

琉球大学学術リポジトリ

傾斜海浜上でのソリトン変形に及ぼす風の影響

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Soliton, Wave shoaling, Wind effects, Korteweg-de Vries equation 作成者: 筒井, 茂明, 下地, 玄一郎, Tsutsui, Shigeaki, Shimoji, Genichiro メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/2210

傾斜海浜上でのソリトン変形に及ぼす風の影響

筒井茂明* 下地玄一郎**

Wind Effects on the Soliton Evolution on Slopes

Shigeaki TSUTSUI* Genichiro SHIMOJI**

Abstract

Design waves for near-shore structures are the representatives of shallow water waves in strong wind, and wind stresses acting on the wave surface have significant effects on the changes in hydraulic properties of the waves, such as the breaking point and wave height.

To clarify the wind effects on soliton evolution, a numerical symulation is used based on the shallow water wave equation with perturbed terms (Perturbed Korteweg-de Vries equation), derived under the assumption of a equilibrium state between the nonlinearity and dispersion of waves, wind stresses, bottom friction, and viscous effects of water. The structure of soliton profiles and changes in breaking characteristics are, in particular, investigated in detail, comparing with the asymptotic solution by the inverse scattering theory.

The significant evolution of the soliton, the rise of the water level (plateau) and the following tail, is produced by the shoaling and wind effects, and this evolution occurs after the "soliton time". So the amplification factor of soliton height is directly subject to the scale of plateau, which becomes great in the case of wave propagation on steep slopes. It is also shown that the wind stresses are effective on the soliton with great amplitude on small slopes and that the soliton, as the results, breaks rather on the off-shore side than breaking points of no wind.

Key words : Soliton, Wave shoaling, Wind effects, Korteweg-de Vries equation.

受付：1986年10月31日

•工学部土木工学科

Dept. of Civil Engineering, Fac. of Eng.

•大学院工学研究科建設工学専攻

Graduate Student, Construction Engineering.

1. 緒言

海岸災害の主要な外力の1つに風波があり、沖合で発生発達した波浪が岸に近づくと、絶えず風的作用を受けつつ水深の減少に伴って浅水変形や屈折、海底摩擦、砕波などの影響を受けて、その性質がいろいろに変化する。海岸・港湾構造物の多くは通常浅海の領域に構築され、そこでは深海から来襲した波はすでに変形が起きている。したがって、深海波から、設計に必要な外力としての浅海波を推算する場合には、波がその過程でどのように変形したか、そしてその結果として、波高その他の水理特性がどのように変化したかを量的に知る必要がある。

特に浅海波に作用する風の応力は、表層流による砕波波高、砕波点の移動¹⁾あるいは強風が連吹するときの吹送流の発生など水理特性に大きな影響を及ぼす。海岸・港湾構造物に対する設計波は、通常強風時の波浪であるから、この風の影響について十分留意しなければならない。しかし、その評価に適する波動理論は確立されておらず、未知な面が多々存在する。

そこで、本研究においては、その第1歩として、波の非線形性および分散性と風の応力、海底摩擦および粘性項とが平衡状態にある場合の浅海長波の方程式を導き、次いで、差分法による数値シミュレーションを行ない、その結果に基づきソリトンの伝播変形に及ぼす風の影響、特に、波形、波高、砕波水深などの基本水理量の変化特性を調べる。

2. 風の応力および海底摩擦を考慮した

KdV方程式

2.1 基礎方程式の誘導

傾斜海浜上における非圧縮性の波動を対象として、図-1に示すように静水面上に原点をおく座標系 (x, z) を採り、波の表面は $z = \eta$ で表わす。また、全物理量は、座標原点での水深 h_0 、重力加速度 g 、水の密度 ρ を用いた基準長 h_0 、時間 $\sqrt{h_0/g}$ 、速度 $\sqrt{gh_0}$ および応力 ρgh_0 による無次元量とする。基本方程式は次下の諸式で与えられる。

連続方程式;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

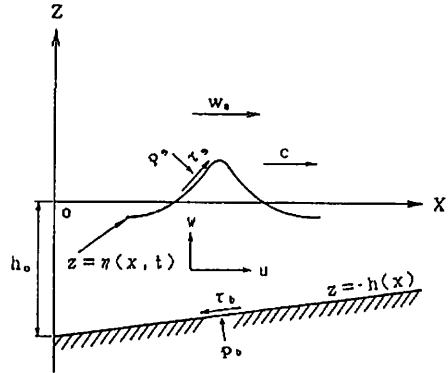


図-1 座標系および記号の説明

Navier-Stokes の方程式;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -1 - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w \quad (3)$$

境界条件;

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w = 0 \quad \text{at } z = \eta - \delta_s \approx \eta \quad (4)$$

$$u \frac{dh}{dx} + w = 0 \quad \text{at } z = -h + \delta_s \approx -h \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} -\rho_s + \tau_s \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\rho + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\rho_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_s &= \left(-\rho + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &\quad - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} -\rho_0 - \tau_0 \frac{dh}{dx} &= -\rho + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{dh}{dx} \\ \rho_0 \frac{dh}{dx} - \tau_0 &= -\left(-\rho + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dh}{dx} \\ &\quad - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{at } z = \eta - \delta_b \approx -h \quad]$$

ただし, (u, w) : 水粒子速度の (x, z) 成分, $h(x)$: 水深, p : 圧力, τ : 接線応力, $R = h_0 \sqrt{g h_0} / \nu$, ν : 水の動粘性係数, ∇^2 : Laplacian を表わす。また, 海面および海底で生じる境界層厚 δ_s, δ_b は水深に比べて十分薄いと仮定しており, 対応する諸量には添字 s, b が付されている。

以下では, 水深平均を行なった基礎方程式を求め, 水平方向の平均流速 \bar{u} を次式で定義する。

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (8)$$

連続方程式 (1) を z について水深平均を行うと

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \left[w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{\eta} - \left[w + u \frac{dh}{dx} \right]_{-h} = 0 \quad (9)$$

となり, 境界条件および平均流速 \bar{u} を用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h + \eta) \bar{u} \right\} = 0 \quad (10)$$

Navier-Stokes の方程式の x 成分は,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz \\ & - \left[u \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w \right) \right]_{\eta} \\ & - \left[u \left(u \frac{dh}{dx} + w \right) \right]_{-h} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(-p + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz \\ & - \left[\left(-p + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{\eta} \\ & - \left[\left(-p + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{-h} \end{aligned} \quad (11)$$

となり, 境界条件から次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(-p + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz \\ & + p_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + p_b \frac{dh}{dx} + \tau_s - \tau_b \end{aligned} \quad (12)$$

