

琉球大学学術リポジトリ

Millerの最適オブザーバ併合系の実験による考察： 二重倒立振子の安定化制御において

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-08-23 キーワード (Ja): キーワード (En): Regulator, Observer, Stabilizing, Double inverted pendulum, Robustness 作成者: 石田, 力, 長堂, 勤, Ishida, Tsutomu, Nagado, Tsutomu メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/1482

Millerの最適オブザーバ併合系の実験による考察

——二重倒立振子の安定化制御において——

石田 力* 長堂 勤**

Consideration for the Regulator with
Miller's Observer through the Experiment

——Through Stabilizing Control for a Double Inverted Pendulum——

Tsutomu ISHIDA* and Tsutomu NAGADO**

Abstract

When we were stabilizing our double inverted pendulum by a personal computer, we obtained the data that the regulator with Miller's observer is robust compared to the one with the observer having the same observer poles as Miller's but the different observer gains from Miller's. Then we report it.

Key words: Regulator, Observer, Stabilizing, Double inverted pendulum, Robustness

1. まえがき

状態フィードバック制御をオブザーバを併用して実現する際に、オブザーバの極およびオブザーバゲインをどのように決定するかということが問題となる。Millerはシステムの初期値の平均値と分散が既知のとき、オブザーバを用いることによる評価関数の劣化量 ΔJ を最小にするという意味において最適なオブザーバゲインの決定法を提案した¹⁾

本稿では当研究室で作製した二重倒立振子の安定化実験において、最適レギュレータと併合したMillerの最適オブザーバが同じオブザーバの極を持つ他のオブザーバ併合系と比較してロバストであるという実験データが得られたのでそれを報告する。

2. オブザーバ

2.1 最小次元オブザーバ

状態フィードバック制御を行うには、システムのすべての状態を入手する必要があるが、入手できない状態が存在する場合、(2.1)、(2.2)式のようなダイナミックシステムにより状態を推定する。

$$\dot{\omega}(t) = \hat{A}\omega(t) + Ky(t) + \hat{B}u(t) \quad (2.1)$$

$$\hat{x}(t) = D\omega(t) + Hy(t) \quad (2.2)$$

ただし、 $y(t)$ 、 $u(t)$ はそれぞれプラントの出力変数、入力変数であり、 $\hat{x}(t)$ は状態変数の推定値である。

受付：1987年5月9日

• 琉球大学工学部 電子・情報工学科

Dept. of Electronics and Information Engineering, Fac. of Eng.

• 琉球大学院研究科

Graduate Student, Electrical and Information Engineering.

測定不可能な状態変数のみを推定する最小次元オブザーバでは、ゴビナスの正準形式を用いて各係数行列を決定する。特にオブザーバの挙動に大きな影響を与える \hat{A} は

$$\hat{A} = A_{22} - LA_{12} \quad (2.3)$$

のように定まる。(2.3)式において \hat{A} が安定行列となるように設計パラメータであるオブザーバゲイン L を決定しなければならない。しかし多出力系の場合には \hat{A} の極を指定しても L には自由度があり唯一には定まらない。さらにまた \hat{A} の極をどこに指定すべきかという問題も残る。そこでMillerは最適レギュレータの評価関数に注目し、オブザーバゲイン L の決定に有効な方法を提案している。

2.2 Millerの最適オブザーバ¹⁾

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4)$$

なるシステムに対し、(2.5)式の二次形式評価関数をもつ最適レギュレータ問題の最適入力 $u(t)$ は(2.6)式のようになる。

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= -Fx(t) \\ &= -R^{-1}B^T Px(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ただし、 $x(t)$ は状態変数、 Q 、 R は重み行列、 P は次のリカッチ方程式の正定解である。

