

琉球大学学術リポジトリ

リーフ海岸における波浪推算モデル

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Wave prediction, Wave spectra, Irregular waves, Finite elements, Open boundary problems 作成者: 筒井, 茂明, Tsutsui, Shigeaki メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/2211

リーフ海岸における波浪推算モデル†

筒井茂明*

A Wave Prediction Model in Reef Coasts

Sigeaki TSUTSUI

Abstracts

A wave prediction model is presented based on the finite element method, solving the one-dimensional open boundary problems. Usefulness of the model has firstly been investigated in comparison with the theoretical wave height distributions for four bathymetries and experimental results for waves on a step-type reef, where the boundary conditions can clearly be defined. The result is that wave heights can be predicted with actual accuracy, even when bathymetry changes discontinuously; an example is the dredged sea bed.

Secondly, it has experimentally been verified that evaluation of irregular wave spectra based on the theory of linear systems is available. However, the frequency response (FR) of the bathymetry to waves is necessary to be known, and then the present model is useful in estimating FR.

It is clear that the same treatment is possible in the two-dimensional space for which the model similar with the present one was offered previously (Tsutsui, 1989). Therefore, we are now able to handle the regular and irregular waves in Okinawan reef coasts, in terms of the one- and two-dimensional wave prediction models.

Key words : Wave prediction, Wave spectra, Irregular waves, Finite elements, Open boundary problems.

1. 緒言

最近、沖縄県のリーフ海岸において海岸構造物を設計するとき、リーフ海岸特有の波動現象があり、そのため従前より蓄積されてきた設計資料によっても十分な設計を行うことが困難であるという話をしばしば耳にする。しかし、確かにリーフ海岸特有の水理現象もあろうが、このことが上述の困難さの主原因とは考え

られない。

例えば現地波浪観測資料により沖での計画波高が定められたとき、構造物に対する波圧を求めようとすると、構造物設置地点での波の諸量が必要である。しかし、リーフ海岸ではその先端部で水深が急変するため、沖波の諸量からリーフ内の波を算定するには従来の波の浅水変形理論では不十分な面が多い。また、波の打

† 受付 : 1991年5月13日

* 土木工学科, Dept. of Civil Engineering

ち上げ高、越波量等の基礎データを得ようとするとき、これらを算定するための公式、図表等は（相当）深海波の諸量を用いて表示されている場合がほとんどであること、すなわち、これらの大部分は一定水深あるいは一様勾配海岸での実験・観測データに基づき作成され、深海波に換算するときも同じ浅水変形理論が用いられていることに留意する必要がある。端的な例を挙げると、この浅水変形理論によると沖波波高5mの波が設計地点で波高7mの波になると算定されたとしても、リーフ海岸では必ずしも同じ結果が得られるとは限らないのである。したがって、これらを考慮しないと実際よりも危険な、あるいは不経済過ぎる設計になる場合も十分考えられる。

要するに、リーフ海岸における沖波とリーフ内の波との関係が明確でないことに最大の問題点があると判断される。この点が明確になればこれまでの設計資料の大部分がリーフ海岸での海岸構造物設計に対しても有用となるはずである。

著者は、このためリーフ海岸に対しても適用可能な沿岸開領域での波高推算法の開発に努めてきた。本研究はその延長上に位置するものである。

沿岸開領域での波高は、これまでに緩勾配方程式（Berkhoff, 1972）に代表される2次元方程式に基づき実用的な精度で推算が可能となっている（Bettsら, 1977; Radder, 1979; 磯部, 1985, 平口ら, 1986; Kirby, 1988）。著者らも、従前の有限要素モデルにおける無限遠点を含む開領域の取り扱い法に起因する問題点を解決し、リーフ海岸に見られるような水深急変部を含む沿岸開領域での波高分布推算法を提案し（Tsutsui, 1989; 筒井ら, 1990）、さらに、現地波浪にも適用して良好な結果が得られている（Lewisら, 1989）。これらは海岸での波の屈折・回折を考慮した2次元解析であるが、海岸地形の変化を1次元と近似して考えてよい場合や1次元解析することにより基本的な波浪特性について十分検証する必要がある場合も少なくない。また、この1次元解析は数値波動実験とも密接な関係がある。数値波動実験において非線形問題を取り扱う場合には主として1次元処理がなされているが、その際には波の進行方向前後端の開領域での境界条件の取り扱いが常に問題となる。その解決のために境界でのダンパー（Zienkiewicz & Newman, 1969）やスポンジ層（Larsen & Dancy, 1983）などの処理法が提案され成果を挙げている。