さらに, 平均流速 \bar{u} を用いて, 上式の左辺を变形すると次式となる。

$$(h + \eta) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u - \bar{u})^2 dz$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(-p + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + p_s \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + p_b \frac{dh}{dx} + \tau_s - \tau_b \end{aligned} \quad (13)$$

同様に, Navier-Stokes の方程式の z 成分からは次式が得られる。

$$\begin{aligned} & p = p_s + \eta - z + \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{\eta} u w dz \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \\ & - w^2 + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - \tau_s \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

また, 海底での圧力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & p_b = p_s + \eta + h + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u w dz \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \\ & - \tau_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_b \frac{dh}{dx} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, 式 (14), (15) において圧力変動成分を

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{\eta} u w dz \\ & - w^2 - \tau_b \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \bar{p}_b &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u w dz \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \\ & - \tau_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_b \frac{dh}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

とおくことにより, 次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} p &= p_s + \eta - z + \bar{p} \\ p_b &= p_s + \eta + h + \bar{p}_b \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なお, 鉛直流速は連続方程式より次式で与えられる。

$$w = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^x u dz \quad (18)$$

式 (13) に式 (17) を代入すると, Navier-Stokes の方程式の x 成分は次式となる。

$$\begin{aligned} & (h + \eta) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u - \bar{u})^2 dz \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left(-\bar{p} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz \end{aligned}$$

$$+\frac{dh}{dx} + \tau_s - \tau_b \quad (19)$$

2.2 風の影響を考慮したKdV方程式

風の影響を考慮したKdV(P-KdV)方程式は以下のようにして得られる。まず、微小パラメータ $\varepsilon = a/h$, $\Delta\delta = h/l$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \Delta\delta x, & t^* &= \Delta\delta t, \\ u &= \varepsilon u^*, & \bar{u} &= \varepsilon \bar{u}^*, & w &= \Delta\delta \varepsilon w^*, \\ \eta &= \varepsilon \eta^*, & p &= \varepsilon^2 \bar{p}^*, & p_s &= \varepsilon^2 \bar{p}_s^*, \\ \bar{p}_b &= \varepsilon^2 \bar{p}_b^*, & \tau_{s,b} &= \Delta\delta \varepsilon^2 \tau_{s,b}^* \end{aligned} \right\} (20)$$

とおくと、海面および海底での境界条件式(6), (7)はそれぞれ次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \varepsilon^2 \tau_s^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} &= \varepsilon^2 \left(-\bar{p}^* + \frac{2x}{R_e} \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R_e} \varepsilon \varepsilon^3 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + x \varepsilon \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\ -\varepsilon^2 \tau_s^* &= -\frac{1}{R_e} \varepsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + x \varepsilon \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(-\bar{p}^* + \frac{2x}{R_e} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\ &\quad \text{at } z \approx \eta^* \\ -\varepsilon^2 \bar{p}_b^* - \varepsilon \varepsilon^2 \tau_b^* \frac{dh}{dx^*} &= \varepsilon^2 \left(-\bar{p}^* + \frac{2x}{R_e} \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R_e} \varepsilon \varepsilon^3 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + x \varepsilon \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \frac{dh}{dx^*} \\ \varepsilon^2 \left(\bar{p}_b^* \frac{dh}{dx^*} - \tau_b^* \right) &= -\frac{1}{R_e} \varepsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + x \varepsilon \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\bar{p}^* - \frac{2x}{R_e} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \frac{dh}{dx^*} \\ &\quad \text{at } z \approx -h \end{aligned} \right\} (21)$$

ただし、 $x\varepsilon = \delta^2 \Delta^2$, $\Delta\delta R = R_e$ である。境界層外縁においては $(1/R_e)(\partial u^*/\partial z) \sim O(1)$ であり、浅海長波を考えると $x \sim O(1)$ とすれば、上の2式より最低次のオーダーでは $\partial u^*/\partial z = 0$ となる。したがって、第1近似では $u^* = \bar{u}^* + O(\varepsilon)$ となり、式(19)の左辺第2項は $O(\Delta\delta \varepsilon^4)$ となり、他の項に比べて無視できる。また、鉛直流速を与える式(18)は、

$$w^* = -\frac{\partial(\bar{u}^* h)}{\partial x^*} - z \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + O(\varepsilon) \quad (22)$$

となるから、式(18)は次式のように変形される。

$$\varepsilon^2 \bar{p}^* = \varepsilon \varepsilon^2 \left\{ z \frac{\partial^2(\bar{u}^* h)}{\partial t^* \partial x^*} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t^* \partial x^*} \right\} \\ - \frac{2}{R_e} \varepsilon \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + O\left(x \varepsilon^3, \frac{1}{R_e} x \varepsilon^3\right) \quad (24)$$

$$\varepsilon^2 \bar{p}_b^* = \varepsilon \varepsilon^2 \left\{ -h \frac{\partial^2(\bar{u}^* h)}{\partial t^* \partial x^*} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t^* \partial x^*} \right\} \\ + O\left(x \varepsilon^3, \frac{1}{R_e} x \varepsilon^3\right) \quad (25)$$

これらの式と、式(19)から次式が得られる。

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + \varepsilon \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial p_s^*}{\partial x^*} \\ = \varepsilon \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2(\bar{u}^* h)}{\partial t^* \partial x^{*2}} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}^*}{\partial t^* \partial x^{*3}} \right\} \\ + \frac{4}{R_e} \varepsilon \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dx^*} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} \right\} \\ + \varepsilon^2 \frac{\tau_s^* - \tau_b^*}{h + \varepsilon \eta^*} \quad (26)$$

ここで、水深によってきまる長波の波速で移動する座標系を導入する。この座標からみると、現象は、ほぼ定常に近くみえる。水深変化の影響などで波形は変化するが、これはかなりゆるやかに生じ、この変化量は小さいから、かなり長い x を経過したあとにはじめて目につくようになる。これを見つめるには、 x に微小なパラメータを乗じて水平長さを縮めると判り易い。そこで、

$$\xi = \int h^{-1/2} dx^* - t^*, \quad X = \gamma \varepsilon x^*, \quad z = z \quad (27)$$

という新座標を導入する。したがって、式(10)および式(26)は次のようになる。

$$\left\{ -\frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} + \sqrt{h} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \xi} \right\} \\ + \varepsilon \left\{ \frac{\eta^*}{\sqrt{h}} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \xi} + \frac{\bar{u}^*}{\sqrt{h}} \frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} + \gamma h \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial X} \right. \\ \left. + \gamma \bar{u}^* \frac{dh}{dX} \right\} + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (28) \\ \left\{ -\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} \right\} \\ + \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \eta^*}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial p_s^*}{\partial \xi} \right. \\ \left. - \frac{1}{h} (\tau_s^* - \tau_b^*) - \frac{4x}{R_e} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \xi^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} x h \frac{\partial^3 \bar{u}^*}{\partial \xi^3} \right\} + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (29)$$

