

# 琉球大学学術リポジトリ

## 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Shallow-water waves, Boussinesq equation, Kortewag-de Vries equation, Linear dispersion, Nonlinearity, Wave breaking, Maximum wave 作成者: 筒井, 茂明 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/2214">http://hdl.handle.net/20.500.12000/2214</a>

## 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式

筒井 茂 明\*

Model Equations Combining Full Linear Dispersion  
With Long Wave Nonlinearity

Shigeaki TSUTSUI\*

## Abstract

The Korteweg-deVries (KdV) and Boussinesq equations are representatives for shallow-water waves in dispersive systems. Both equations have soliton solutions and play significant roles in many nonlinear wave systems, such as in coastal engineering works and plasma dynamics (*e.g.*, Laitone, 1960; Zabusky and Kruskal, 1965). In coastal engineering, the cnoidal wave (Laitone, 1960), the periodic solution of the KdV equation, is employed to describe properties of shallow-water waves. The Boussinesq-type equation (Peregrine, 1966, 1967), however, is on the recent trend to be used. The main reason is in the difference between their dispersion relations. Though both dispersion relations are the same for long wave approximation, for shorter period waves the dispersion relation of the KdV equation is unbounded, whereas that of the Boussinesq-type equation takes finite values. The Boussinesq-type equation, therefore, has possibility of applying in numerical calculation not only to the original long wave field but to the shorter period wave field. However, these two equations cannot show the cusp that is the limiting form of a wave when breaks on a gentle slope. Whitham (1967) and Benjamin (1967) independently proposed, on this matter, a model equation combining long wave nonlinearity with linear dispersion, for taking account of the effects from shorter period waves. The integro-differential equation suggested by Whitham and Benjamin is effective to describe waves propagating to the specified direction, and then this fact is a limitation in application of the equation. In addition, it is difficult to handle the equation in numerical works because of singularity in the kernel. The present paper, therefore, develops the concept of Whitham to the equations of Peregrine (1967) and offers a model of equations for long waves in three-dimensional, nonlinear dispersive systems, to be used in prediction of wave deformation in the coastal zone.

**Key words.** Shallow-water waves, Boussinesq equation, Korteweg-deVries equation, Linear dispersion, Nonlinearity, Wave breaking, Maximum wave.

## 1. 緒 言

沿岸での波浪変形を記述する際には、対象とする波動現象に応じて適切な方程式を選択することが重要である。緩勾配方程式(Berkhoff, 1972; Dalrympleら, 1984; Kirby, 1986)は、水深変化領域での線形波の屈折、回折・散乱、反射、碎波や海底摩擦などによるエ

ネルギー減衰の影響を考慮でき、有限要素法や差分法に基づく数値計算により良好な結果が得られることが判っている(例えば、Chen & Mei, 1975; Bettess & Zienkiewicz, 1977; Zienkiewiczら, 1978; Radder, 1979; 渡部・丸山, 1984; Kirby, 1988; Yamashitaら, 1990; 筒井ら, 1990; 筒井, 1991; Tsutsui & Lewis, 1992; Tsutsui & Zamami, 1993)。また、この方程式は解の重ね合わせ

受理：1994年5月17日

\* 工学部環境建設工学科 Dep. of Civil Engineering and Architecture, Faculty of Engrg.

が可能な線形方程式であるから不規則波浪を推算する際にも有用である(Lewisら, 1989; 窪ら, 1991; 磯部, 1994)。

一方、浅海長波に対する代表的な方程式として Boussinesq 方程式(Boussinesq, 1871)と Korteweg-de Vries (KdV)方程式(Korteweg & de Vries, 1895)とが挙げられる。これらの方程式は、水粒子の水平加速度のみならず鉛直加速度をも考慮して得られた式で、弱非線形かつ弱分散性で両者の効果が釣り合うときの波動を表わし、特解として孤立波の解を持っている。前者は河川における洪水流や波状段波を論じる際に適用された(Lamb, 1959; 本間・安芸, 1966)。後者は Boussinesq 方程式と数理的には同種の特性をもった式で、孤立波の特解はソリトン(Zabusky & Kruskal, 1965)と呼ばれている。KdV 方程式は従来より海岸工学、プラズマ力学、格子力学など多方面にわたる非線形波動現象の中で重要な役割を果たしてきた(Laitone, 1960; Zabusky, 1967; Toda, 1967; Jeffrey & Kakutani, 1972; Fermiら, 1974; Miura, 1974, 1976)。さらに、KdV 方程式の初期値問題に対して、Gardnerら(1967)が逆散乱法と呼ばれる厳密解法を提案して以来、弱非線形・弱分散性の方程式群に対する研究が飛躍的に進められ、現在では種々のモデル方程式とそのソリトン解が求められている(例えば、Zabusky, 1967; Zabusky & Galvin, 1971; Wadati, 1972, 1973; Hirota, 1973; Whitham, 1974; Ravindran & Prasad, 1979; Bhatnagar, 1979)。