しかし、緩勾配方程式に基づく1次元有限要素モデ

ルの構築の際には次の重要な問題が生じる。1次元問題と2次元問題との本質的な相違点は、2次元問題では振幅が攪乱源からの距離の $1/2$ 乗に比例して減衰する散乱波が存在するが、1次元問題にはこのような特性をもった波は存在しないことである。このことは、有限要素モデルにおいて開境界条件処理のために従来用いられている方法の中、Sommerfeldの放射条件に基づく無限要素（Zienkiewiczら, 1985）やダンパー等の1次元問題への適用は好ましくないことを意味している。

したがって、本研究では、まず、この問題を解決した有限要素法による1次元波高分布推算モデルを提案し、境界条件処理の妥当性を境界条件の明確な海岸モデルに対する理論および水理実験により検証する。次に、本有限要素モデルを用いて、海岸あるいは港湾の不規則波浪に対する応答スペクトルの推算をリーフ海岸モデルに行うとともにその結果を水理実験により検証し、本モデルの適用性を示す。

2. 有限要素モデルと開境界条件処理

ここで述べる1次元有限要素モデルにおける対象海域は、図-1に示すように、

- (1) 片側に反射壁があり他方が開領域の場合、
- (2) 両側が開領域の場合、

の2種類である。海域を仮想境界C、陸側境界Bにより2領域 Ω 、 $\bar{\Omega}$ に区分し、外部領域 $\bar{\Omega}$ での水深は一定

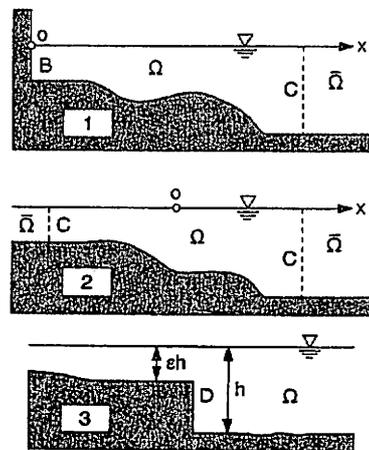


図-1有限要素モデル海域の定義および座標系

と仮定する。領域 Ω が水深変化領域であり、同図-(3)に示されているような水深が急変する不連続部境界 D が存在する場合も含まれる。また、種々のモデル構成法のうち、解析対象海域 Ω での有限要素モデルと対象外海域 $\bar{\Omega}$ での理論解とを仮想境界 C で接続する方法(Chen & Mei, 1975; Mei, 1983)を用いる。

支配方程式は領域 Ω での1次元緩勾配方程式

$$D(cc_g D \eta) + (c_g / c) \sigma^2 \eta = 0 \quad (1)$$

であり、以下では時間項が $\exp(i \sigma t)$ で表される波動を考える。ただし、 $D \equiv d/dx$ 、 x : 静水面上に座標原点を置く水平座標、 t : 時間、 η : 水面変位、 c : 波速、 c_g : 群速度、 σ : 角周波数、 i : 虚数単位である。

また、境界条件は次の3条件(筒井ら, 1990)である。

(a) 仮想境界 C での水位および圧力の連続条件 :

$$\eta = \bar{\eta}, \quad \partial \eta / \partial n = \partial \bar{\eta} / \partial n \quad (2)$$

(b) 陸側境界 B での波の反射条件 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\sigma}{c} \left(-i\alpha + \frac{\tanh kh}{1 + \cosh kh} \frac{\partial h}{\partial n} \right) \eta \quad (3)$$

