

琉球大学学術リポジトリ

反復解法による3次元画像再構成の高精度化

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-09-16 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 門馬, 寛明, 陳, 延偉, 仲尾, 善勝 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/1967

反復解法による3次元画像再構成の高精度化

門馬 寛明*

陳 延偉†

仲尾 善勝†

An Accurate Algorithm for Iterative Three-Dimensional Reconstruction

Hiroaki Monma, Y.-W.Chen, and Zensho Nakao

Abstract

ART法のような反復解法による画像再構成では、反復毎に投影を計算する必要があるため、投影を計算機で高精度かつ高速に計算しなければならない。本論文では、高精度かつ高速な再投影計算法を提案し、従来法との比較を行う。

1 はじめに

現在、医用X線CT画像再構成にはフィルター補正逆投影法が使われている。異なる原理に基づく再構成法、例えば、ART (Algebraic Reconstruction Techniques) 法も知られている。この方法は、反復再構成法の一つとして1937年にKaczmarz[1]によって提案され、Tanabeがその収束性について論じた[2]。初期の頃は射影法(Method of Projection)と呼ばれていた。ART法による再構成画像の画質はフィルター補正逆投影法によるものより劣るので、あまり注目されなかった。しかし、フィルター補正逆投影法を投影データが部分的に欠損している場合の再構成やコンベーム投影データからの3次元画像再構成などに適用するのは困難である。これらの場合には、ART法が有効であるといわれている[3]。それ以後Kaczmarzによって提案されたART法は再び脚光をあびるようになってきた[4, 5]。この方法は医用画像だけではなく、地理断層の解析やレーザー核融合で応用されており[6, 7]、応用技術の確立が望まれる。1970年代になってGordon, HermanなどによりARTの近似解法が提案された[8]。

ART法のアルゴリズムは、(1) 加法的ART (Additive ART), (2) 乗法的ART (Multiplicative ART) の2つに大別される。多くのアルゴリズムが提案され、その性能比較もされてきた。一方、ART法のような反復解法による画像再構成では、反復毎に投影を計算する必

要があるため、投影を計算機で高精度かつ高速に計算しなければならない。本論文では、高精度かつ高速な再投影計算法を提案する。

2 反復解法による画像再構成

反復解法による画像再構成では、まず適当な初期推定画像を設定し、次のような処理を繰り返す。

- Step1 推定画像に投影を行い、投影データRを算出する
- Step2 原画像からの投影データPと推定画像からの投影データRを比較
- Step3 投影データPとRが近似されるように推定画像に補正を加える

このように反復毎に投影を計算する必要があるため、高精度かつ高速な投影計算を行わなければならない。

さらに、離散画像における投影アルゴリズムを大別すると次のようになる。

- Step1 離散画像を回転させた回転画像を計算する
- Step2 回転画像の直交座標上において零度方向から投影を行う

この投影アルゴリズムから、高精度な投影データを得るには、高精度な回転画像の計算を必要とすることがわかる。従来方法では、座標回転時において離散的に座標を配置する際、新しい座標軸に対して各格子間の画素値は、近傍の格子点からの線形補間によって決定される。

受理：1998年5月25日

*大学院理工学研究科電気電子工学専攻
(Graduate Student, Dept. of Electrical and Electronic Eng.)

†工学部電気電子工学科
(Dept. of Electrical and Electronic Eng., Fac. of Eng.)

3 線形重み補間法

3.1 線形補間法

$$\begin{cases} u = x \cos \theta + y \sin \theta \\ v = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

上式は、座標 (x, y) を角度 θ 逆回転した回転座標系における座標を表しており、 u, v は実数値をとる。このとき、座標 (u, v) は回転座標上の格子点（整数値）と一致しない場合が多い。

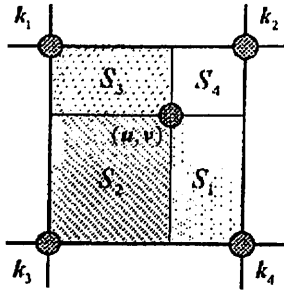


図1: 2次元画像の線形補間

線形補間法では、図1で示されるような面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を配分割合（以下、重みとよぶ）として、座標 (u, v) がもつ画素値 $f(u, v)$ を近傍の格子点 k_1, k_2, k_3, k_4 に配分する。例えば、 $S_1 = 0.21$ の場合、画素値 $f(u, v)$ の21%が格子点 k_1 の画素値 $f(k_1)$ に加算される。