海岸工学の分野では、KdV 方程式の周期解であるクノイド波(Laitone, 1960; 土屋・安田, 1974)は沿岸での浅海長波を表わすために用いられている。しかし、複雑な海岸・海底地形に対する波の弱非線形性を考慮した数値計算においては、広範囲の周波数の波を対象としなければならないことから、最近では Boussinesq 型

の方程式が多用される傾向にある。この式は Peregrine (1966, 1967)が最初に導いたが、その後 Benjamin, Bona, & Mahony (1972)が一般論を拡張したので BBM 方程式と呼ばれることもある(Miles, 1981)。Benjaminらはその一般論の中で分散性長波方程式群における BBM 方程式の有用性を論じるとともに、初期値問題に対する一般解の存在を証明している。ただし、BBM 方程式を逆散乱法で解くことはできない。図-1には、浅海長波に対するモデル方程式の相互関係が示されている。

BBM 方程式が用いられる主たる理由は、この式と KdV 方程式の分散式の相違に起因し、その事情は以下のように説明される(Whitham, 1974)。一定水深領域を水平軸  $x$  の正方向に伝播する波を考え、時間を  $t$ 、静水面からの水面変動量を  $\eta(x, t)$ 、波の周波数を  $\sigma$ 、波数を  $k$ 、重力加速度を  $g$ 、水深を  $h$  とすると、KdV 方程式とその分散式は次式で与えられる。

$$\eta_t + \frac{3c_0}{2h} \eta \eta_x + c_0 \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma = c_0 k \left( 1 - \frac{1}{6} k^2 h^2 \right) \quad (1.2)$$

ただし、 $c_0 = \sqrt{gh}$  は線形長波の波速であり、添字  $(x, t)$  は偏微分を表わす。KdV 方程式中の分散項  $c_0 \eta_{xxx}$  を  $-\eta_{xxx}$  で置き換えると、BBM 方程式および分散式は

$$\eta_t + \frac{3c_0}{2h} \eta \eta_x + c_0 \eta_x - \frac{1}{6} h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma = c_0 k \left( 1 + \frac{1}{6} k^2 h^2 \right)^{-1} \quad (2.2)$$

となる。式(1.1)と式(2.1)の差異は左辺第4項の分散項にあり、その結果、分散特性が本質的に異なる。長波近似( $kh \ll 1$ )では分散式(1.2)-(2.2)は同じ近似である。しかし、短周期波( $kh \gg 1$ )のときには、KdV 方程式の分散式(1.2)は負値を採りかつ発散するが、BBM 方

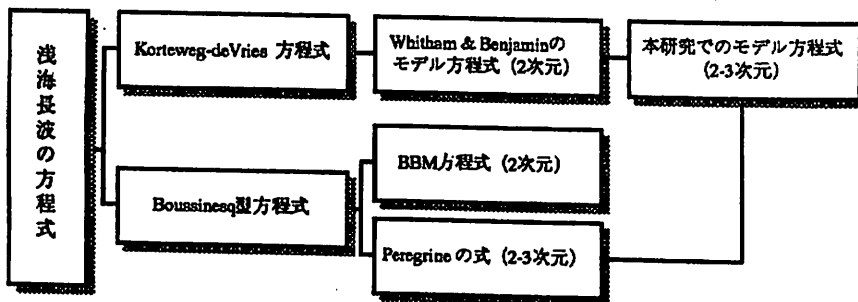


Figure 1. Systems of model equations for shallow-water waves

程式の分散式(2.2)は正の有限値を採る, このBBM方程式の特性は数値計算において望ましいものである, すなわち, BBM方程式は本来の長波領域のみならず短周期波領域に対する適用の可能性を持っている.

海底勾配が緩やかな場合の砕波波形の波頂はカスプとなるが, KdV方程式やBBM方程式はこの砕波波形を表わすことはできない. Whitham(1967, 1974)は, 砕波自体は強非線形な現象であるが, 砕波時の波頂のようにカスプをもつ限界波を表わすためには, 線形分散を満たす短周期波成分が重要な働きをしているはずであるとの考えに基づき, KdV方程式に代わるモデル方程式として, 非線形性と線形分散特性を合わせ持つ積分・微分方程式を提案した. この方程式は一定水深領域におけるカスプ形状の最大波を表わすことができる. さらに, Seliger(1968)はこの方程式により波の伝播に伴う非対称砕波をも記述できることを示した. 一方, 内部波の非線形伝播変形に対するBenjamin-Ono方程式(Benjamin, 1967; Ono, 1975)は, Whitham(1967)とは独立に, 同一のモデル方程式から導かれたもので, この式に対して逆散乱法による理論展開が可能であることが判っている(Satumaら, 1979).

Whitham(1967)およびBenjamin(1967)によるモデル方程式は非線形性と線形分散性をともに考慮しなければならない波の伝播を議論する場合に有用な式である. しかし, この方程式は断面2次元の特定の方向に進行する波のみを表わすもので, その適用範囲が制限されている. また, 式中の積分核の数学的特異性は式の取り扱いを困難にしており, この点も改良する必要がある. 一方, 浅海での水深変化による波の3次元的な変形を表わすことができるBoussinesq型のモデル方程式としてPeregrine(1967)の式があり, 前述の理由から頻繁に用いられている. したがって, 本研究では, 沿岸での波浪変形予測に供するため, 3次元波動場のPeregrine方程式にWhithamおよびBenjaminの概念を拡張し, 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式を提案する.