(c) 水深不連続部境界 D での水位およびエネルギーフラックスの連続条件 :

$$\eta, \quad cc_g \frac{\partial \eta}{\partial n} : D \text{ 上で連続} \quad (4)$$

ただし、 $\eta = \eta^I + \eta^S$ (領域 Ω)、 $\bar{\eta} = \eta^I + \bar{\eta}^S$ (領域 $\bar{\Omega}$)であり、上添字 I, S はそれぞれ入射波と攪乱波、 n は境界での外向き法線、 h は水深をあらわしている。また、 α は無次元パラメータで、完全反射のときには0、完全消波のときには1であって、 α と反射率 r との間には $\alpha = (1-r)/(1+r)$ なる関係がある。

支配方程式(1)およびこれらの境界条件を満たす汎関数は次式で与えられる。

$$J = J_1 + J_2 + J_3 \quad (5)$$

$$J_1 = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ cc_g (D \eta)^2 - \frac{c_g}{c} \sigma^2 \eta^2 \right\} dx \quad (6.1)$$

$$J_2 = cc_g \left\{ \left(\frac{1}{2} \bar{\eta}^S - \eta^S \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} - \frac{1}{2} \bar{\eta}^S \frac{\partial \bar{\eta}^I}{\partial n} \right\}, \text{ 境界} C \text{ 上} \quad (6.2)$$

$$J_3 = -\frac{1}{2} \sigma c_g \left\{ -i\alpha + \frac{\tanh kh}{1 + \cosh kh} \frac{\partial h}{\partial n} \right\} \eta^2, \text{ 境界} B \text{ 上} \quad (6.3)$$

さらに、式(5)の第1変分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_{\Omega} \left\{ D(cc_g D \eta) + (c_g / c) \sigma^2 \eta \right\} \delta \eta dx \\ & + \left[cc_g \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} \right) \delta \eta + (\bar{\eta}^S - \eta^S) \frac{\partial \delta \bar{\eta}}{\partial n} \right\} \right]_C \\ & + \left[cc_g \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial n} - \frac{\sigma}{c} \left(-i\alpha + \frac{\tanh kh}{1 + \cosh kh} \frac{\partial h}{\partial n} \right) \eta \right\} \delta \eta \right]_B \\ & + \left[cc_g \frac{\partial \eta}{\partial n} \delta \eta \right]_D + I_c \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、

$$I_c = \frac{1}{2} cc_g \left[\frac{\partial \bar{\eta}^S}{\partial n} \delta \bar{\eta}^S - \bar{\eta}^S \frac{\partial \delta \bar{\eta}^S}{\partial n} \right]_C \quad (8)$$

変分 $\delta J = 0$ なる関係より、式(7)の右辺第1項から支配方程式(1)、第2~4項からそれぞれ前述の3境界条件が得られる。すなわち、汎関数 J_2 が開境界 C での境界条件(a)を満たすための重要な役割を果たしている。波の反射条件(b)は J_3 により満たされ、境界条件(c)は J_1 により自然境界条件として満たされている。したがって、水深変化領域の両側が開領域の場合には J_3 は不要であり、水深変化領域の片側が反射壁、他方が開領域の場合には、 J_2 はその開境界にのみ適用される。ただし、最終項、式(8)、は付加的な項であって、ここに1で述べた問題が現れる。

2次元問題においては $\bar{\eta}^S$ は散乱波を表すからその特性を有する波動解を用いれば、 I_c は無限遠点において消失し、なんら影響を与えない。しかし、1次元問題の一定水深海域では基礎方程式(1)は

$$D^2 \eta + k^2 \eta = 0, \quad k = \sigma / c \quad (9)$$

となる。その基本解は $\exp(\pm ikx)$ であって、散乱波に類する波動解が式(9)に含まれていない(厳密には、指数関数的な減衰波が存在すべきであるがこの波もまた含まれていない)ことが問題となるが、一定水深海域でのこの方程式の基本解を用いることにより解決される。いま、波高1の入射波を $\eta^I = \exp(ik+x)$ とすると、一定水深海域での波は次式で表される。

$$\bar{\eta} = \begin{cases} \eta^I + \mu^+ \exp(-ik^+x), & (x > 0) \\ \mu^- \exp(ik^-x), & (x < 0) \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 k^\pm , μ^\pm はそれぞれ $x > 0$, $x < 0$ における波数および攪乱波の振幅を示す未知常数である。これらの攪乱成分波を $\bar{\eta}^S$ として用いると $l_c = 0$ となり、結局、1次元問題の汎関数は式(5)、(6)で与えられることが判る。