3.2 線形補間法の問題点

線形補間法の問題点として、回転画像のある格子点に対する重みの合計が1とならないことがある。この問題点に対する解決策として、ファインサンプリング法の適用が提案された[9]。

この方法は、まず各座標間を細分化し、細分化された座標に対して線形補間を行うものである。これにより、線形補間のみを用いた大まかな画素値の配分に比べ、より高精度な画素値配分が行われる。

しかし、この方法では各座標間をより細分化するほど計算時間を必要とする。計算時間は、2次元においてはファインサンプリング数の2乗に比例し、3次元においてはファインサンプリング数の3乗に比例する。

この従来法を用いて高精度な投影データを得るためには、ファインサンプリング数を増加させる必要があり、その結果として多大な計算時間を要する[9]。そこで本研究では、高精度かつ高速で投影データを計算できる線形重み補間法を提案する[10]。

3.3 線形重み補間法

線形重み補間法は、格子点における重みの合計が1となるように線形補間法に重み補正を加えた方法であり、高精度な回転画像を得る。

図2は、格子点 (u, v) に寄与する重みの分布図である。実線は回転後のUV座標系であり、点線は回転前のXY座標系を表している。

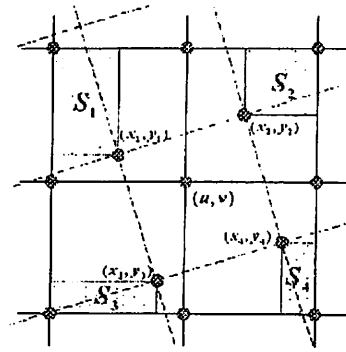


図2: 格子点 (u, v) に対する重みの分布

例として、格子点 (u, v) の画素値を求める。まず線形補間法を用い、画素値 $f(u, v)$ を求めると

$$f(u, v) = f(x_1, y_1) \cdot S_1 + f(x_2, y_2) \cdot S_2 + f(x_3, y_3) \cdot S_3 + f(x_4, y_4) \cdot S_4 \quad (2)$$

次に式(3)のように、格子点 (u, v) に対する重みの合計 $Q(u, v)$ を計算する。

$$Q(u, v) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (3)$$

$Q(u, v)$ を用い、式(2)で得られた画素値 $f(u, v)$ の補正を行う。

$$f'(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u, v)}{Q(u, v)} & Q(u, v) \neq 0 \\ 0 & Q(u, v) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

このように式(4)から得られる画素値 $f'(u, v)$ が、線形重み補間法により計算された格子点 (u, v) の画素値である。

3次元離散画像に対する線形重み補間法は、2次元の場合と同様な考え方によって行われる。3次元では重みとして体積が用いられ、回転画像の格子点に寄与する重みが8個となる[10]。

4 投影の離散的表現

4.1 2次元

まず2次元画像を対象とする投影の離散的表現を示す。平面上に直角座標系 $O-xy$ を設け、その上の画像を

$f(x, y)$ で表す。左上隅を原点として適当な大きさの正方領域を考え、それをさらに小正方形（これを画素という）に分割し、 $i = 1, \dots, N$ と番号付ける。第 i 番目の画素における画像 $f(x, y)$ の代表値を画素値といい、 f_i で表す。 $\{f_i\}, i = 1, \dots, N$ を離散画像という。本稿では、ある画素における画像の代表値として、画素の中心における画像の値をとる。

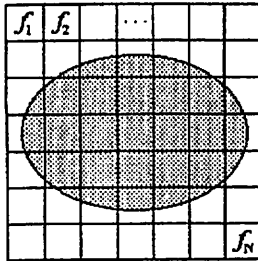


図 3: 離散画像

画素列をベクトルで表し、

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \quad (T \text{ は転置を表す}) \quad (5)$$

とおく。

このとき次式により $f(x, y)$ を f_i に対応づける。

$$i = L \times y + x + 1 \quad (6)$$

ただし L : 画像の幅 ($N = L^2$)

このような定義の下で、例えば画像 3×3 [pixels] の角度 θ に対する投影データは、式 (7) のように表される。

$$p^\theta = w f^\theta$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^\theta \\ f_2^\theta \\ \vdots \\ f_9^\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

このとき $L = 3, N = 9$

ここで、 f^θ は画像 f を θ 方向に逆回転させたもので、 f と同じ $N \times 1$ の画素ベクトルである。 p^θ は $L \times 1$ の投影ベクトルであり、 w は重みベクトルからなる $L \times N$ 行列である。