2. 一定水深領域での浅海長波

一定水深領域をx-軸に沿って伝播する非線形長波を表わすKdV方程式は式(1.1)で与えられるが, §1で述べたように, その分散式(1.2)は短周期波に対して発散する. Whitham(1967, 1974)は式(1.1)に代わる浅海長波の方程式として, 非線形性と線形分散関係を満たす次

の積分・微分方程式を提案した.

$$\eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \eta_x + \int_{-\infty}^{\infty} K_g(x-\xi) \eta_\xi(\xi, t) d\xi = 0 \quad (3)$$

ただし, 積分核 $K_g$ は微小振幅波の波速のFourier逆変換

$$K_g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{g}{k} \tanh kh \right)^{1/2} e^{ikx} dk \quad (4)$$

で与えられ, 添字 $\xi$ は偏微分を表わし,  $i$ は虚数単位である. KdV方程式(1.1)の左辺第(3+4)項は式(3)では積分表示されている. 以後の議論のために, 式(3)の特性について詳しく述べる.

長波近似( $kh \ll 1$ )においては, 式(3)がKdV方程式となることは以下のように示すことができる. 式(4)は

$$K_g(x) = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{h^2}{6} (ik)^2 + \dots \right\} e^{ikx} dk = c_0 \left\{ \delta(x) + (1/6) h^2 \delta_{xx}(x) + \dots \right\} \quad (5)$$

と近似される. ただし,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (6)$$

はデルタ関数である. 式(5)により式(3)の積分項は

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_0 \left\{ \delta(x-\xi) + \frac{h^2}{6} \delta_{\xi\xi}(x-\xi) + \dots \right\} \times \eta_\xi(\xi, t) d\xi = c_0 \eta_x + (1/6) c_0 h^2 \eta_{xxx} \quad (7)$$

となり, KdV方程式(1.1)の左辺第(3+4)項と一致する.

さらに, 線形波を考慮して $\eta = a e^{i(kx - \omega t)}$  ( $a$ : 振幅)を式(3)の左辺第2項を除く線形部分に代入すると,

$$\frac{\sigma}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\zeta) e^{-i k \zeta} d\zeta \quad (8)$$

が得られる. 微小振幅波に対する分散式は

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

であるから, 式(4)と式(8)はFourier変換対となっている. したがって, 式(3)は微小振幅波の分散関係と長波近似における非線形性を合わせ持っている. しかし, 積分核 $K_g$ の波数原点 $k=0$ は岐点であるので, 式(4)で

定義されるFourier逆変換は式(3)の取り扱いを困難にしている。以下ではこの点を改良する。

KdV方程式(1.1)は浅海長波の方程式

$$\eta_t + \{(h + \eta)u\}_x = 0 \quad (10.1)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x + (1/3)gh^2\eta_{xxx} = 0 \quad (10.2)$$

から導くことができる(Mei, 1983)ことに着目する。ただし、 $u$ は平均水粒子速度の $x$ -成分である。既に述べたことから判るように、線形分散と非線形特性を合わせ持つ方程式を得るには、式(10.2)の分散項を含む左辺第(3+4)項を積分項で置き換えればよい。そこで、波数原点 $k=0$ が岐点とならない積分核として、微小振幅波の波速の自乗を用いた次式を仮定する(付録1)。

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g}{k} \tanh kh \cdot e^{ikx} dk \quad (11.1)$$

$$= -\frac{g}{\pi} \log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi|x|}{4h} \right) \right\} \quad (11.2)$$

長波近似( $kh \ll 1$ )において、式(11.1)は

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} gh \left\{ 1 + \frac{h^2}{3}(ik)^2 + \dots \right\} e^{ikx} dk \\ = gh \left\{ \delta(x) + (1/3)h^2\delta_{xx}(x) + \dots \right\} \quad (12)$$

となる。そこで、積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(x - \xi) \eta_\xi(\xi, t) d\xi \quad (13)$$

を考えると、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g \left\{ \delta(x - \xi) + \frac{h^2}{3}\delta_{\xi\xi}(x - \xi) + \dots \right\} \times \\ \times \eta_\xi(\xi, t) d\xi = g\eta_x + (1/3)gh^2\eta_{xxx} \quad (14)$$

となり、式(3)と同様に、式(10.2)の左辺第(3+4)項を積分項で置き換えることができる。したがって、式(10.2)に代わる方程式は次式で与えられる。

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(x - \xi) \eta_\xi(\xi, t) d\xi = 0 \quad (15)$$