上式(28), (29)の $O(\varepsilon^0)$ の項から

$$\bar{u}^* = \frac{\eta^*}{\sqrt{h}} \quad (30)$$

が得られ、 $O(\varepsilon)$ の項に対して上式の \bar{u}^* の値を代入

すると、両式から

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi} + \gamma \sqrt{h} \frac{\partial \eta^2}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\sqrt{h}} \frac{dh}{dX} = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi} + \gamma \sqrt{h} \frac{\partial \eta^2}{\partial X} \\ &= -\frac{\partial p_s^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{h}} (\tau_s^* - \tau_b^*) \\ & \quad + \frac{4x}{R_s} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{3} x h \frac{\partial^3 \eta^2}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。式(31)と式(32)の和をとり原変数で表わすと、最終的に次式で示されるP-KdV方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} h^{-1} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{6} h^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \\ & \quad + \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} \eta = \frac{2}{R} h^{-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \\ & \quad - \frac{1}{2} h^{-1} \frac{\partial p_s}{\partial \xi} + \frac{1}{2h} (\tau_s - \tau_b) \end{aligned} \quad (33)$$

2.3 風の応力表示

式(33)右辺の外力項において、圧力は水面勾配に比例し、接線応力は空気流をポテンシャル流で近似すると水面変位に比例すると考えられるので、外力項は次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &= \sigma_p \frac{\partial \eta}{\partial \xi}, & \sigma_p &= C_s \frac{\rho_a}{\rho} (W_a - c)^2, \\ \tau_s - \tau_b &= \sigma_r (1 + \delta_1 \eta) - s u |u|, \\ \sigma_r &= (1 + m_b) C_a \frac{\rho_a}{\rho} W_a^2 \end{aligned} \right\} (34)$$

ここに、 ρ_a ：空気の密度、 C_s ：遮蔽係数、 C_a ：海面摩擦係数、 s ：海底摩擦係数、 W_a ：風速、 c ：位相速度、 m_b ：海底摩擦力が海面摩擦力に及ぼす影響の程度を示す係数、 δ_1 ：海面摩擦力の分布係数である。

海面摩擦力の平均応力は主に海水の平均流に、変動成分は表層流の生成にそれぞれ寄与する²⁾と考えられるので、ここでは変動成分のみを対象とする。したがって、式(34)の第3式は次式となる。

$$\tau_s - \tau_b = \delta_1 \sigma_r \eta - s h^{-1} \eta |\eta| \quad (35)$$

さらに、変換式

$$\eta = -6h^2 \zeta, \quad \tau = \frac{9}{2} \int h^{\frac{1}{2}} dx, \quad \sigma = 3 \xi \quad (36)$$

を用いると、式(33)からP-KdV方程式として次式が

得られる。

$$\zeta_\tau - 6 \zeta \zeta_\sigma + \zeta_{\sigma\sigma\sigma} = \epsilon_1 \zeta + \epsilon_2 \zeta_{\sigma\sigma} + \epsilon_3 \zeta |\zeta| \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= -\frac{9}{4} h^{-1} h_r + \frac{1}{9} \delta_1 \sigma_r h^{-\frac{1}{2}} \\ \epsilon_2 &= \frac{4}{R} h^{-2} - \sigma_p h^{-1} \\ \epsilon_3 &= -\frac{2}{3} s h^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \zeta \end{aligned} \right\} (38)$$

ただし、 sgn は符号関数である。

分布係数 δ_1 は上述のポテンシャル近似では、周期波の場合には波数の2倍である。ソリトンに対しては、その波高を H_0 とし、波形の第1次近似式を、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= H_0 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{3}{4}} H_0 (x - ct), \\ c &= 1 + \frac{1}{2} H_0 \end{aligned} \right\} (39)$$

で与えると、分布係数は次式で得られる(Appendix 1)。

$$\delta_1 = \sqrt{3} H_0 \quad (40)$$

2.4 差分スキームとその安定性

式(37)の差分法による数値計算では、初期波形として式(39)を与え、初期波の波高 H_0 、見かけの周期 T_0 を用いて、波高および周期がともに1となるように正規化を行って差分計算を行った。ただし、見かけの周期はソリトン幅に対して十分大きくし、この影響が差分計算に及ばないように留意した。差分スキームは打ち切り誤差を $O\{(\Delta\tau)^2, (\Delta\sigma)^2\}$ とし、左辺KdV項に対してはFrommの形式であるZubusky²⁾の差分スキームを用い、右辺各項は陰的差分スキームとし、第2項のBurgers項には中心差分を用いた。以上より、式(37)に対する差分方程式は次式で与えられる(Appendix 2)。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_j^{n+1} &= \left\{ (6 - \lambda_1) \zeta_{j+1}^n - (2 + \lambda_1) (\zeta_{j+2}^n - \zeta_{j-1}^n) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_3 (\zeta_{j+1}^n + \zeta_{j-1}^n) \right\} / \left\{ 6 - \lambda_1 + 2\lambda_3 \right. \\ & \quad \left. - \lambda_4 - \lambda_5 \right\} \\ \Delta\tau &= \frac{1}{4} (\Delta\sigma)^2, \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2} (\Delta\sigma)^2 (\zeta_{j+2}^n + \zeta_{j-1}^n), \\ \lambda_2 &= 1, \quad \lambda_3 = 2\epsilon_2 \Delta\sigma, \quad \lambda_4 = 2\epsilon_1 (\Delta\sigma)^2, \\ \lambda_5 &= 2\epsilon_3 (\Delta\sigma)^2 |\zeta_j^{n+1}| \end{aligned} \right\} (41)$$

ただし、 $\zeta_s^j = \zeta(j\Delta\sigma, n\Delta\tau)$ を表わす。

差分スキームの安定性については、次式で与えられる Von Neuman の必要条件⁹⁾を満たしている。

$$|\text{増幅係数}| \leq 1 + O(\Delta\tau) \quad (42)$$

上式は通常の条件と $O(\Delta\tau)$ の項だけ異っているが、式(37)の右辺に ζ が含まれているため解は指数関数的に増加する傾向をもっている。したがって、数値解もこの特性をもつ必要があり、安定性の条件として式(42)を用いれば、このような解も含むことが可能である。