以上の結果に基づく汎関数の停留条件より有限要素モデルが得られる。ここでは、線形要素を用いた場合

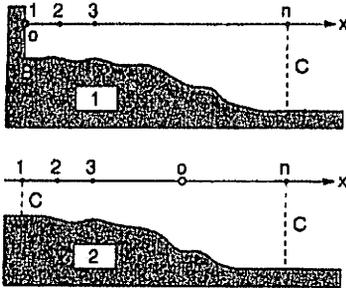


図-2 有限要素モデルにおける節点番号の設定

のマトリックス方程式を示すと以下ようになる。

(1) 水深変化領域の片側が反射壁、他方が開領域の場合

図-2(1)に示すように、反射壁上の節点番号を1、沖に向かって順次2, 3, ...とし、沖側($x=R^+$)の仮想境界Cでの節点番号を n とすると次式が得られる。

$$[K] - [M][\eta] = 2[Q] \quad (11.1)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \sigma c_g \left(-i\alpha + \frac{\tanh kh}{1 + \cosh kh} \frac{\partial h}{\partial n} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -ik^+ c c_g \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

$$[Q]^T = \{0, \dots, ik^+ c c_g \exp(ik^+ R^+)\} \quad (11.3)$$

(2) 水深変化領域の両側が開領域の場合

図-2(2)に示すように、陸側($x < 0$)での仮想境界Cでの節点番号を1、沖に向かって順次2, 3, ...とし、沖側($x=R^+$)の仮想境界Cでの節点番号を n とすると次式が得られる。

$$[K] - [M][\eta] = 2[Q] \quad (12.1)$$

$$[M] = - \begin{bmatrix} ik^- c c_g & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & ik^+ c c_g \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

$$[Q]^T = \{0, \dots, ik^+ c c_g \exp(ik^+ R^+)\} \quad (12.3)$$

ただし、

$$[\eta]^T = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \quad (13)$$

であり、剛性マトリックス $[K]$ は次式で与えられる各要素の寄与分により構成される。

$$K_{ij} = \begin{cases} \frac{A_i + A_j}{2\ell} - \ell \left(\frac{B_i}{2} + \frac{B_j}{12} \right) - \frac{A_i + A_j}{2\ell} - \ell \left(\frac{B_i}{12} + \frac{B_j}{12} \right) \\ - \frac{A_i + A_j}{2\ell} - \ell \left(\frac{B_i}{12} + \frac{B_j}{12} \right) & \frac{A_i + A_j}{2\ell} - \ell \left(\frac{B_i}{12} + \frac{B_j}{4} \right) \end{cases} \quad (14.1)$$

$$A_h = (c c_g)_h, \quad B_h = (\sigma^2 c_g / c)_h, \quad (h=i, j) \quad (14.2)$$

ここに、 ℓ は要素長である。

3. 有限要素モデルの検証

まず、開境界条件の処理法とともに有限要素モデルの検証を行うが、対象とする波動は境界条件の明確な4海岸地形に対するものであり、海岸地形とそこでの微小振幅理論解は以下に示す通りである。

(a) 一定水深域での完全重複波

座標原点を反射壁上に採ると、波形は次式で与えられる。

$$\eta = 2 \cos(kx) \quad (15)$$

(b) ステップ型リーフ海岸での重複波

座標原点を反射壁上に採り、リーフ先端を $x=l$ とする。浅・深海域での水深は一定であり、そこでの波の諸量にそれぞれ添字1, 2を付けると、波形は次式で与えられる。

$$\eta = \begin{cases} A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x), & (0 < x < l) \\ \exp(ik_2 x) + C \exp(-ik_2 x), & (x > l) \end{cases} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A &= (2/D)\exp(ik_2l) \\
 B &= rA \\
 C &= (N/D)\exp(2ik_2l) \\
 N &= \lambda_2 \exp(ik_1l) + \lambda_1 r \exp(-ik_1l) \\
 D &= \lambda_1 \exp(ik_1l) + \lambda_2 r \exp(-ik_1l) \\
 \lambda_1 &= 1 + c_{g1}/c_{g2} \\
 \lambda_2 &= 1 - c_{g1}/c_{g2}
 \end{aligned} \right\} (7)$$