式(10.1)と(15)が線形分散関係を満たすことは、これら

の式の線形部分に対して式(3)で行ったと同様の演算を実施することにより確かめることができる(付録2)。

### 3. 一定水深領域での最大波

式(10.1)と(15)が式(3)と本質的に同等な系であることは、式(3)の母体であるKdV方程式(1.1)が浅海長波の式(10)から導かれることから類推される。ここでは、まず、式(4)および(11.1)により定義される積分核の特性について述べ、次いで、一定水深領域での最大波について式(10.1)と(15)が式(3)と同一の解を持つことを示す。なお、本章では簡単のため、全ての変数を基準長 $h$ 、時間 $\sqrt{h/g}$ 、速度 $\sqrt{gh}$ で無次元化して議論する。

式(4)と(11.1)で定義される積分核 $K_x$ および $K$ は、共に、対称性および正規化条件

$$F(x) = F(-x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1 \quad (16)$$

を満たしている(付録3)。また、積分核 $K_x$ の近似式は次式で与えられる(Whitham, 1967)。

$$K_g(x) \approx \begin{cases} (2\pi|x|)^{-1/2}, & |x| \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\pi^2}{2}|x|\right)^{-1/2} e^{-\pi|x|/2}, & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (17)$$

積分核 $K$ の近似式は、式(11.2)より

$$K(x) \approx \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \log|x|, & |x| \rightarrow 0 \\ \frac{2}{\pi} e^{-\pi|x|/2}, & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (18)$$

となる。図-2は積分核 $K$ と $K_g$ の比較を示す。式(18)の

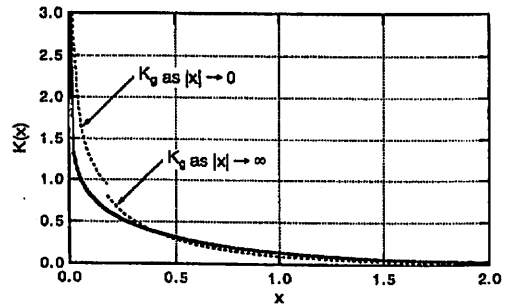


Figure 2. Comparison of the kernels  $K$  and  $K_g$ .

第1式に示されているように、原点 $x=0$ は対数特異点であるので積分核 $K$ は可積分であり、積分核 $K_x$ より取り扱いが容易である。

次に、式(10.1)および(15)を用いて一定水深領域での最大波について述べる。波速 $c$ の定型進行波を考え、移動座標

$$\vartheta = x - ct \tag{19}$$

から波の運動を見る。式(10.1)は

$$(1 + \eta)(c - u) = \text{const.} \equiv Q \tag{20}$$

となり、式(15)からは

$$(c - u)u_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vartheta - \chi)\eta_x(\chi) d\chi \tag{21}$$

が得られる。ここに、 $\chi = \xi - ct$ である。式(21)を $\theta$ について積分すると次式が得られる。

$$A + cu - \frac{1}{2}u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vartheta - \chi)\eta(\chi) d\chi \tag{22}$$

ただし、 $A$ は積分常数である。積分方程式(22)は厳密には解けないので、Whitham(1967)と同様に、関数

$$K_0(x) = \frac{v}{2} e^{-v|x|}, \quad v = \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

で積分核 $K$ を近似する。この近似核は式(16)で与えられた積分核の対称性および正規化条件を満たし、かつ、 $|x| \rightarrow \infty$ では積分核 $K$ と同じ特性、式(18)の第2式、を持っている。さらに、好都合なことは近似核 $K_0$ が次式のGreen関数となっているという事実である。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - v^2\right)K_0(x) = -v^2\delta(x) \tag{24}$$

近似核(23)および式(24)を用いると、式(22)の特解として次式が得られる(付録 4)。

$$\eta = \frac{8}{9} e^{-\pi|\theta|/4}, \quad u = \frac{4}{3} e^{-\pi|\theta|/4} \tag{25}$$

式(25)の第1式で与えられる最大波の波形はWhitham(1967)の式と一致する。以上から、式(10.1)および(15)は式(3)と本質的に同様な系であることが判る。

#### 4. 水深変化領域での浅海長波

##### 4.1 2次元的な水深変化の場合

3次元的な水深変化領域におけるモデル方程式を述べる前に断面2次元の場合を考える。このときの非線

形長波に対する方程式としてPeregrine(1967)の式

$$\eta_t + \{(h + \eta)u\}_x = 0 \tag{26.1}$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x = (1/3)h^2u_{xx} + hh_xu_{xt} + (1/2)hh_{xx}u \tag{26.2}$$

を採用する。ただし、水深 $h$ は $x$ -方向にのみ変化すると仮定している。式(26.2)の右辺に低次近似式 $u_t = -g\eta_x$ を代入すると次式が得られる。

$$u_t + uu_x + g\eta_x + (1/3)gh^2\eta_{xxx} + gh_h\eta_{xx} + (1/2)ghh_{xx}\eta_x = 0 \tag{27}$$

式(27)の左辺第(3+4)項は浅海長波の式(10.2)の左辺第(3+4)項と一致している。しかるに、水深 $h$ が変化する場合、式(11.1)は任意の水深においてすべての周波数の波を考えることを意味するので、水深変化領域においても式(12)-(14)の演算は可能である。したがって、式(27)の左辺第(3+4)項は積分(13)によって置き換えることができ、次式が得られる。