3. 逆散乱法によるソリトン変形の漸近特性

P-KdV 方程式(37)に対して各種の方法で解が求められているが、ここでは逆散乱法(I.S.T)による Karpman¹⁰⁾らの諸結果を適用する。式(37)の解を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\sigma, \tau) &= -2\kappa^2(\tau) \{ \text{sech}^2 \vartheta + \omega(\vartheta, \tau) \} \\ \vartheta &= x(\tau) \{ \sigma - \theta(\tau) \} \\ \theta(0) &= 0, \quad \omega(\vartheta, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (43)$$

ここに、 θ は位相であり、 ω は式(37)右辺の摂動項により生じる波動解であり、後述するように波峯の後方で発生する水位上昇(plateau) および振動的な水位変動(tail)を表わしている。また、 x および θ の変化は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{1}{4x} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon R(\zeta_s) \text{sech}^2 \vartheta d\vartheta \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 4x^2 - \frac{1}{4x^3} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon R(\zeta_s) \{ \vartheta \text{sech}^2 \vartheta \\ &\quad + \tanh \vartheta + \tanh^2 \vartheta \} d\vartheta \end{aligned} \right\} (44)$$

ここに、 $\zeta_s = -2\kappa^2 \text{sech}^2 \vartheta$ であり、 εR は式(37)の右辺を表わす。さらに、ソリトン変動 ω は次式で近似される。

$$\left. \begin{aligned} \omega(\vartheta, \tau) &= -\frac{1}{32\pi\kappa^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \\ &\quad - 2\text{sgn}(x_0) \frac{x_0}{x} \tanh \vartheta \text{sech}^2 \vartheta \\ v(\vartheta, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\rho)(\rho + i \tanh \vartheta)^2}{(\rho^2 + 1)^3 (\rho - ix_0/x)} \\ &\quad \times \frac{1 - e^{i\lambda \rho^2 + 2i\kappa \rho \vartheta}}{\rho} e^{2i\vartheta \rho} d\rho \\ A(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon R(\zeta_s) (\rho - i \tanh \vartheta')^2 e^{-2i\vartheta \rho'} d\vartheta' \end{aligned} \right\} (45)$$

$$\frac{x_0}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\vartheta, \tau) d\vartheta = -\frac{1}{2} \varepsilon q x \theta \quad (46)$$

$$\varepsilon q = \frac{1}{4x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon R(\zeta_s) \tanh^2 \vartheta d\vartheta$$

ただし、 $\lambda = 8\kappa^2 \tau$ 、 sgn は符号関数である。

以上の諸式を用いると、まず、plateau 高 $\omega^{(0)}$ および tail $\omega^{(1)}$ はそれぞれ次のようになる。

$$y = 2\kappa\sigma / (3\lambda)^{1/2} \gg (3\lambda)^{2/3} :$$

$$\omega^{(0)} \sim -\frac{\varepsilon q}{2} \int_{-\infty}^y Ai(y) dy \sim -\frac{\varepsilon q}{2} \quad (47)$$

$$y < 0, \quad |y| \gg (3\lambda)^{2/3} \gg 1 :$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1)} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda\beta}} \frac{e^{-\beta\pi}}{1+\beta^2} \\ &\quad \times \left\{ \varepsilon q - \frac{4}{15} (3\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \frac{\beta^2}{x} \right\} \\ &\quad \times \cos \left\{ 2\lambda\beta^2 + \frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{\beta} \right\} \end{aligned} \right\} (48)$$

$$\beta = \left(\frac{2|x|\sigma|}{3\lambda} \right)^{1/2} \gg 1, \quad \sigma < 0$$

ここに、 $Ai(y)$ は Airy 関数であり、 εq は次式で与えられる。

$$\varepsilon q = -\frac{\varepsilon_1}{3x^3} - \frac{4}{15x} (2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \quad (49)$$

また、ソリトンの主峯は次式で近似される。

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(c)} &\sim \omega_1^{(c)} + \omega_2^{(c)} + \omega_3^{(c)} \\ \omega_1^{(c)} &= -\frac{\varepsilon_1}{6x^3} \left[-\tanh^2 \vartheta + \text{sech}^2 \vartheta \right. \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{24} \right) \tanh \vartheta \right. \\ &\quad \left. \left. + \vartheta (1 - 2 \tanh \vartheta) - \frac{1}{2} \vartheta^2 \tanh \vartheta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tanh \vartheta \log(\cosh \vartheta) \right\} \right] \\ \omega_2^{(c)} &= -\frac{4\varepsilon_2}{15x} \left[-\tanh^2 \vartheta + \text{sech}^2 \vartheta \right. \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\frac{9}{4} + \frac{\pi^2}{48} \right) \tanh \vartheta \right. \\ &\quad \left. - \vartheta \left(\frac{1}{2} + 2 \tanh \vartheta \right) + \frac{1}{4} \vartheta^2 \tanh \vartheta \right. \\ &\quad \left. - \tanh \vartheta \log(\cosh \vartheta) \right\} \\ &\quad \left. - \frac{9}{4} \tanh \vartheta \text{sech}^4 \vartheta \right] \\ \omega_3^{(c)} &= \frac{2\varepsilon_3}{15x} \left[-\tanh^2 \vartheta + \text{sech}^2 \vartheta \right] \end{aligned} \right\} (50)$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{12} \right) \tanh \vartheta \right. \\ & + 2 \vartheta (1 - \tanh \vartheta) - \vartheta^2 \tanh \vartheta \\ & \left. - \tanh \vartheta \log (\cosh \vartheta) \right\} \\ & + \frac{3}{2} \tanh \vartheta \operatorname{sech}^4 \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

式(47)~(50)における x はソリトンの波高変化を支配し、位相 θ はソリトン波形の変形に深く関係する。これらは式(44)および(45)から得られる次式により定められる。

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{2}{3} \epsilon_1 x - \frac{8}{15} (\epsilon_2 + 2 \epsilon_3) x^3 \quad (51)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 4 x^2 + \frac{\epsilon_1}{3 x} + \frac{4}{15} (2 \epsilon_2 - \epsilon_3) x \quad (52)$$

ソリトン波形は

$$\eta = 12 x^2 h^2 \{ \operatorname{sech}^2 \vartheta + \omega(\vartheta, \tau) \} \quad (53)$$

で与えられ、後述するように tail の波高に及ぼす影響は無視できるので、波高は次式で近似される。

$$H \approx 12 x^2 h^2 (1 + \omega(0, \tau)) \quad (54)$$

また、ソリトンの主峯における ω は、式(50)より

$$\omega(0, \tau) = \frac{\epsilon q}{2} \quad (55)$$

となる。初期波高は、 $\tau = 0$ で $x = x(0)$ とすると、

$$H_0 = 12 x^2(0) \quad (56)$$

であるから、ソリトンの波高増幅率は次式で与えられる。

$$\frac{H}{H_0} = h^2 \left\{ \frac{x}{x(0)} \right\}^2 \left(1 + \frac{\epsilon q}{2} \right) \quad (57)$$