(c) 一様勾配海岸での進行波
 波高 H の変化は次式で与えられる。

$$\frac{H}{H_0} = \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \tanh kh \right]^{-1/2} \quad (8)$$

ただし, H_0 は深海波高である。

(d) ステップ型リーフ海岸での進行波
 座標原点をリーフ先端に採ると, 波形は上記(b)と同様に次式で与えられる。

$$\eta = \begin{cases} A\exp(ik_1x), & (x < 0) \\ \exp(ik_2x) + C\exp(-ik_1x), & (x > 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$A = 2/\lambda_1, \quad C = \lambda_2/\lambda_1 \quad (10)$$

ただし, いずれも入射波高を 1 としており, 理論解(b)および(d)に対しては, 水深不連続部において有限要素モデルと同じ境界条件(4)が用いられている。

これらの波高分布と有限要素モデルによる推算波高とを比較すると図-3~6が得られる。縦・横軸にはそれぞれ入射波高に対する波高 $K \equiv |\eta|$ と距離が採られており, 図の下段には海底地形図が示されている。○印は有限要素解, 実線は微小振幅波理論解, T は波の周期である。これらの結果はいずれの場合も仮想境界 C が任意の波の位相に設置されているにもかかわらず, 有限要素解と理論解は一致し, 本モデルの妥当性を示している。

次に, 水深不連続部での境界条件(4)について検討する。この条件は長波近似で水深不連続部の鉛直壁からの波の反射を考慮していない。したがって, この影響がどの程度であるかをステップ型リーフ海岸における進行波の通過率 K_t , 反射率 K_r について調べると図-7のようになる。ただし, 無次元パラメータ: $\beta = (2\pi/T\sqrt{g/h})^2$ である。図中の実線は有限要素解, 破線は井島(1971)によるポテンシャル接続法による解である。通過率での両者の差異は, 全領域 ($0 < \varepsilon < 1$) において約 2% 以内である。長周期波