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (2.7)$$

オブザーバを用いた併合システムでは、状態変数 $x(t)$ の代わりにその推定値である $\hat{x}(t)$ を使うので入力 $u(t)$ は、

$$u(t) = -R^{-1}B^T P \hat{x}(t) \quad (2.8)$$

となり、最適制御入力ではないので当然評価関数 J の値は劣化する。Millerの提唱した方法は、フロントの初期値の統計的な性質がわかっているときに、この評価関数の劣化量 ΔJ を最小にするようにオブザーバゲイン L を決定するものである。この方法は \hat{A} の極を指定する必要がなく、設計者の負担がかなり軽減される。以下にその設計手順を示す²⁾

(1) 状態の初期値の平均値と共分散行列が次のように与えられるとする。

$$\epsilon \{x(t_0)\} = m_0 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \{(x(t_0) - m_0)(x(t_0) - m_0)^T\} &= \Sigma_0 \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ただし、 ϵ は期待値を表わす演算子である。

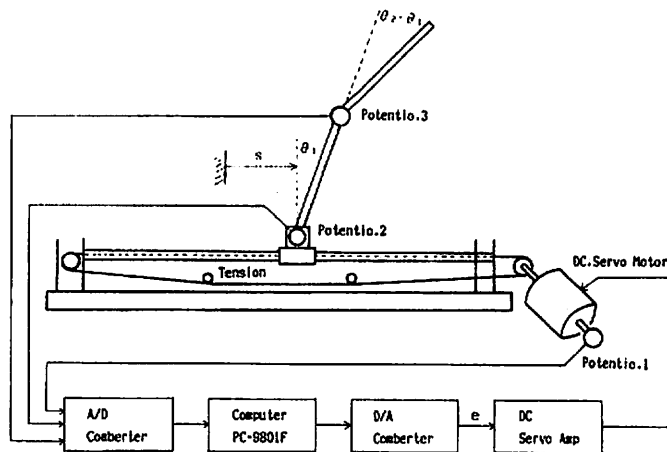


図1 二重倒立振り子の構成図

- (2) (2.11) 式の仮想システムに対し, (2.12) 式の二次形式評価関数を最小化する最適制御則 (2.13) 式を求める。

$$\dot{\eta}(t) = (A_{22}^T - A_{12}^T \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{21}^T) \eta(t) + A_{12}^T \zeta(t) \quad (2.11)$$

$$J = \int_0^{\infty} \{ \eta^T(t) (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}) \eta(t) + \zeta^T(t) \zeta(t) \} dt \quad (2.12)$$

$$\zeta^*(t) = -L_2^T \eta(t) \quad (2.13)$$

- (3) オブザーバゲイン L と $\omega(t)$ の初期値を次のように決定する。

$$L = \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} + L_2$$

$$\omega(0) = [-I : I] m_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.2 & 0.097 & -18.2 & 0.025 & -0.001 \\ 0 & 30.5 & -10.9 & 64.5 & -0.32 & 0.15 \\ 0 & -36.6 & 56.1 & -77.4 & 0.269 & -0.787 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -45.1 \\ -159.9 \\ 191.9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

レギュレータについては, (2.6) 式の最適レギュレータを構成する。重み行列 Q, R を以下のように設定してシミュレーションを行う。

$$Q = \text{diag} (0.2 \quad 2 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$R = 1$$

このとき最適レギュレータの極は

$$-24.2 \pm j18.3$$

$$-2.79 \pm j2.19$$

$$-1.24 \pm j0.41$$

3. シミュレーション

本節では当研究室で作製した二重倒立振り子を Miller の最適オブザーバ併合系により安定化するときのシミュレーション結果を示す。二重倒立振り子システムは図1のような構成になっており, その状態空間モデルは以下ようになる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

ただし状態変数, 入力変数および各係数行列は

$$x(t) = [s, \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \dot{s}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]^T$$

$$u(t) = e$$

となり, レギュレータゲインは

$$F = (0.445 \quad 4.218 \quad 11.35 \quad 0.476 \quad 1.761 \quad 1.548)$$

となる。

次に Miller の最適オブザーバを設計する。 m_0, Σ_0 を次のように与えてシミュレーションを行う。

$$m_0 = 0$$

$$\Sigma_0 = \text{diag} (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

このとき \hat{A} と L は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -19.14 & -1.44 & 1.75 \\ 1.47 & 12.58 & -7.63 \\ -1.75 & -7.63 & 14.90 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.934 & 1.465 & -1.750 \\ 1.465 & 12.58 & -7.627 \\ -1.749 & -7.627 & 14.91 \end{bmatrix}$$