4.2 3次元

2次元画像は式 (5) のように表されるとし、 $L \times L \times L$ [voxels] の3次元画像を考える。2次元断層画像を $f_j, j = 1, 2, \dots, L$ とすれば3次元画像 F は次式のように表される。

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_L)^T \quad (8)$$

θ, ϕ 方向の投影における投影データ $P_{\theta, \phi}$ は次式を計算することにより得られる。

$$P_{\theta, \phi} = W F_{\theta, \phi} \quad (9)$$

$F_{\theta, \phi}$ は F の回転画像を表し、 W は θ° 方向からの3次元離散画像に対する投影の重みベクトルである。 θ° 方向からの2次元離散画像 f_j に対する投影の重みベクトルを w_j とすると、重みベクトル W は次式のように表される。

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_L)^T \quad (10)$$

このとき $N = L^2$ とすると、 w_j は $L \times N$ 行列、 W は $N \times N$ 行列である。

4.3 回転画像の計算

ここで、線形重み補間法を用いた回転画像の計算を示す。まず行列 A が次のように定義されるとき

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (11)$$

回転後の座標 (u, v, r) は次式を計算することにより得られる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし

x_c : 画像の中心点の x 座標

y_c : 画像の中心点の y 座標

z_c : 画像の中心点の z 座標

有効範囲 $1 \leq u \leq L, 1 \leq v \leq L, 1 \leq r \leq L$

次に u, v, r の小数部を切り捨てた整数 $[u], [v], [r]$ を求め、式 (13) を計算する。

$$\begin{cases} \Delta u = u - [u] \\ \Delta v = v - [v] \\ \Delta r = r - [r] \end{cases} \begin{cases} \Delta \bar{u} = 1 - \Delta u \\ \Delta \bar{v} = 1 - \Delta v \\ \Delta \bar{r} = 1 - \Delta r \end{cases} \quad (13)$$

ここで、回転画像の画素値を $f_k^{\theta, \phi}$ として次式を計算する。

$$\begin{cases} i = N \times z + L \times y + x + 1 \\ k = N \times [r] + L \times [v] + [u] + 1 \end{cases} \quad (14)$$

$i = 1, 2, \dots, E, k = 1, 2, \dots, E \quad (E = L^3)$

$f_k^{\theta, \phi}$ に対する f_i の重みを要素にもつ行列 S を用意し、すべての要素は初期値 \emptyset を持っている。式 (13), (14) で得られた値を用いて、次式を計算する。

$$\begin{aligned} S_{(k1)i} &= \Delta \bar{u} \times \Delta \bar{v} \times \Delta \bar{r}, & k1=k \\ S_{(k2)i} &= \Delta u \times \Delta \bar{v} \times \Delta \bar{r}, & k2=k+1 \\ S_{(k3)i} &= \Delta \bar{u} \times \Delta v \times \Delta \bar{r}, & k3=k+L \\ S_{(k4)i} &= \Delta u \times \Delta v \times \Delta \bar{r}, & k4=k+L+1 \\ S_{(k5)i} &= \Delta \bar{u} \times \Delta \bar{v} \times \Delta r, & k5=k1+N \\ S_{(k6)i} &= \Delta u \times \Delta \bar{v} \times \Delta r, & k6=k2+N \\ S_{(k7)i} &= \Delta \bar{u} \times \Delta v \times \Delta r, & k7=k3+N \\ S_{(k8)i} &= \Delta u \times \Delta v \times \Delta r, & k8=k4+N \end{aligned}$$

ただし S_{ki} : S の k 行 i 列目の要素

以上の計算をすべての画素に行い、行列 Q を求める。

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_1} & & & \emptyset \\ & \frac{1}{Q_2} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \frac{1}{Q_E} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^E S_{ki}$$

Q_k : 第 k 番目の画素に対する重みの合計

最後に次式を計算すると、回転画像 $F_{\theta, \phi}$ を得る。

$$F_{\theta, \phi} = Q S F \quad (16)$$

また次式を計算すると、従来の線形補間法による回転画像が得られる。

$$F_{\theta, \phi} = S F \quad (17)$$

4.4 投影データの計算

式 (16) を式 (9) に代入すると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} P_{\theta, \phi} &= W Q S F \\ &= H F \end{aligned} \quad (18)$$