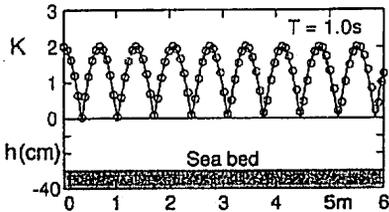


図-3 完全重複波の波高分布

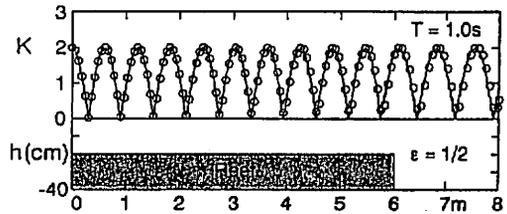


図-4 ステップ型リーフ海岸での重複波の波高分布

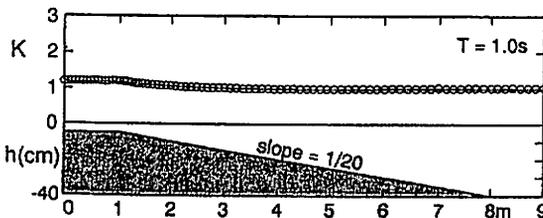


図-5 一様勾配海岸での進行波の波高分布

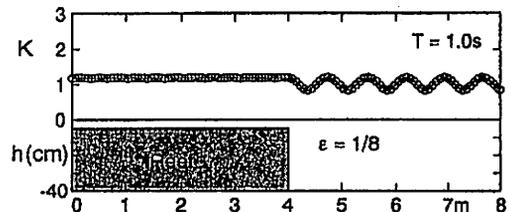


図-6 ステップ型リーフ海岸での進行波の波高分布

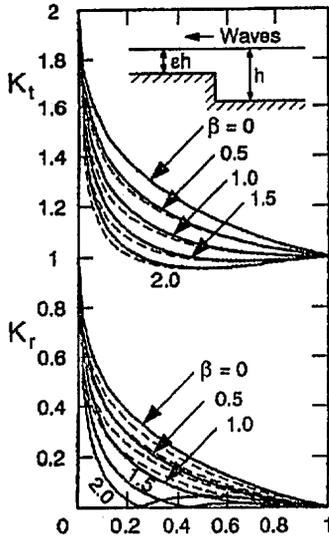


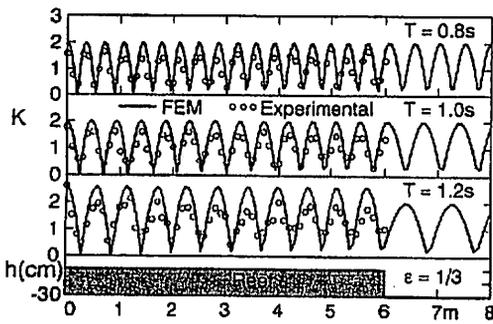
図-7 ステップ型リーフ海岸での進行波の通過率と反射率

に対する反射率について両者は一致しているが、短周期になると有限要素解は反射率をかなり過小評価することが判る。具体例として周期 10 sec の波を考えると、水深 50 m で $\beta = 2.01$ ；水深 25 m で $\beta = 1.01$ となる。 $\beta < 1$ では、有限要素解が反射率を理論値よりやや過小評価するが、両者は定性的に一致し、この範囲になる通常の沿岸域ではおおむね妥当な反射率を与えると考えられる。しかし $\beta > 1$ となる短週期波に対して反射波を問題とする場合には、このような欠陥を補うモデルを構築する必要がある。

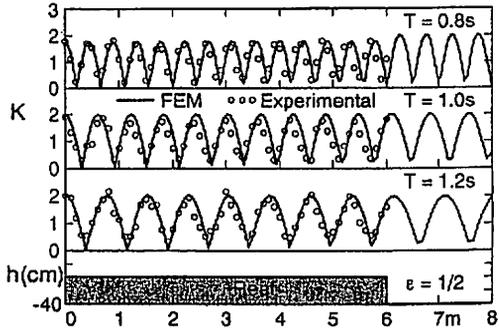
さらに、反射壁のあるステップ型リーフ海岸での重複波に対する水理実験により有限要素解を検討すると、図-8 が得られる。パラメータの範囲は $0.81 < \beta < 2.5$ である。図-7 に示したように有限要素モデルは通過率を十分な精度で推算できるので、これらの結果は通過領域に対する水理実験結果と良好な一致を示している。

4. 不規則波浪スペクトルの推算

実際問題としては、規則波の波高分布のみならず、沿岸開領域での不規則波浪スペクトルを推算する必要がある。基礎方程式(1)は線形微分方程式であるから、線形システム理論を用いることができる。すなわち、