(3.1)

となる。このときのオブザーバの極は

$$-20.7 \pm j14.9$$

$$-6.34$$

となる。比較のためにMillerの最適オブザーバと同じオブザーバの極を持つが、別のオブザーバゲインを有するオブザーバを構成する。その一例として次のような \hat{A} , L を採用する。

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -20.7 & 14.9 & 0 \\ -14.9 & -20.7 & 0 \\ 0 & 0 & -6.34 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.494 & -14.83 & -0.001 \\ 85.21 & 14.54 & 0.153 \\ -77.43 & 0.269 & 5.549 \end{bmatrix}$$

(3.2)

以上の二つのオブザーバについてそれぞれ閉ループ系を構成し、シミュレーションを行った。レギュレータについては両シミュレーションにおいて全く同一のものを使用している。状態変数およびオブザーバの初期値を次のようにしたときの二重倒立振子安定化のシミュレーション結果を図2～図7に示す。

$$x(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$w(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

これらの図より、Millerの最適オブザーバ併合系は、同じ極をもつ別のオブザーバ併合系に比べ、振幅が小さく収束も速いことがわかる。これはMillerの最適オブザーバのオブザーバゲイン L のノルムが比較的小さく、そのために初期再現誤差が小さくなり、応答が良くなったものと思われる。(付録参照)