このとき

$$H = W Q S$$

ここで W は一定解をもち、 Q, S は回転角 θ, ϕ に対して一様に求まるので、 H は一定解をもつ。したがって、反復毎に H を計算する必要はなく、回転画像を計算せずに投影データを得る。

5 シミュレーション

(1) ファントム

ファントムとして有名な Shepp and Logan ファントムを用いて、2次元画像におけるシミュレーションを行った。ファントムの画像サイズは、 64×64 [pixels] である。また投影方向数を 10 方向とし、投影角 θ ($0^\circ \leq \theta < 180^\circ$) を 18° の等間隔にとり、投影を行っている。ただし、投影データは再投影と同じ方法で得られているため、再投影による誤差は考慮していない。再生誤差はアルゴリズム自身の誤差となる。

3次元画像におけるシミュレーションでは Gauss ファントムを用いた。ファントムの画像サイズは、 $32 \times 32 \times 32$ [voxels] である。また画像の中心点 (x_c, y_c, z_c) における画素値 (正規分布関数のピーク値) は 255.0、画素の最小値が \emptyset である。投影方向数を 4 方向として、投影角は適当な値を与えており、投影ベクトル P には、理論値を与えている。本研究における理論値とは、 0° 方向からの投影データである。

(2) 誤差

原画像 F と推定画像 \hat{F} の誤差評価式を示す。

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{x=0} \sum_{y=0} \sum_{z=0} \{F(x, y, z) - \hat{F}(x, y, z)\}^2}{\sum_{x=0} \sum_{y=0} \sum_{z=0} \{F(x, y, z)\}^2}} \quad (19)$$

また、原画像 F の投影データ P と推定画像 \hat{F} の投影データ R の誤差評価式を示す。

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{v=0} \sum_{r=0} \{P(v, r) - R(v, r)\}^2}{\sum_{v=0} \sum_{r=0} \{P(v, r)\}^2}} \quad (20)$$

これらは3次元画像における評価式であり、2次元画像における評価式は $z = \emptyset, r = \emptyset$ とすることにより得られる。

(3) 画像再構成法

反復解法の一つである MART 法 [11] と EM-ML 法 [12] を用いて、画像再構成を行った。以下に MART 法と EM-ML 法を示す。

i) MART 法

$$\hat{F}_i^{k+1} = \hat{F}_i^k \left(\frac{P_j}{R_j} \right)^{H_{ji}} \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

ここで、画素数を N 、投影数 M 、反復回数 k とした。 P は原画像 F から得られる投影ベクトル、 R は推定画

表 1: 誤差と実行時間の比較

	MART	EM-ML
画素値の誤差	17.645 ⁽³⁸⁷¹⁾	14.923 ⁽⁷⁵⁾
実行時間 [秒]	657	253

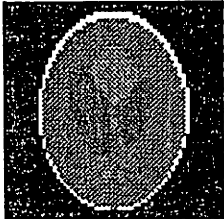
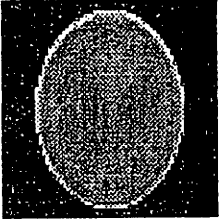
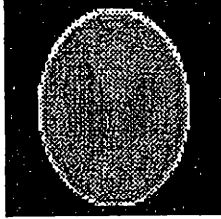
phantom	MART法	EM-ML法
		
Shepp and Logan	Error = 17.65 [%]	Error = 14.92 [%]