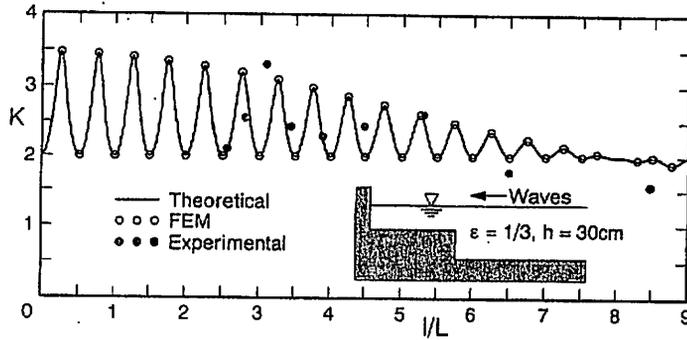


(1) $\epsilon = 1/3, h = 30\text{cm}$

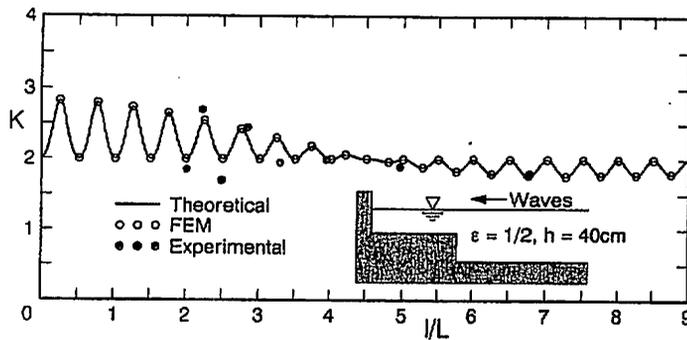


(2) $\epsilon = 1/2, h = 40\text{cm}$

図-8 ステップ型リーフ海岸での重複波の波高分布の比較



(1) $\epsilon = 1/3, h = 30\text{cm}$



(2) $\epsilon = 1/2, h = 40\text{cm}$

図-9 ステップ型リーフ海岸の周波数応答関数

特定の海岸地形に対する波浪の応答を求める際には、その周波数応答関数を $H(f)$ とすると、入・出力スペクトル $S_i(f), S_o(f)$ との関係式は次式で与えられる。

$$S_o(f) = |H(f)|^2 S_i(f) \quad (2)$$

ただし、 f は周波数である。したがって、周波数応答関数 $H(f)$ を推定すれば、式(2)により任意地点での波浪スペクトルを得ることができる。以下では、図-8に示した反射壁がある場合のステップ型リーフ海岸でのスペクトル推算を試み、水理実験によりその結果を検討する。

図-9は、2種の水深比 ϵ に対するステップ型リーフ

の反射壁前面での周波数応答関数を示している。縦軸には波高比 $K \equiv H(f)$ 、横軸には波長 L との相対的なリーフ幅 l/L が採られている。実線で示された理論応答曲線と有限要素モデルによる結果(○印：簡単のため極値のみを計算してある)とは完全に一致している。なお、●印は水理実験結果である。

不規則波浪を用いた水理実験は、水深、ピーク周波数およびピーク波高をそれぞれ2種類変化させた計8種類について実施した。その結果は図-10に示す通りである。実線および破線はそれぞれ式(2)による推算スペクトルと実験値から得た波浪スペクトルを示している。図-7に示したように、通過率がやや過大に評価されることにより高周波数領域で推算値が実測値より

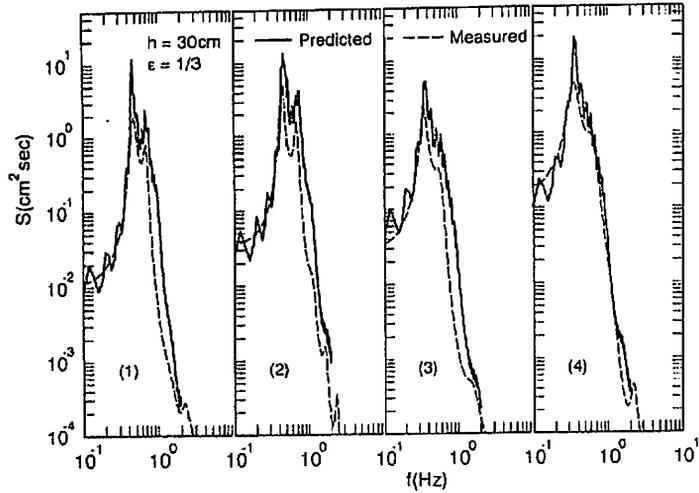
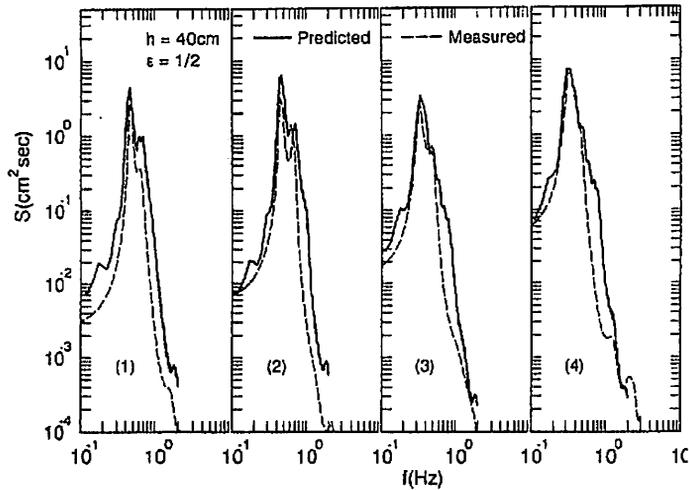
(1) $\varepsilon = 1/3$, $h = 30\text{cm}$ (2) $\varepsilon = 1/2$, $h = 40\text{cm}$

