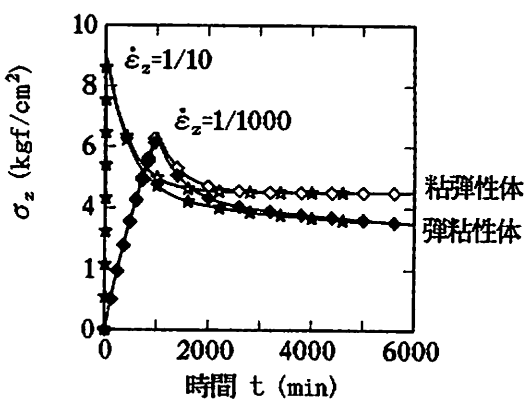


図23　一定速度一次元沈下中の応力の時間的変化とその後の応力緩和

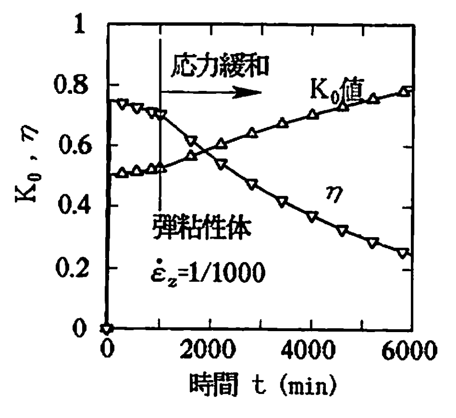


図25　一定速度一次元沈下中の K_0 値と応力比の時間的変化

そこで弾粘性体の応力緩和の様子をσ_z，σ_r，静止土圧係数K_0，その時の応力比ηについて表したものが図24，25である．これらの図に示すように時間の経過とともにσ_zは減少し，σ_rは増加する．最終的には$\sigma_z=\sigma_r$の等方応力状態に至る．これは$K_0=1$，$\eta=0$の状態に対応する．

現実の地盤では$K_0<1$，$\eta \neq 0$であるとされていることからすれば，土を弾粘性体材料とみなすことには無理があるようである．

6 まとめ

粘土の時間依存性挙動を表わすために一般化Voigtモデル，一般化Maxwellモデルを導入し，そのモデルの時間依存性挙動を示した．その過程で体積変形とせん断変形に対してそれぞれ弾粘性，粘弾性を考えた材料を定義し，粘土の変形を表わすモデルとしての妥当性を検討した．その結果次のことが明かとなった．

1 体積変形について弾粘性を考えることは不適当である．

2 せん断変形について粘弾性，弾粘性の適用性を検討した結果は表4のようにまとめられる．表4からこれらのモデルでは，クリープ変形，クリープ破壊を表わすときに限界があることが分かる．破壊ひずみについては，非回復性のひずみをMaxwell要素に負担させるのではなく，塑性を考慮することが必要であると考える．

表4　粘土のせん断変形に対するモデルの適用性

変形挙動＼モデル	弾粘性体	粘弾性体
クリープ	不適 非破壊のクリープが表わせない 最終的にはいつでも破壊に至る	不適 クリープ破壊が表わせない
応力緩和	不適 最終的に等方応力状態となる	○ ○
速度依存性	○	○
ヒステリシスループ	○	○
定速度沈下中の応力応答	○	○
沈下停止後の応力緩和	不適 最終的に等方応力状態となる	○

参考文献

1）呉屋健一，上原方成，原久夫：正規圧密粘土の繰り返し平均主応力一定排水せん断試験結果について，平成3年度土木学会西部支部研究発表会(1992)

2）原 久夫，住岡 宣博：粘土の平均有効応力一定繰り返し排水せん断挙動とせん断弾性係数についての一考察，第27回土質工学研究発表(1992)

3）瑞慶覧 長賢，上原 方成，原 久夫，呉屋 健一，住岡 宣博：正規粘土の平均有効応力一定繰り返し排水せん断試験結果，第27回土質工学研究発表(1992)

4）棚原 康之，上原 方成，原 久夫，呉屋 健一：島尻粘土の応力比一定繰り返し応力下での変形特性，第5回沖縄土質工学研究発表会(1992)

5）原 久夫，上原 方成，呉屋 健一：飽和粘土の応力比一定静的繰返し試験結果について，平成3年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集(1993.3),522-523

6）呉屋健一，上原方成，原久夫：正規圧密粘土の静的平均有効応力一定繰り返し排水せん断試験結果について，琉球大学工学部紀要 (Vol.45,1993-3),21-32

7）網干寿夫：圧密試験結果の沈下解析への適用性について（総括），第19回土質工学シンポジウム発表論文集，土質工学会，(1974),71-78

8）原 久夫、上原 方成、下地 浩之：クリープ荷重を受けた飽和粘土の非排水せん断特性について，昭和62年度土木学会西部支部研究発表会(1988)

9）下地 浩之、上原 方成、原 久夫正規飽和粘土の非排水条件におけるクリープおよびせん断特性第23回土質工学研究発表(1988)

10）原 久夫、上原 方成、下地 浩之：異方圧密粘土とクリープ応力を受けた粘土の非排水せん断特性の比較，第23回土質工学研究発表(1988)

11）原 久夫、上原 方成、下地 浩之：正規飽和粘土の多段階非排水クリープ試験について，第24回土質工学研究発表(1989)

12）原 久夫、上原 方成：非排水クリープ過程におけるひずみ速度と間隙水圧増加速度の関係について，土木学会第44回年次学術講演会(1989)

13）原 久夫：繰り返し再圧密した島尻粘土のクリープ特性.，第2回沖縄土質工学研究発表会(1989)

14）原 久夫，上原 方成：正規異方圧密粘土の非排水せん断強度について，昭和61年度土木学会西部支部研究発表会(1987)

15) 原 久夫、上原 方成：異方圧密粘土の非排水せん断挙動に及ぼすひずみ速度の影響，第22回土質工学研究発表(1987)
16) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，培風館