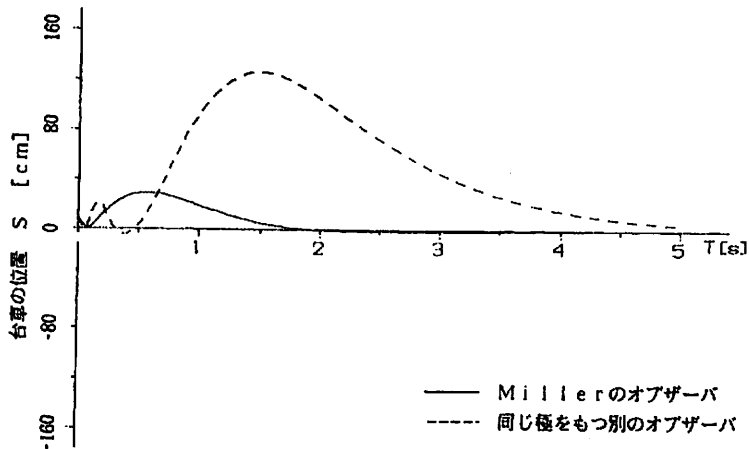


図2 台車の位置の振子舞い

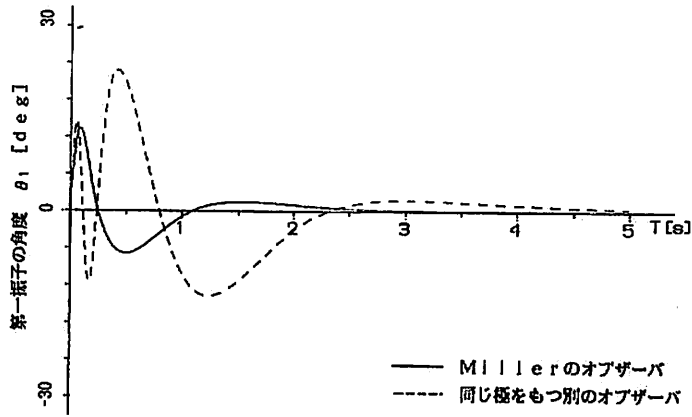


図3 第一振り子(下の振り子)の角度の振り舞い

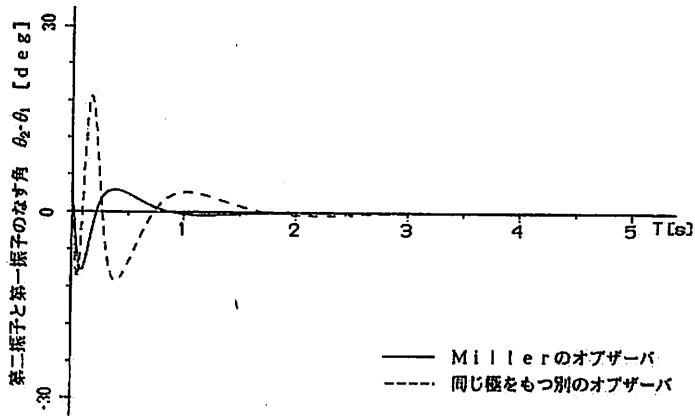


図4 第一振り子(下の振り子)と第二振り子(上の振り子)のなす角度の振り舞い

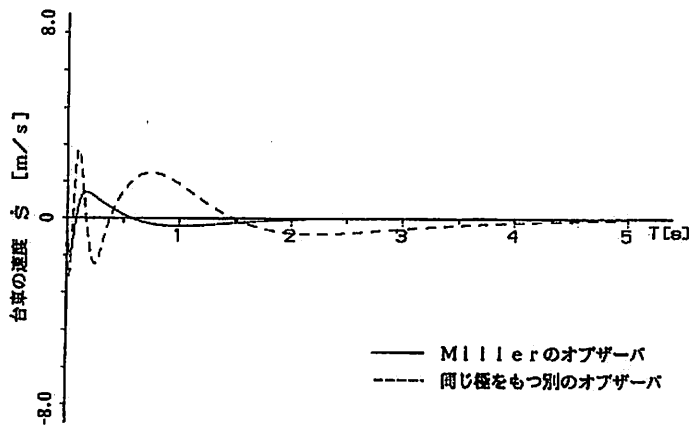


図5 台車の速度の振り舞い

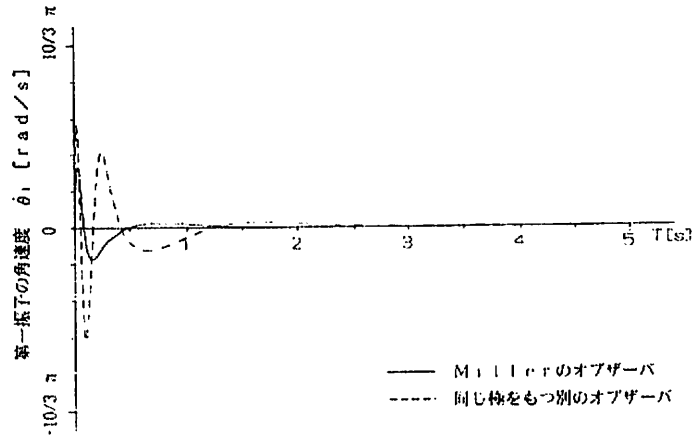


図6 第一振子の角速度の振子舞い

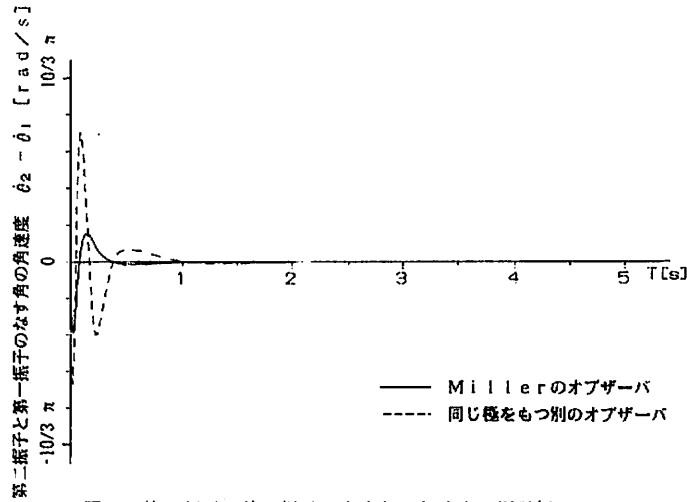


図7 第一振子と第二振子のなす角の角速度の振子舞い

4. 実験

実際の二重倒立振子系にMillerの最適オブザーバ併合系を適用し、その有効性を検討する。

4.1 実験装置

実験装置の構成図を図1に示す。制御装置としてパーソナルコンピュータを使用しており、状態フィードバックを行うレギュレータと状態推定を行うオブザーバがプログラムされている。数値演算プロセッサを使用して高速化をはかっている。