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(x - \xi)\eta_\xi(\xi, t) d\xi + gh_h\eta_{xx} + (1/2)ghh_{xx}\eta_x = 0 \tag{28}$$

式(27)ではBoussinesq型方程式、Peregrine(1967)の式(26.2)の特徴である時間微分を含む分散項 $u_{xxx}$ が $KdV$ 型の分散項 $\eta_{xxx}$ 、すなわち空間変数の3階微分に変換されている。したがって、§1で述べた分散式に関するBoussinesq型方程式の利点は式(27)では無くなっている。しかし、水深が一定のときには、モデル方程式(26.1)および(28)はそれぞれ式(10.1)および(15)と一致することから判るように、(26.1)および(28)は積分表示により局所的に線形分散式を満たすように変形されているので、式(27)の欠点は補正されている。

##### 4.2 3次元的な水深変化の場合

水平座標を $(x, y)$ 、平均水粒子速度の $(x, y)$ -成分を $(u, v)$ 、水深を $h(x, y)$ とする。式(27)と同様に、浅海長波に対するPeregrine(1967)の方程式を低次近似式を用いて変形すると次式が得られる。

$$\eta_t + \{(h + \eta)u\}_x + \{(h + \eta)v\}_y = 0 \tag{29.1}$$

$$u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x + (1/3)gh^2(\eta_{xxx} + \eta_{xyy}) + (1/2)gh(h_x\eta_x + h_y\eta_y)_x + (1/2)ghh_{xx}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0 \tag{29.2}$$

$$\begin{aligned} &v_t + uv_x + v v_y + g \eta_y + (1/3)gh^2(\eta_{xy} + \eta_{yy}) \\ &+ (1/2)gh(h_x \eta_x + h_y \eta_y) + (1/2)ghh_y(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0 \end{aligned} \quad (29.3)$$

ただし、添字 $(x, y, t)$ は偏微分を表す。これまでと同様に、式(29.2)-(29.3)の左辺第(4+5)項を積分表示する。まず、式(29.2)に対して積分

$$I_x = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{gh^2} K(x - \xi, y - \zeta) \eta_\xi(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \quad (30)$$

を考える。ただし、積分核は次式で定義される。

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{g}{k_x} \tanh k_x h \right) \times \\ &\times \left( \frac{g}{k_y} \tanh k_y h \right) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (31.1) \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{g}{\pi} \right)^2 \log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi |x|}{4h} \right) \right\} \cdot \log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi |y|}{4h} \right) \right\} \quad (31.2)$$

ここに、 $(k_x, k_y)$ は波数の $(x, y)$ -成分である。長波近似 $(k_x h, k_y h \ll 1)$ のとき、式(31)は

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (gh)^2 \left\{ 1 + \frac{h^2}{3} (ik_x)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{3} (ik_y)^2 + \dots \right\} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\ &= (gh)^2 \left\{ \delta(x) \delta(y) + (h^2/3) \delta_{xx}(x) \delta(y) \right. \\ &\quad \left. + (h^2/3) \delta(x) \delta_{yy}(y) + \dots \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\delta(x) \delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (33)$$

は2次元のデルタ関数である。したがって、

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{-\infty}^{\infty} g \left\{ \delta(x - \xi) \delta(y - \zeta) + (h^2/3) \delta_{\xi\xi}(x - \xi) \times \right. \\ &\quad \times \delta(y - \zeta) + (h^2/3) \delta(x - \xi) \delta_{\zeta\zeta}(y - \zeta) + \dots \left. \right\} \times \\ &\quad \times \eta_\xi(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \end{aligned}$$

$$= g \left\{ \eta_x + (h^2/3) \eta_{xxx} + (h^2/3) \eta_{xyy} + \dots \right\} \quad (34)$$

となり、式(29.2)の左辺第(4+5)項と一致する。同様に、式(29.3)の左辺第(4+5)項に対しては積分

$$I_y = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{gh^2} K(x - \xi, y - \zeta) \eta_\zeta(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \quad (35)$$

を考えればよい。したがって、式(29.2)-(29.3)はそれぞれ以下の諸式で置き換えることができる。

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + v u_y \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{gh^2} K(x - \xi, y - \zeta) \eta_\xi(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \\ &+ (1/2)gh(h_x \eta_x + h_y \eta_y)_x + (1/2)ghh_y(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0 \end{aligned} \quad (36.1)$$

$$\begin{aligned} &v_t + u v_x + v v_y \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{gh^2} K(x - \xi, y - \zeta) \eta_\zeta(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \\ &+ (1/2)gh(h_x \eta_x + h_y \eta_y)_y + (1/2)ghh_x(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0 \end{aligned} \quad (36.2)$$

以上をまとめると、所要のモデル方程式は、断面2次元の場合には式(26.1)および(28)、3次元の場合には式(29.1)、(36.1)、および(36.2)である。ただし、積分核はそれぞれ式(11)および(31)で与えられる。