以上の漸近解の適用範囲は次式で与えられる。

$$\tau_s \ll \tau \sim \tau_p \quad (58)$$

ここに、 $\tau_s = (2 x(0))^{-3}$ はソリトン時間と呼ばれ、ソリトンがその幅に相当する距離を通過するに要する時間スケールを表わす。また、 $\tau_p = |\epsilon q x^3(0)|^{-1}$ は摂動によりソリトンに plateau, tail などの重要な変形が生じるまでの時間スケールである。ただし、式(57)において τ は空間座標であるから、 τ_s は時間波形として与えられる初期波のソリトン幅に相当する時間内の伝播距離を表わすが、ここでは同じ名称を用いる。 τ_p についても同様である。

いま、一定勾配の m の海底地形を考えると、

$$h = 1 - mx$$

$$r = \frac{3}{m} (1 - h^{3/2}) \quad (59)$$

$$\epsilon_1 = \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{9} \delta_1 \sigma_r \right) h^{-3/2}$$

となるので、 x は次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{3}{2} h^{-1} x - \frac{2 \sigma_r}{m} x^2 + \frac{12}{5 m} \left(\frac{4}{R} h^{-3/2} - \sigma_p h^{-1/2} + \frac{4}{3} s \right) x^3 \quad (60)$$

上式は風の効果が無い場合を除き解析解は得られないので数値積分に依らざるをえない。

ソリトン時間に相当する水深 h_s は

$$h_s = (1 - \sqrt{3} m H_0^{-3/2})^{2/3} \quad (61)$$

で与えられるので、漸近解の適用範囲は次式となる。

$$h \ll h_s \quad (62)$$

4. 一様勾配海岸上でのソリトン伝播の数値シミュレーション

まず、水深変化のみを考えた場合のソリトン変形の基本特性および差分計算結果の妥当性について検討する。図-2は海底勾配 $m=1/50$ の海岸での時間波形の空間変化を初期波形から碎波点まで示している。なお、碎波点は主峯の移動速度と水平粒子速度を用いて Rankine-Stokes の碎波条件より定めた。小振幅の tail が最初に発生し、図中に矢印で示されたソリトン時間付近から plateau の形成が始まり、碎波点近くでは plateau が明瞭に現われている。また、tail はその位相速度が小さく、伝播とともに主峯から遅れ、ソリトンの波高算定には tail の影響は無視できることが判る。

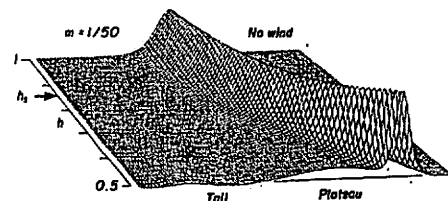


図-2 無風時のソリトン波形 ($H_0=0.3$)

無風時の場合には、逆散乱法による式(60)の解は、

$$x/x(0) = h^{-2/3} G(h)^{-1/3}$$

$$G(h) = 1 + \frac{96 x^2(0)}{5 m} \times \left\{ \frac{1}{R} f\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{3} s f(2) \right\} \quad (63)$$

$$f(a) = \frac{h^{-a} - 1}{h} \quad (64)$$

となり、次式が得られる。

$$H/H_0 = \left(1 + \frac{\epsilon q}{2} \right) / h \quad (64)$$

$$\epsilon q = -4 \sqrt{3} m H_0^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} h^3 \quad (65)$$

$H_0=0.3$, $m=1/20$ および $1/50$ のときの波高増幅率はそれぞれ図-3のようになる。両図とも波高は初期には h^{-1} に、途中から $h^{-1/4}$ に比例して増大している。 $m=1/50$ に対する結果はCamfield⁹⁾らの実験式とほぼ一致しており、差分計算結果は妥当であると考えられる。逆散乱法による式(64)で $G=1$ の場合が細線で $h < h_s$ の範囲について併記されているが、波高増幅率の増加割合が若干大きくなっている。

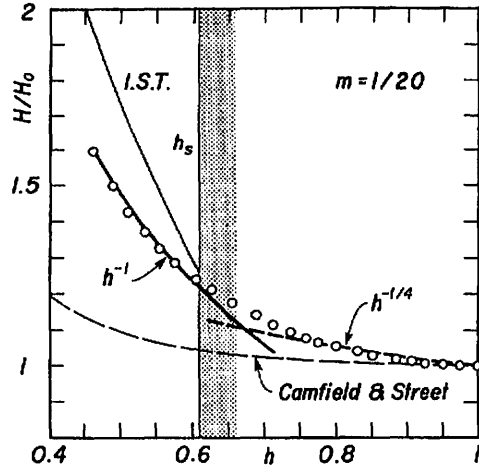
図-4はplateau高の変化

$$\frac{H_p}{H_0} = -\frac{\epsilon q}{2 h} \quad (66)$$

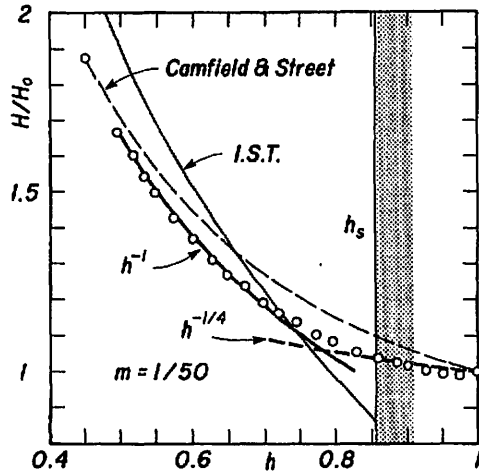
を示すもので、描点は差分計算においてplateauが明瞭に形成されている地点での値である。逆散乱法による上式は、 ϵq を沖側で過大に、岸側で過小に評価する傾向をもっており、その結果、図-3(1),(2)に示されているように碎波点付近での波高増幅率は少し大きい値となる。なお、安田⁷⁾らも $m=1/50$ に対して同様の計算例を示しているが、逆散乱法による上述の結果とほぼ一致している。また、式(65)中の $m H_0^{\frac{1}{2}}$ は安田らのパラメータ λ である。