4.2 制御系設計

(2.5) 式の最適レギュレータにおける重み行列 Q , R の選び方については現在のところ体系的な方法はなく、本実験では $R=1$ と固定し、 Q をいろいろ変えてシミュレーション結果を見ながら決定した。そのときの Q は

$$Q = \text{diag} [0.18 \quad 1.8 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

となり、レギュレータゲイン F は

$$F = [1.181 \quad 5.929 \quad 12.89 \quad 1.064 \quad 2.227 \\ 1.974]$$

となった。そのときレギュレータの極は以下のよう
に配置された。

$$\begin{aligned} & -24.2 \pm j16.93 \\ & -2.84 \pm j2.14 \\ & -1.73 \pm j1.28 \end{aligned}$$

Millerの最適オブザーバについては、 Σ_0 を設計パ
ラメータと考え、その対角要素を設計者が指定する
方法をとった。実験に用いた m_0 、 Σ_0 は

$$m_0 = 0$$

$$\Sigma_0 = \text{diag} \{ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 5 \ 5 \ 5 \}$$

で、このときの \hat{A} 及び L は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -20.2 & -1.65 & 20.2 \\ 65.9 & -14.1 & 8.64 \\ -79.8 & 8.42 & -17.5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.10 & 1.67 & -2.02 \\ 1.67 & 13.9 & -8.46 \\ -2.02 & -8.46 & 16.6 \end{bmatrix}$$

のようになった。このときのオブザーバの極は

$$\begin{aligned} & -22.3 \pm j16.3 \\ & -7.09 \end{aligned}$$

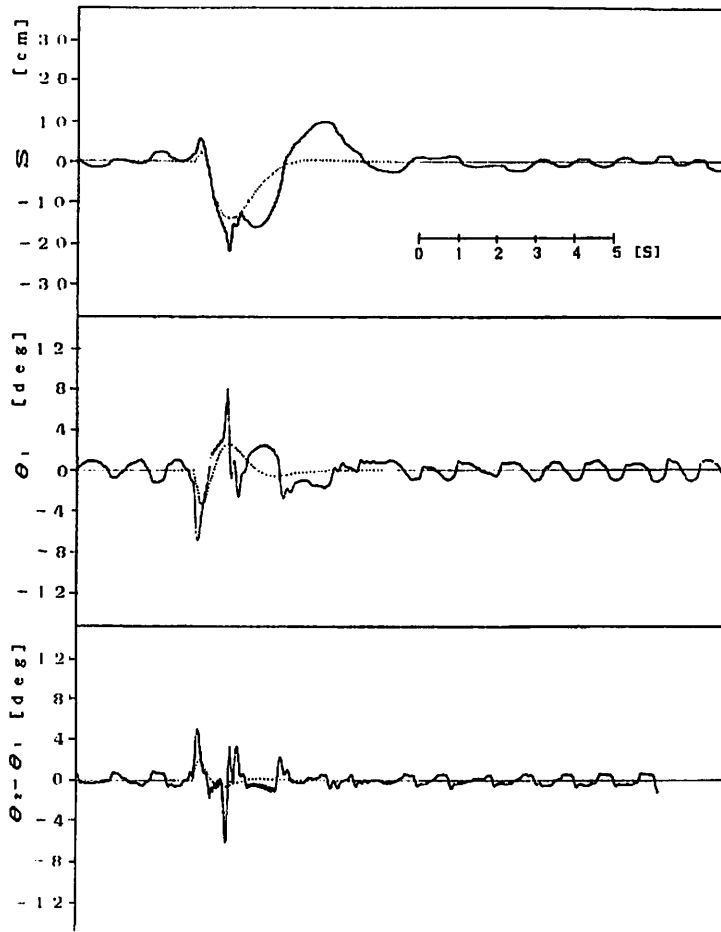


図8 Millerのオブザーバを用いた時の応答

となった。比較のために上述のMillerの最適オブザーバと同じオブザーバの極を持つが別のオブザーバゲインを有するオブザーバを構成する。そのオブザーバの \hat{A} と L は以下のようである。