図 4: 再構成結果

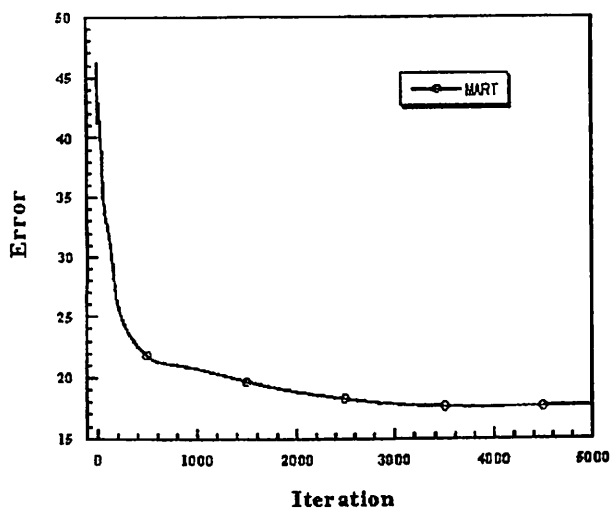


図 5: MART法による画素値誤差

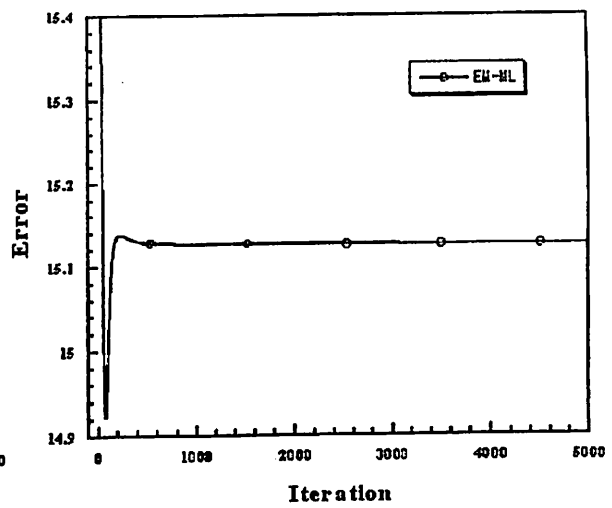


図 6: EM-ML法による画素値誤差

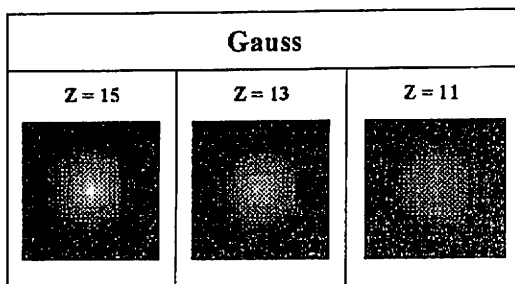


図 7: Gauss ファントム

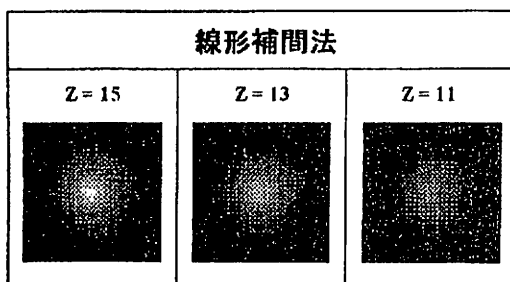


図 8: Gauss ファントムの再構成結果

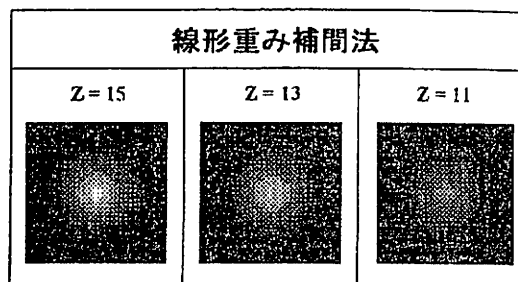


図 9: Gauss ファントムの再構成結果

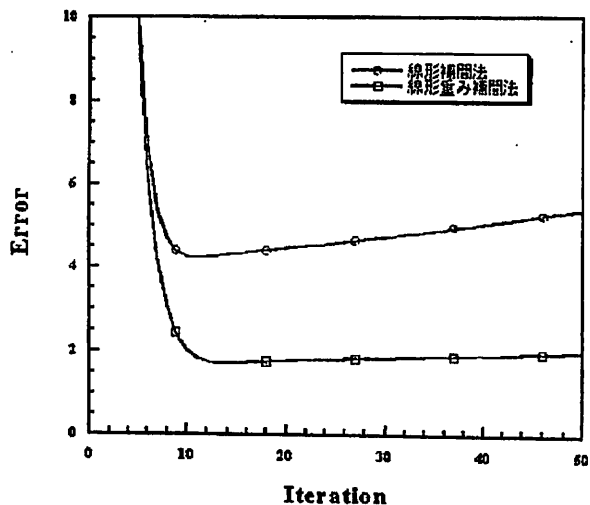


図 10: 画素値の誤差

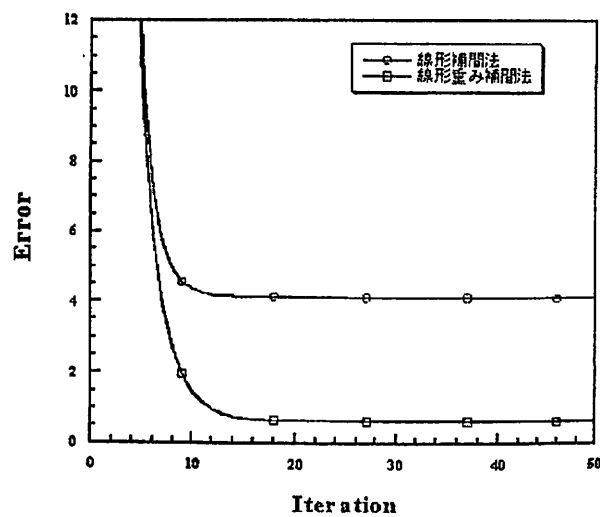


図 11: 投影の誤差

表 2: 誤差と実行時間の比較

	線形補間法		線形重み補間法	
	11 回目	50 回目	14 回目	50 回目
画素値の誤差	4.243	5.410	1.723	2.002
投影誤差	4.263	4.098	0.769	0.636
実行時間	10 [秒]		11 [秒]	

像 \hat{F} から得られる投影ベクトルである。また、 H は投影の重みベクトルである。

ii) EM-ML法

$$\hat{F}^{k+1} = (C \hat{F}^k) \{H^T (R'P)\} \quad (22)$$

ただし

$$C_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^M H_{ij}^T & i = j \\ \emptyset & i \neq j \end{cases} \quad R'_{ij} = \begin{cases} R_i & i = j \\ \emptyset & i \neq j \end{cases}$$

C : $N \times N$ 行列

R' : $M \times M$ 行列

$$i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$$

(4) シミュレーション結果

反復回数を 5000 回として、2 次元画像におけるシミュレーションを行った。表 1 は誤差および実行時間を示しており、() 内の数値は最小の誤差値が得られた反復回数である。

EM-ML法を用いた 3 次元画像におけるシミュレーション結果を図 7,8,9 に示す (反復回数: 50 回)。これらは $z = 11, 13, 15$ における 2 次元断層画像である。従来法と本提案法における最小の画素値誤差は、それぞれ反復 11 回目および 14 回目で得られた。表 2 に示されるように本提案法では、画素値誤差および投影誤差においてより良い結果が得られた。

6 まとめ

本論文では高精度かつ高速な再投影計算法を提案し、従来法との比較を行った。ここで挙げた性能比較によれば、本提案法がすべての画像に対して優越するとは言いがたく、今後は様々な画像に対する実験を行っていく。実際の応用において、本論文で示した行列計算を計算機で処理する場合は莫大なメモリ量を必要とするため、効率的なアルゴリズムを考案しなければならない。

参考文献