次に、図-5は $m=1/20$, $1/50$ に対して風の応力を考慮した場合の波高増幅率を示すものである。ただし、 $R=5 \times 10^7$, $s=0.02$ であり、風の応力は $\sigma_p/\sigma_r \approx (1+m_0)(C_p/C_r)$ となること、および通常 C_p は C_r の10倍程度であるとされていることから $\sigma_p/\sigma_r=5, 10, 15$ とし、 $\sigma_r/s=0.02 \sim 0.5$ の範囲とした。また、初期波高は $H_0=0.3$ である。

図-3と同様に逆散乱法による式(66)を数値積分した結果がソリトン時間以後について細い実線で示されている。○印は碎波点である。全般的傾向として、風の応力の増加とともにソリトンの波高は無風時の



(1) $m=1/20$



(2) $m=1/50$

図-3 無風時のソリトン波高増幅率($H_0=0.3$)

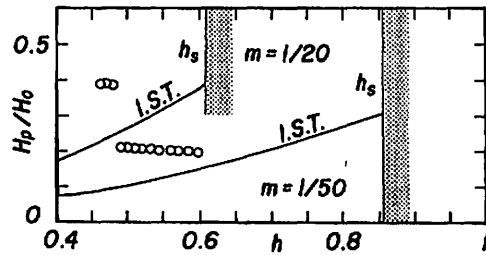
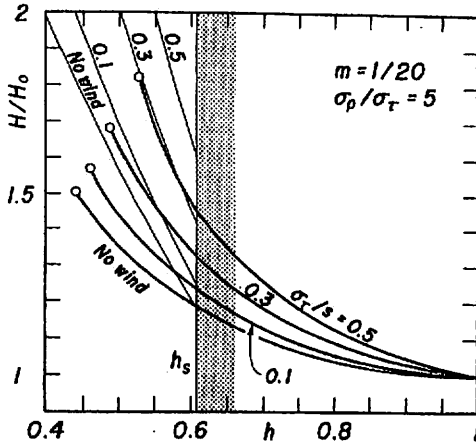
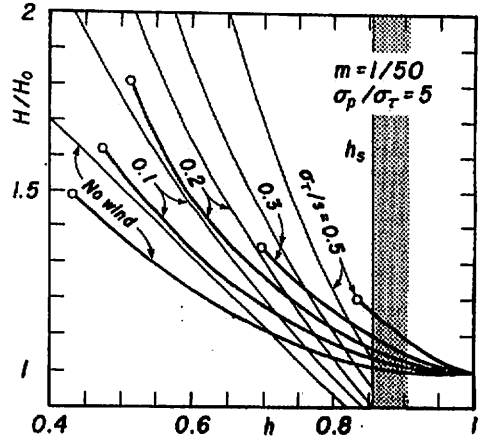


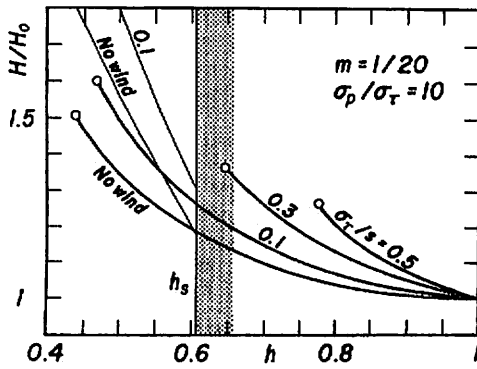
図-4 無風時のplateau高の変化($H_0=0.3$)



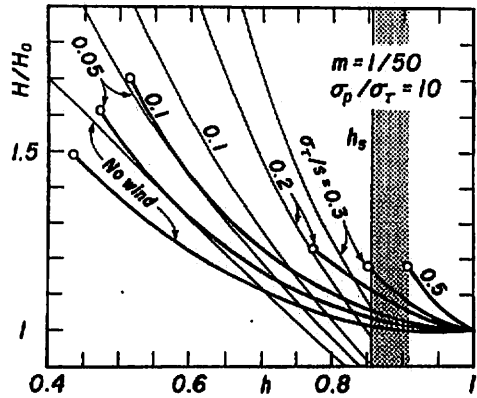
(1) $\sigma_p/\sigma_\tau = 5$



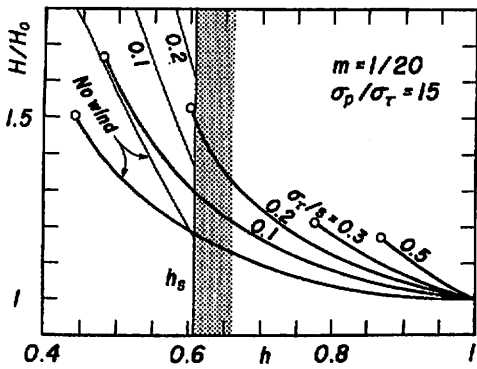
(1) $\sigma_p/\sigma_\tau = 5$



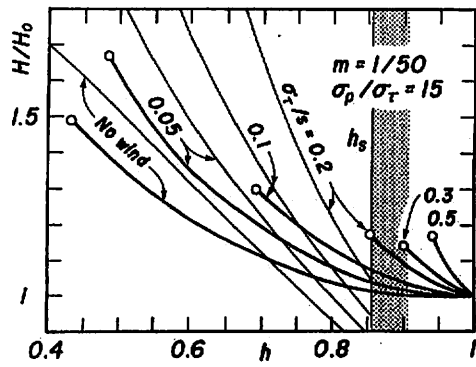
(2) $\sigma_p/\sigma_\tau = 10$



(2) $\sigma_p/\sigma_\tau = 10$



(3) $\sigma_p/\sigma_\tau = 15$



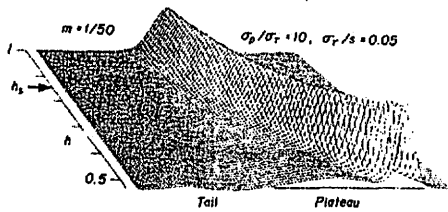
(3) $\sigma_p/\sigma_\tau = 15$

図-5.1 ソリトンの波高増幅率($m=1/20, H_0=0.3$)

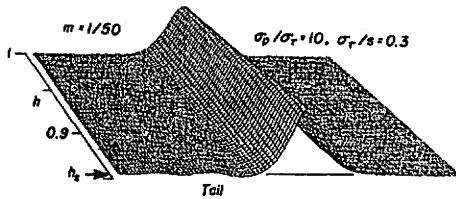
図-5.2 ソリトンの波高増幅率($m=1/50, H_0=0.3$)

波高よりかなり増大し、その増加割合は緩勾配斜面ほど大きいことが判る。また、緩勾配斜面ほど風の応力の効果が顕著に現われ、ソリトンが碎波しやすいことを示している。式(8)の σ_p 、 σ_τ の係数を比べれば判るように、水深が浅くなると圧力よりも接線応力が卓越する。さらに、式(7)、(8)から圧力は主峯近くではサクションとして作用している。したがって、碎波には表層流モデル¹⁾と同様に接線応力の寄与が大きいことがわかる。