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -18.6 & -1.89 & 1.92 \\ 66.4 & -14.0 & 7.20 \\ -80.7 & 11.7 & -19.2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.505 & 1.90 & -1.92 \\ 1.17 & 13.8 & -7.02 \\ -1.10 & -11.7 & 18.3 \end{bmatrix}$$

4.3 実験結果

Millerの最適オブザーバ併合系を用いた時の応答例を図8に、同じオブザーバの極をもつ別のオブザーバ併合系を用いた時の応答を図9に示す。これらは外乱として二重倒立振子の上の振子を一定の強さで叩いた時の応答である。点線はシミュレーション結果を示す。両図を比較すると、Millerの最適オブザーバ併合系を用いた方が制御性能が良いことがわかる。実験は数回行なわれたが、系の振舞いはそれぞれ図8、図9とほぼ同様であった。実験風景を図10に示しておく。

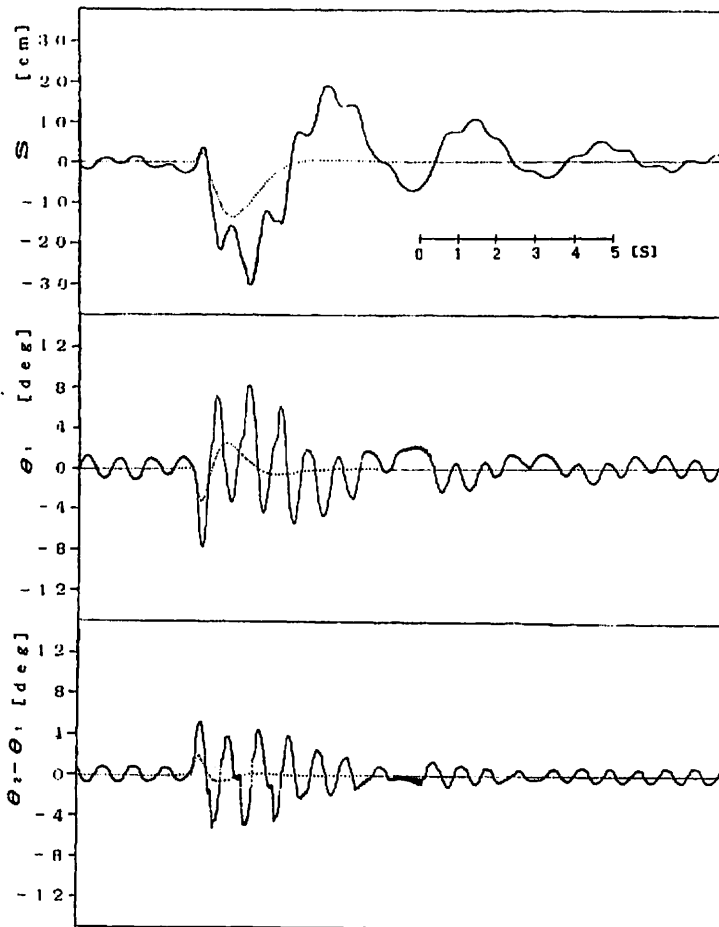


図9 Millerのオブザーバと同じオブザーバの極を持つが別のオブザーバゲインで構成されたオブザーバを用いた時の応答



図10 二重倒立振子の安定化制御実験風景

5. 考 察

二重倒立振子の制御装置の設計(レギュレータ, オブザーバの係数の決定)過程を考える。二重倒立振子系は非線形であるが制御装置の設計は非線形系を線形化した線形系で行う。この線形系で設計した制御装置を現実の非線形系に適用する。このことは設計時のシステムに一種のシステム変動が起こったと考えることができる。線形系で設計したものをもとの非線形系に適用した時制御性能が良いということは、上述の議論を考慮すれば、Millerのオブザーバ併合系はこの実験においてはロバストな制御系であるといえる。ちなみにシステム変動が起こらない場合、すなわち、非線形系を線形化した線形系で制御装置を設計してそれを線形系の数式モデルに適用してシミュレーションした結果(図8, 図9の点線の波形)を見ると、Millerのオブザーバ併合系を用いた方が、同じオブザーバの極を持つ他のオブザーバ併合系を用いた系よりもわずかに優れてはいるもののほとんど変わらないことがわかる。したがって、システム変動がない場合はMillerのオブザーバ併合系も同じオブザーバの極を持つ他のオブザーバ併合系もたいした差はないが、線形系から非線形系にシステム変動があったときにMillerのオブザーバ併合系は同じオブザーバの極を持つ他のオブザーバ併合系よりも制御性能が優れているわけであるから、Millerのオブザーバ併合系は議論している他のオ

ブザーバ併合系に比べてロバストな制御系であるといえる。今後はこのMillerのオブザーバ併合系のロバスト性について理論的検証を行ってきたい。

6. あとがき