## 5. 結 語

本研究では、沿岸での波浪変形解析に適用するため、Whitham(1967)とBenjamin(1967)によるモデル方程式を3次元の波動場に拡張し、非線形性と線形分散性を合わせ持つ浅海長波に対するモデル方程式を提案した。これらの方程式は浅海長波に対するBoussinesq型方程式であるPeregrine(1967)の式の分散項を積分表示で置き換えた積分・微分方程式である。Whithamらのモデル方程式では線形波の波速のFourier逆変換を積分核としているため、積分核自体に数学的特異性を含み、これが式の取り扱いを困難にしている。本モデルでは、波速の自乗のFourier逆変換を積分核として用いることによりこの点が改良されている。

## 参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 有理近似による非定常緩勾配不規則波動方程式, 第40回海岸工学論文集, JSCE, pp.26-30.
- 窪泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡部晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波波動方程式について, 第38回海岸工学論文集, JSCE, pp.46-50.
- 筒井茂明・Don P. Lewis・長崎雅哉 (1990): サンゴ礁海岸における波高分布推算法, 海岸工学論文集, 第37巻, JSCE, pp.31-35.
- 筒井茂明 (1991): リーフ海岸における波浪推算モデル, 琉球大学工学部紀要, 第42号, pp.35-43.
- 土屋義人・安田孝志 (1974): 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海岸工学講演会論文集, JSCE, pp.65-71.
- 本間仁・安芸俊一 (1966): 物部水理学, 岩波書店, 東京, pp.660.
- 渡部晃・丸山康樹 (1984): 屈折・回折・碎波変形を含む波浪場の数値計算法, 第31回海岸工学講演会論文集, JSCE, pp.103-107.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction and diffraction, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., pp.471-490.
- Boussinesq, J. (1871): Théorie de l'intumescence liquide, appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Vol.72, pp.755-759.
- Benjamin, T. B. (1967): Internal waves of permanent form in fluids of great depth., Jour. Fluid Mech., Vol.29, pp.559-592.
- Benjamin, T. B., J. L. Bona and J. J. Mahony (1972): Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Vol.A272, pp.47-78.
- Bettess, P. and O. C. Zienkiewicz (1977): Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, Inter. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol.11, pp.1271-1290.
- Bhatnagar, P. L. (1979): Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems, Oxford, pp.142.
- Chen, H. S. and C. C. Mei (1975): Hybrid-element method for water waves, Proc. Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975), Vol.1, pp.63-81.
- Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwang (1984): Wave diffraction due to areas of energy dissipation, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.110, pp.67-79.
- Fermi, E., J. Pasta and S. Alum (1974): Studies on nonlinear problems. I, Nonlinear Wave Motion, Lectures in Mathematics, AMS, Vol.15, pp.143-156.
- Gardner C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967): Method for solving the Korteweg-deVries equation, Phys. Rev. Lett., Vol.19, pp.1095-1097.
- Hirota, R. (1973): Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices, Jour. Math. Phys. Vol.14, pp.810-814.
- Jeffrey, A. and T. Kakutani (1972): Weak nonlinear waves: a discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, SIAM Rev., Vol.14, pp.582-643.
- Kirby, J. T. (1986): A general equation for waves over rippled beds, Jour. Fluid Mech., Vol.162, pp.171-186.
- Kirby, J. T. (1988): Parabolic wave computations in non-orthogonal coordinates systems, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol.114, pp.673-685.
- Korteweg, D. J. and G. de Vries (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Vol.39, pp.422-443.
- Laitone (1960): The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol.9, pp.430-444.
- Lamb, H. (1959): Hydrodynamics, Camb. Univ. , pp.738.
- Lewis, D. P., S. Tsutsui, M. Morison and J. Imberger (1989): Esperance Harbour Ship Motion Study, Final Report, Vol.1, Center for Water Research, University of Western Australia, Report No.WP-297-DL, pp.128.
- Mei, C. C. (1983): The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley and Sons Inc., New York, pp.740.
- Miles, J. W. (1981): The Korteweg-de Vries equation: a historical essay, Jour. Fluid Mech., Vol.106, pp.131-147.
- Miura, R. M. (1974): The Korteweg-de Vries equation: a model equation for nonlinear dispersive waves, Nonlinear Waves (eds. S. Leibovich and R. Seebass), Cornell Univ., pp.212-234.
- Miura, R. M. (1976): The Korteweg-de Vries equation: a survey of results, SIAM Rev., Vol.18, pp.412-459.
- Ono, H. (1975): Algebraic solitary waves in stratified fluids, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol.39, pp.1082-1091.
- Peregrine, D. H. (1966): Calculations of the development of an undular bore, Jour. Fluid Mech., Vol.25, pp.321-330.



- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.27, pp.815-827.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.95, pp.159-176.
- Ravindran, R. and P. A. Prasad (1979): A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid filled viscoelastic tube, *Acta. Mech.*, Vol.31, pp.235-280.
- Roseau, M. (1976): *Asymptotic Wave Theory*, Elsevier, pp.349.
- Satuma, J., M. Ablowitz and Y. Kodama (1979): On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth, *Phys. Lett.*, Vol.A73, pp.283-286.
- Seliger, R. L. (1968): A note on the breaking of waves, *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, Vol.A.303, pp.493-496.
- Toda, M. (1967): Vibration of a chain with nonlinear interaction, *Jour. Phys. Soc. Japan*, Vol.22, pp.431-436.
- Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1992): Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, *Coastal Eng. in Japan*, JSCE, Vol.34, pp.145-158.
- Tsutsui, S. and K. Zamami (1993): Jump condition of energy flux at the line of bathymetric discontinuity and wave breaking on the reef flat, *Coastal Eng. in Japan*, JSCE, Vol.36, pp.155-175.
- Wadati, M. (1972): The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, *Jour. Phys. Soc. Japan*, Vol.32, p.1861.
- Wadati, M. (1973): The modified Korteweg-de Vries equation, *Jour. Phys. Soc. Japan*, Vol.34, pp.1289-1296.
- Whitham, G. B. (1967): Variational method and application to water waves, *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, Vol.A.299, pp.6-25.
- Whitham, G. B. (1974): *Linear and Nonlinear waves*, Wiley-Int., New York, pp.636.
- Yamashita, T., Y. Tsuchiya, M. Matsuyama and T. Suzuki (1990): Numerical calculation of linear wave propagation in the coastal zone, *Bull. Disaster Prevention Research Inst., Kyoto Univ.*, Vol.40, pp.15-40.
- Zienkiewicz, O. C., R. W. Lewis and K. G. Stagg (Eds.) (1978): *Numerical Methods in Offshore Engineering*, Wiley-Int., Pub., New York, pp.582.
- Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal (1965): Interactions of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.15, pp.240-243.

- Zabusky, N. J. (1967): A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, *Nonlinear partial differential equations* (Ed. W. Ames), Academic Press, New York, pp.223-258.
- Zabusky, N. J. and C. J. Galvin (1971): Shallow-water waves, the Korteweg de-Vries equation and solitons, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.47, pp.811-824.

### 付録 1. Fourier逆変換式(11.2)の証明

積分表示(11.1)は次式のように変形される。

$$K(X) = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|\lambda|X} \frac{\tanh \xi}{\xi} d\xi \quad (\text{A.1.1})$$

ただし、 $X = x/h$ ,  $\xi = kh$ であり、この積分核が対称、 $K(X) = K(-X)$ であることが考慮されている。複素平面  $\lambda = \xi + i\zeta$  において図-A.1に示すような実軸上の2線分  $[-R, -r]$ ,  $[r, R]$  と2半円  $C_r$ ,  $C_R$  からなる閉積分路  $C$  に沿う複素積分 (Roseau, 1976)

$$I_C(X) = \frac{g}{2\pi} \oint_C e^{i|\lambda|X} \frac{\tanh \lambda}{\lambda} d\lambda \quad (\text{A.1.2})$$

を考える。ただし、 $0 < r < \pi/2$ ,  $(n-1)\pi < R < n\pi$ , ( $n$ : 正の整数)である。積分路内部での極は

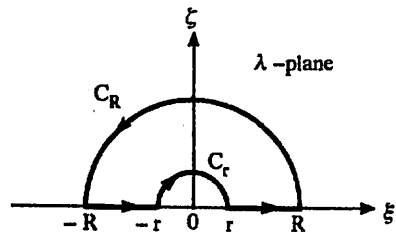


Figure A.1. Integral path  $C$  in the  $\lambda$ -plane.

$\lambda_0 = (p + 1/2)\pi i$ , ( $p = 0, 1, \dots, n-1$ ) (A.1.3)  
であるから、積分(A.1.2)の留数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda_0) &= \frac{g}{2\pi} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0) e^{i|\lambda|X} \tanh \lambda}{\lambda} \right]_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \\ &= \frac{g}{2\pi} \frac{e^{i\lambda_0|X|}}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

積分路C<sub>r</sub>に沿ってはλ = r e<sup>iφ</sup> (φ: 偏角)と置くと,

$$I_{C_r}(X) = \frac{g i}{2\pi} \int_{\pi}^0 e^{-r|X| \sin \varphi + i r|X| \cos \varphi} \times \tanh(r e^{i\varphi}) d\varphi \quad (A.1.5)$$

が得られ, r → 0なる極限では I<sub>C<sub>r</sub></sub> → 0となる. 同様に, 積分路C<sub>R</sub>に沿ってはλ = R e<sup>iφ</sup>と置き, 極限R → ∞を採るとC<sub>R</sub>に沿う積分も消失する. したがって, 留数の定理より次式が得られる.

$$K(X) = [I_C(X)]_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} = 2\pi i [\text{Re}(\lambda_0)]_{p \rightarrow \infty} = \frac{g}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-(p+1/2)\pi|X|}}{p+1/2} \quad (A.1.6)$$

しかるに,

$$\sum_{p=0}^{\infty} e^{-(p+1/2)\pi|X|} = \frac{1}{2 \sinh(\pi X/2)} \quad (A.1.7)$$

であるから, この式をXについて区間[|X|, ∞]で積分すると次式が得られる.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-(p+1/2)\pi|X|}}{p+1/2} = -\log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi|X|}{4} \right) \right\} \quad (A.1.8)$$

したがって,

$$K(X) = -\frac{g}{\pi} \log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi|X|}{4} \right) \right\} \quad (A.1.9)$$

となり, Xからxへ変換すると式(11.2)が得られる.