これらのソリトン波形の代表例を図-6に示す。



(1) plateauが発達する場合の波形($H_0=0.3$)



(2) ソリトン時間以前に碎波する場合の波形($H_0=0.3$)

図-6 ソリトンの波形変化

図-6(1)は、無風時のソリトン波形図-2と同様な特性をもっている。しかし、図-6(2)のようにソリトン時間に達する前に碎波する場合には、tailの発生は見られるがplateauは形成されるまで発達しないことがわかる。

図-7および図-8は碎波点での碎波水深比 H_b/h_0 および碎波水深 h_b に及ぼす風の影響を示すものである。これらの図は、風の応力効果が浅水効果より大きいときに碎波波高・水深が変化することと示唆しており、図-5と同様に、緩勾配ほど風の影響が大きい。

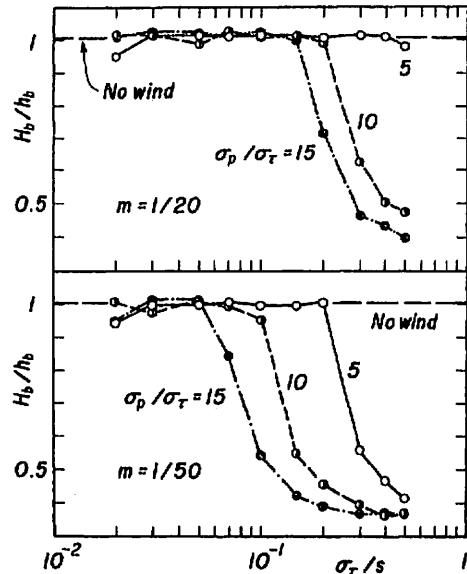


図-7 碎波点での波高水深比の変化($H_0=0.3$)

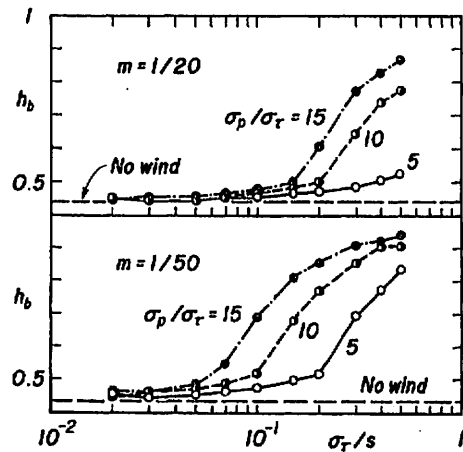


図-8 碎波水深の変化($H_0=0.3$)

5. 結 言

ここでは、ソリトンを対象としてその波形変化、波高増幅率、碎波時の波高・水深に及ぼす風の影響を差分法による数値計算結果に基づき検討した。その結果は以下のように要約される。

1) ソリトンの波形には、水深変化および風の応力の作用により、plateau と tail が発生するが、plateau の発生時期はソリトン時間以後である。

2) plateau の高さはソリトンの波高増幅率と深く関係し、緩勾配斜面では plateau の規模は小さく、波高増幅率は大きくなる。

3) 風の応力の作用により波高の増大に伴って、碎波点が無風時の位置から移動するので、海岸構造物に対する設計波の決定に際しては風の影響について十分考慮すべきであろう。

Appendix 1. 風によるせん断応力の分布

水面の変位とともに水面近くの空気流の流線がこれに平行に変位すると仮定し、一様な空気流速 U_a が水面変位のために、 x 方向および z 方向に流速変化量 (u_a, w_a) を生じたとする。水面波形は、 a を定数として、

$$\eta = \eta(a(x - ct)) \quad (A. 1)$$

とおくと、ポテンシャル流では、 $z \approx 0$ において

$$w_a \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_a \frac{\partial \eta}{\partial x} = a(U_a - c) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (A. 2)$$

ただし、 $\xi = a(x - ct)$ であるから、変化量 w_a は z 方向について 0 から ∞ を考慮すると、

$$w_a = a(U_a - c)e^{-\alpha z} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (A. 3)$$

となる。したがって、 U_a は連続の方程式を積分して、

$$U_a = - \int \frac{\partial w_a}{\partial z} dx = a^2(U_a - c)e^{-\alpha z} \int \frac{\partial \eta}{\partial \xi} dx = a(U_a - c)e^{-\alpha z} \eta \quad (A. 4)$$

で与えられ、水面近くの空気流の速度 W_a は次式となる。

$$W_a^2 = (U_a + u_a - c)^2 + w_a^2 = (U_a - c)^2(1 + 2\alpha\eta) + O(\eta^2) \quad (A. 5)$$

したがって、接線応力 τ_x は次式で近似される。

$$\tau_x = C_d(\rho_a/\rho) W_a^2 = C_d(\rho_a/\rho)(U_a - c)^2(1 + 2\alpha\eta) \quad (A. 6)$$

すなわち、分布係数は $\delta_1 = 2\alpha$ となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_d(\rho_a/\rho)(U_a - c)^2, \\ \sigma_p &= C_d(\rho_a/\rho)(U_a - c)^2 \end{aligned} \right\} (A. 7)$$

とおくと、 $\sigma_p/\sigma_r = C_p/C_d$ である。式 (A. 6) における α は波数に相当するもので、せん断応力の分布定数は波形勾配に比例することになる。ソリトンにおいて初期波形 η_i は、式 (8) から、

$$a = \sqrt{3H_0}/2 \quad (A. 8)$$

であるから、分布係数は次式で与えられる。

$$\delta_1 = \sqrt{3H_0} \quad (A. 9)$$

Appendix 2. 差分スキームとその安定性

式 (7) の差分法による数値計算において、左辺 KdV 項に対しては Fromm の形式である Zubusky の差分スキームを用いると、各項について次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_r &= \frac{1}{8\Delta\tau} \left\{ \left(\zeta_i^{n+2} + 3\zeta_i^{n+1} + 3\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\zeta_i^{n+2} + 3\zeta_i^{n+1} + 3\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1} \right) \right\} \\ \zeta_{\zeta\sigma} &= \frac{1}{8\Delta\sigma} \left(\zeta_i^{n+2} + \zeta_i^n \right) \\ &\quad \times \left(\zeta_i^{n+2} + \zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n - \zeta_i^{n-1} \right) \\ \zeta_{\sigma\sigma\sigma} &= \frac{1}{2(\Delta\sigma)^3} \left\{ \left(\zeta_i^{n+2} - 3\zeta_i^{n+1} + 3\zeta_i^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta_i^{n-1} \right) + \left(\zeta_i^{n+2} - 3\zeta_i^{n+1} + 3\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (A. 10)$$