図-10 ステップ型リーフ海岸での不規則波浪スペクトル

ちよりやや過大となっているが、両者の一致度は良好である。したがって、式(4)による波浪スペクトルの推算が可能であること、すなわち、周波数応答関数の推定においてここで提案した有限要素モデルが有用であることを示している。

5. 結 言

以上、沿岸閉領域での波高推算の1つとして開境界条件の処理問題を解決した1次元有限要素モデルを提案した。本モデルは、境界条件の明確な4海岸での理論解およびステップ型リーフ海岸に対する水理実験

結果により検証された。その結果によると、本モデルにより、線形理論の範囲ではあるが一般的には十分な精度で現地波浪を推算可能であることが判明した。また、たとえステップ状の水深不連続部が存在しても、通過領域側での波高推算精度は十分である。ただし、反射波に対する推算精度をより向上させるためには、ステップ前面での波の反射を考慮した解析法が必要である。

さらに、この結果を用いてステップ型リーフ海岸における不規則波浪スペクトルの推算を試みた結果、線形システム理論に基づくスペクトル推算が可能であることが判明した。その際の周波数応答関数の推定にはここで提案したモデルが有用である。

本研究では、1次元問題を取り扱ったが、既に提案されている2次元波浪推算モデル(Tsutsui, 1989)を用いても全く同様の不規則波浪の推算を行うことができる。したがって、両者を併用することにより、沖縄県の海岸に見られるようなリーフ海岸においてもここでの波浪推算が可能である。

最後に、本実験とその解析・整理に際し多大な助力を頂いた下地英輝君(沖縄県:当時学生)に謝意を表す。

参 考 文 献

- 井島武士(1971):最近の波動理論における境界値問題の解法とその応用, 1971年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会, B-コース, pp.B-1-1-B-1-31.
- 磯部雅彦(1985):波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法, 第32回海岸工学講演会論文集, JSCE, pp.95-99.
- 筒井茂明・D.P.Lewis・長崎雅哉(1990):サンゴ礁海岸における波高分布推算法, 第37回海岸工学論文集, JSCE, pp.31-35.
- 平口博丸・丸山康樹(1986):斜め入射に対する放物型方程式の適用性の拡張, 第33回海岸工学講演会論文集, JSCE, pp.114-118.
- Berkhoff, J.C.W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc., 13th Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.
- Bettess, P and O.C.Zienkiewicz (1977): Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, Inter. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol.11, pp.1271-1290.
- Chen, H.S. and C.C.Mei (1975): Hybrid-element method for water waves, Proc. of the Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975), Vol.1, pp.63-81.
- Kirby, J.T. (1988): Parabolic wave computations in non-orthogonal coordinate systems, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol.114, ASCE, pp.673-685.
- Larsen, J. and H.Dancy (1983): Open boundaries in short-waves simulation, A new approach, Coastal Eng., Vol.7, pp.285-297.
- Lewis, D. P., S. Tsutsui, M. Morison and J. Imberger (1989): Esperance harbour ship motion study, Final Report, Vol. I, Centre for Water Research, University of Western Australia, Report No. WP-297-DL, pp.127.
- Mei, C.C. (1983): The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley and Sons Inc., New York, pp.740.
- Radder, A.C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, Jour. Fluid Mech., Vol.95, pp.159-176.
- Tsutsui, S. (1989): CATWAVES-Wave analysis system, Centre for Water Research, University of Western Australia, Report No. WP-318-ST, pp.61.
- Zienkiewicz, O.C. and R.E.Newman (1969): Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid, Proc. of the Symposium on Finite Element Techniques.
- Zienkiewicz, O.C., K.Bando, P.Bettess, C.Emson and T.C.Chiam (1985): Mapped infinite elements for exterior wave problems, Inter. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol.21, pp.1229-1251.