本稿においては、当研究室で作製した二重倒立振子の安定化制御実験において、Millerの最適オブザーバ併合系がMillerの最適オブザーバと同一のオブザーバの極を持つ別のオブザーバ併合系に比べて線形系から非線形系へのシステム変動に対し、ロバストであるという実験データが得られたのでこれを報告した。今後は、このMillerの最適オブザーバ併合系のロバスト性の理論的検証を行ってきたい。

謝 辞

本研究を進めるにあたり貴重な示唆を与えて下さった本大学工学部電子・情報工学科の山下勝巳氏に心より感謝の意を表わします。また二重倒立振子の安定化制御システムを作製してくれた牧野良二君(現在、九州富士通システムエンジニアリング)、ならびに、シミュレーションを行ってくれた照屋泰一君(現在、沖縄富士通システムエンジニアリング)に感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) R. A. Miller: Specific optimal control of the linear regulator using a minimal order observer, Int. J. Control, Vol. 18, No. 1, pp. 139 - 159, 1973.
- (2) 古田, 英多, 川路, 原: メカニカルシステム制御, オーム社, 1984.
- (3) 牧野良二: 琉球大学工学部電気工学科卒業研究論文 昭和60年度
- (4) 長堂 勳: 琉球大学工学部電子情報工学科卒業研究論文 昭和60年度

(注1) 実際の実験においては、Millerのオブザーバと同じオブザーバの極を持つ他のオブザーバにおいてMillerのオブザーバゲインと極端に異なるオブザーバゲインを用いると二重倒立振子が立たなくなるのでMillerのオブザーバゲインと若干異なるオブザーバゲインを用いた。そのためにシミュレーションにおいてははたいして差が出なかったものと思われる。

付 録

ゴピナスの正準形式を用いた場合、(2.2)式は次のような形になる。

$$\hat{x}(t) = S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \omega(t) + S^{-1} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} y(t)$$

ただしSは適当な行列Wにより次のように構成された正則行列である。

$$S = \begin{bmatrix} C \\ W \end{bmatrix}$$

Sを単位行列とすると $\hat{x}(t)$ は次のように表わせる。

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) + L y(t) \end{bmatrix}$$

通常 $\omega(t)$ の初期値 $\omega(0)$ は零とするので、オブザーバの推定部分 $\omega(t) + L y(t)$ の初期値は $L y(0)$ となる。したがってLのノルムが大きければ、初期再現誤差が大きくなる。Millerの最適オブザーバの設計法による(3.1)式のLは他の設計法による(3.2)式のLに比べてLのノルムが小さくなっていることがわかる。