[1] Kaczmarz S, Angenaherte auflosung von systemen lenearer gleichungen, Bull lut Acad Pol Sci Lett A, 355-357, 1937
 [2] Tanabe K, Projection method for solving a singular system, Number Math 17, 203-214, 1971

[3] Herman GT and Rowland S, Resolution in ART an experimental investigation of the resolving power of an algebraic picture reconstruction technique, J Theor Biol 33, 213-223, 1971
 [4] Oskoui-Fard P and Stark H, Tomographic image reconstruction using the theory of convex projections, IEEE Trans on Med Imag 7(1), 45-58, March 1988
 [5] Jiye X and Kapp OH, Three dimensional algebraic reconstruction from projections, Optik 72(3), 87-94, 1986
 [6] Balanis CA and Bentley JD, Algorithm and filter selection in geophysical tomography, IEEE Trans Geosci & Remote Sensing GE-24, 983-996, 1986
 [7] YW.Chen et al., Three-Dimensional Imaging of Laser-Implored Targets Using X-ray Computed Tomography Technique, IEEE Trans. Vol. Ns-44, No.3, pp.890-893, 1997
 [8] Herman GT, Lent A and Rowland SW, Art mathematics and applications a report on the mathematical oundations and on the applicability to real data of the algebraic reconstruction techniques, J Theor Biol 42, 1-32, 1973
 [9] 吉谷 邦弘, 「逐次近似法による 3 次元画像再構成の高精度化に関する研究」, 琉球大学工学部 平成 8 年度 卒業論文
 [10] 門馬 寛明, 「画像再構成における種々の反復解法に関する研究」, 琉球大学工学部 平成 9 年度 卒業論文
 [11] 譚 玉峰, 佐藤 俊輔, 「新しい ART 反復解法の提案および種々の方法間の性能比較」, Med.Image.Tech. Vol.11 No.2, June 1993
 [12] Wenli W and Gene G, 「Noise Analysis of Regularized EM for SPECT Reconstruction」, Proc. of IEEE NSS & MIC, pp.1933-1937, 1996