また、右辺各項は陰的差分スキームとし、第 2 項の Burgers 項には中心差分を用いると、各項について次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\sigma\sigma} &= \frac{1}{(\Delta\sigma)^2} \left(\zeta_i^{n-1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n+1} \right) \\ \zeta + \zeta|\zeta| &= \zeta_i^{n+1} + \zeta_i^{n-1} \zeta_i^{n+1} \end{aligned} \right\} (A. 11)$$

式 (A. 10), (A. 11) を式 (7) に代入して整理すると、次のような差分方程式となる。

$$\begin{aligned} &(2 + \lambda_1)\zeta_i^{n+2} - \lambda_3\zeta_i^{n+1} \\ &+ (6 - \lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5)\zeta_i^{n+1} - \lambda_3\zeta_i^{n+1} \\ &= (6 - \lambda_1)\zeta_i^{n+1} + (2 + \lambda_1)\zeta_i^{n-1} \end{aligned} \quad (A. 12)$$

ここで、 $\lambda_i (i = 1 \sim 5)$ は、式 (11) に表示してある。

次に差分スキームの安定性について述べる。式 (A. 12)において、 λ_1 および λ_2 を一定として得られる線形化方程式に対して

$$\xi_j^n = U(\delta, n\Delta\tau) \quad (\text{A. 13})$$

とおくと、式(A. 12)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & U\{\delta, (n+1)\Delta\tau\} e^{i(\lambda_1 + \frac{1}{2})n\Delta\sigma} \\ & \times \left\{ (2 + \lambda_1) e^{i\Delta\sigma} \right. \\ & + (6 - \lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5) e^{-\frac{1}{2}i\Delta\sigma} \\ & \left. - \lambda_2 e^{i\Delta\sigma} - \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}i\Delta\sigma} \right\} \\ & = U(\delta, n\Delta\tau) e^{i(\lambda_1 + \frac{1}{2})n\Delta\sigma} \\ & \times \left\{ (6 - \lambda_1) e^{i\Delta\sigma} + (2 + \lambda_1) e^{-\frac{1}{2}i\Delta\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

上式をさらに変形すると、増幅係数 $\lambda(\delta)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda(\delta) &= \frac{U\{\delta, (n+1)\Delta\tau\}}{U(\delta, n\Delta\tau)} \\ &= \frac{\left[\begin{array}{l} 2\cos^2 \frac{\delta}{2} - \lambda_1 \cos \frac{\delta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ -i \left(\lambda_1 \sin \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{l} 2\cos^2 \frac{\delta}{2} - (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \frac{\delta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ -\frac{1}{4} \lambda_4 \cos \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \lambda_5 \cos \frac{\delta}{2} \\ +i \left\{ \lambda_1 \sin \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - (2 + \lambda_3) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\} \\ + \frac{1}{4} \lambda_4 \sin \frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} \lambda_5 \sin \frac{\delta}{2} \end{array} \right]} \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

ここで、 $S = \sin(\alpha/2)$ 、 $C = \cos(\alpha/2)$ 、 $\lambda_{45} = (\lambda_4 + \lambda_5)/4$ とおくと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\alpha)} &= \frac{2C^3 - \lambda_1 CS^2 + i(\lambda_1 SC^2 - 2S^3)}{2C^3 - \lambda_1 CS^2 - i(\lambda_1 SC^2 - 2S^3)} \\ &+ \frac{(\lambda_3 S^2 - \lambda_{45})(C - iS)}{2C^3 - \lambda_1 CS^2 - i(\lambda_1 SC^2 - 2S^3)} \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

また、一般的に複素数に関して

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{A. 17})$$

が成立するので、式(A. 16)から次式が得られる。

$$1 - |f| \leq \left| \frac{1}{\lambda(\delta)} \right| \leq 1 + |f|$$

$$\begin{aligned} |f| &= \left| \frac{(\lambda_3 S^2 - \lambda_{45})(C - iS)}{2C^3 - \lambda_1 CS^2 - i(\lambda_1 SC^2 - 2S^3)} \right| \\ &= |\lambda_3 S^2 - \lambda_{45}| / \left\{ (6 - \lambda_1)(2 + \lambda_1) \right. \\ &\quad \left. \times (S^2 - 1/2)^2 + (2 - \lambda_1)^2/4 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

任意の δ に対して $|f|$ は次の範囲に存在する。

$$\begin{aligned} & \lambda_3 \lambda_{45} > 0 \text{ のとき} \\ & 0 \leq |f| \leq |\lambda_3 - 2\lambda_{45}| / (2 - \lambda_1) + O(\lambda_3^2) \\ & \lambda_3 \lambda_{45} < 0 \text{ のとき} \\ & |\lambda_{45}|/2 \leq |f| \leq |\lambda_3 - 2\lambda_{45}| / (2 - \lambda_1) \\ & \quad + O(\lambda_3^2) \end{aligned} \quad (\text{A. 19})$$

したがって、式(A. 18)、(A. 19)から次式が得られる。

$$\begin{aligned} |\lambda(\delta)| &\leq \frac{1}{1 - |f|} \leq \frac{1}{1 - |\lambda_{45}|/2} \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} |\lambda_{45}| \end{aligned} \quad (\text{A. 20})$$

$\lambda_{45} = O(\Delta\tau)$ であるから式(A. 20)は式(2)に一致する。

参考文献

- 1) 筒井茂明・土屋義人：表層流に起因する砕波，第31回海岸工学講演会論文集，pp.15~19, 1984.
- 2) Longuet-Higgins, M.S.: Action of variable stress at the surface of water waves, Phys. Fluid, Vol.12, pp.737~740, 1969.
- 3) Zabusky, N.J.: Solitons and bounded states of time-dependent Schrödinger equation, Physical Review, Vol.168, pp.124~128, 1968.
- 4) 矢嶋信男・野木達夫：発展方程式の数値計算，応用数学叢書，岩波書店，232 pp., 1977.
- 5) Karpman, V. I. and E. M. Maslov: Structure of tails produced under the action of perturbations on solitons, Sov. Phys. JETP48(2), pp.252~259, 1978.
- 6) Camfield, F.E. and R.L. Street: Shoaling of solitary waves on small slopes, Proc. ASCE, WW1, pp. 1~21, 1969.
- 7) 安田孝志・三島豊秋・土屋義人：傾斜海浜上におけるソリトンとその変形，第32回海岸工学講演会論文集，pp.109~113, 1985.