付録2. モデル方程式(10.1)および(15)が線形分散式を満たすことの証明

式(10.1)および(15)の線形部分

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + h u_x &= 0 \\ u + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(x-\xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.2.1)$$

においてuを消去すると,

$$\eta_t - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (A.2.2)$$

が得られる. 上式にη = a e<sup>i(kx - σt)</sup>を代入すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} K(x-\xi) e^{-i k(x-\xi)} d\xi = \frac{i \sigma^2}{k} \quad (A.2.3)$$

となる. さらに, ζ = x - ξと置き, Fourier変換により式(A.2.3)をKについて解くと次式が得られる.

$$K(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sigma}{k} \right)^2 e^{i k \zeta} dk + \text{const.} \quad (A.2.4)$$

式(A.2.2)の積分項に対する定数項の寄与は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 2\pi i k a e^{-i \sigma t} \delta(k) \quad (A.2.5)$$

に比例する. しかし, 線形波にはパルス関数は無関係であるから, 式(A.2.4)における定数項は消失すべきである. したがって, 微小振幅波の分散式(9)により式(A.2.4)は式(11.1)と一致する. すなわち, 式(10.1)および(15)は線形分散式を満たす.

付録3. 対称性および正規化条件, 式(16)の証明

積分核K<sub>g</sub>が式(16)を満たすことはWhitham(1967, 1974)に述べられている. 積分核Kの対称性については付録1において述べた. 正規化条件の証明には, 式(11)により与えられるFourier変換

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{g}{\pi} \log \left\{ \tanh \left( \frac{\pi|x|}{4h} \right) \right\} e^{-i k x} dx \\ = \frac{g}{k} \tanh kh \end{aligned} \quad (A.3.1)$$

を用いることができる. 上式は極限kh → 0では,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) = gh \quad (A.3.2)$$

となる. さらに, g, hにより無次元化すると式(16)の第2式が得られる.

付録4. 最大波の式(25)の証明

式(22)の両辺に左から(d<sup>2</sup>ldt<sup>2</sup> - v<sup>2</sup>)を乗じて, 式(24)

を用いると次式が得られる。

$$\frac{d}{d\vartheta} \{(c-u)u_\vartheta\} = v^2 \left\{ (A + cu - \frac{1}{2}u^2) - \eta \right\} \quad (\text{A.4.1})$$

式(A.4.1)の両辺に $2(c-u)u_\vartheta$ を乗じると、

$$d\{(c-u)u_\vartheta\}^2 = 2v^2 \left\{ (A + \frac{c^2}{2})(c-u) - \frac{1}{2}(c-u)^3 - \eta(c-u) \right\} du \quad (\text{A.4.2})$$

となる。さらに、両辺を積分すると、

$$(c-u)^2 u_\vartheta^2 = 2v^2 \left\{ -\frac{1}{2} (A + \frac{c^2}{2})(c-u)^2 + \frac{1}{8}(c-u)^4 + \frac{\eta}{2}(c-u)^2 + B \right\} \quad (\text{A.4.3})$$

が得られる。ただし、 $B$ は積分常数である。 $u=c$ は微分方程式(A.4.3)の左辺の特異点となるので、右辺においても $(c-u)^2$ が因数とならねばならない。したがって、 $B=0$ であり、式(A.4.3)は次式となる。

$$u_\vartheta^2 = 2v^2 \left\{ -\frac{1}{2} (A + \frac{c^2}{2}) + \frac{1}{8}(c-u)^2 + \frac{\eta}{2} \right\} \quad (\text{A.4.4})$$

最大波は孤立波のときに発生するので、 $|\vartheta| \rightarrow \infty$ で $\eta = u = u_\vartheta = 0$ なる境界条件が成立する。したがって、式(A.4.4)は次式となる。

$$u_\vartheta^2 = 2v^2 \left\{ \frac{1}{8} u^2 - \frac{1}{4} cu + \frac{\eta}{2} \right\} \quad (\text{A.4.5})$$

さらに、式(A.4.5)の特解としてRankine-Stokesの砕波条件( $\vartheta=0$ で $u=c$ )を満たし、かつ、指数関数的な解を考えると、関係式

$$\eta = \frac{1}{2} cu, \quad u_\vartheta^2 = \frac{v^2}{4} u^2 \quad (\text{A.4.6})$$

が成立するときに所要の解が得られ、それぞれ次式で与えられる。

$$\eta = \frac{c^2}{2} e^{-\pi|\vartheta|/4}, \quad u = c e^{-\pi|\vartheta|/4} \quad (\text{A.4.7})$$

式(A.4.7)では波速 $c$ が確定していないが、Whithamの結果 $c=4/3$ を用いると式(25)が得られる。