

# 琉球大学学術リポジトリ

## 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式（第2報）

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Shallow-water waves, Linear dispersion, Nonlinearity, Modeling, Boussinesq equation 作成者: 筒井, 茂明 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/2216">http://hdl.handle.net/20.500.12000/2216</a>

## 線形分散性と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式 (第2報)

筒井 茂 明\*

Model Equations Combining Full Linear Dispersion  
With Long Wave Nonlinearity, Part. II

Shigeaki TSUTSUI\*

## Abstract

For estimation of spectral deformation of irregular waves in shallow water, analyses for waves with wide range of wave periods are necessary. A system of integro-differential equations for nonlinear wave propagation is therefore developed for representing wave fields with incident and reflected waves. The model equations combine long wave nonlinearity with full linear dispersion of short-period waves. The dispersion term is described as the integral where the kernel is the Fourier transform of the dimensionless local wave speed. Although the Fourier transform for the three-dimensional model is unknown, the kernel for two-dimensional one acts as the logarithmic potential, as is usual in the potential theory in hydrodynamics. An approximate equation for two-dimensional, unidirectional propagation of waves is derived from the system. Numerical simulation with this equation verifies validity of the proposed system of equations, by comparing with the results of the KdV equation.

**Key words.** Shallow-water waves, Linear dispersion, Nonlinearity, Modeling, Boussinesq equation.

## 1. 緒 言

複雑な海岸・海底地形における不規則波浪の変形あるいはスペクトル変化を推算する場合には、長周期から短周期までの広範囲の周波数の波を対象としなければならない。そのために緩勾配方程式(Berkhoff, 1972; Dalrympleら, 1984; Kirby, 1986; 磯部, 1994)あるいは浅海長波に対するBoussinesq型の方程式(Peregrine, 1967; Liuら, 1985)に基づく数値計算法が一般に用いられる。前者は、線形方程式であり解の重ね合わせが可能であるから、不規則波に対して有用である(Lewisら, 1989; 筒井ら, 1990; 窪ら, 1991; 筒井, 1991; Tsutsui & Lewis, 1992; 磯部, 1993)。後者は浅海長波の伝播を表わす方程式としてPeregrineが最初に導いた。その後、Benjamin, Bona, & Mahony (1972)が一般論を拡張したのでBBM方程式と呼ばれることもある(Miles, 1981)。Benjaminらはその一般論の中で分散

性長波方程式群におけるBBM方程式の有用性を論じている。BBM方程式が不規則波の変形計算に対して用いられる主たる理由は、その分散性が短周期波に対しても正の有限値を採ること、すなわち、BBM方程式は本来の長波領域のみならず短周期波領域に対する適用の可能性を持っていることに依る。しかし、短周期波領域における線形分散関係の近似度は十分ではない。安田ら(1988)や間瀬ら(1991)は、KdV方程式の分散項を修正し、短周期波領域に対しても適用可能にしたモデル方程式を提案している。しかし、これらのモデルは断面2次元で特定方向に進行する波のみを取り扱うもので、反射波があるときには使用できないという重大な欠点がある。したがって、入・反射波が共存する場合の波動場を対象にし、波の非線形性と線形分散性を合わせもつモデル方程式を考える必要がある。

このため前報(筒井, 1994)においては、浅海での波の3次元的な変形を表わすことができるPeregrine (1967)

受理：1995年5月12日

土木学会第50回年次学術講演会(1995)にて一部発表

\* 工学部環境建設工学科 Dep. of Civil Engineering and Architecture, Faculty of Engrg.

の式から、線形分散性と浅海長波の非線形性を具備するモデル方程式を提案した。この式は、局所波速の Fourier 変換を核として、分散項を積分表示した微積分方程式である。このような形式のモデル方程式は非線形波動伝播の解析には有用である (Whitham, 1967; Seliger, 1968; Benjamin, 1967; Benjaminら, 1972; Ono, 1975)。しかし、その誘導過程において、いわば発見的記述があり論理的に不十分な点が認められる。

したがって、本研究ではこの理論結果を補足説明するとともに、数値計算に基づくモデル方程式の有用性について述べる。

§2.3ではまず、従来の浅海長波方程式の欠点の所在を明らかにするとともに、流体力学の基礎方程式より所要のモデル方程式の再誘導を行う。§4ではこれらの式が短周期波領域における線形分散関係を満たすこと、および長波近似では Boussinesq 型の方程式と本質的に一致することを証明する。次に、§5では断面2次元の場合のモデル方程式について述べ、§6ではモデル方程式の有用性を示すため、断面2次元の場合を例に採り数値計算例を示す。最後に、§7では本研究で得られたことを要約し、結論とする。

## 2. 基礎方程式

静水面に座標原点を置き、水平座標を  $(x^*, y^*)$ 、鉛

直座標を  $z^*$ 、時間を  $t^*$  とする。水深、流速成分、水面変動量、圧力、重力加速度、および水の密度をそれぞれ  $h^*$ 、 $(u^*, v^*, w^*)$ 、 $\eta^*$ 、 $p^*$ 、 $g$ 、 $\rho$  とすると、連続方程式、Euler の運動方程式、および水面と海底での運動学的境界条件は以下の諸式で与えられる。

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - g \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} - w^* = 0 \quad z^* = \eta^* \quad (2.4)$$

$$u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial h^*}{\partial y^*} + w^* = 0 \quad z^* = -h^* \quad (2.5)$$

連続方程式(2.1)および水平方向の Euler の運動方程式(2.2)を  $z^*$  について全水深にわたり積分し、水面および海底での境界条件(2.4)、(2.5)を考慮すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ (h^* + \eta^*) \bar{u}^* \right\} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left\{ (h^* + \eta^*) \bar{v}^* \right\} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} + \frac{1}{h^* + \eta^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} (\Delta u^*)^2 dz^* + \frac{1}{h^* + \eta^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} \Delta u^* \Delta v^* dz^* = -\frac{1}{\rho(h^* + \eta^*)} \int_{-h^*}^{\eta^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} dz^* \quad (2.7.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{u}^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y^*} + \frac{1}{h^* + \eta^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} \Delta u^* \Delta v^* dz^* + \frac{1}{h^* + \eta^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} (\Delta v^*)^2 dz^* = -\frac{1}{\rho(h^* + \eta^*)} \int_{-h^*}^{\eta^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} dz^* \quad (2.7.2)$$

ここに、水深平均流速および速度差は次式で定義される。

$$\bar{u}^* = \frac{1}{h^* + \eta^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} u^* dz^*, \quad \bar{v}^* = \frac{1}{h^* + \eta^*} \int_{-h^*}^{\eta^*} v^* dz^*, \quad \Delta u^* = u^* - \bar{u}^*, \quad \Delta v^* = v^* - \bar{v}^* \quad (2.8)$$

同様に、鉛直方向の Euler の運動方程式(2.3)を  $z^*$  について区間  $[z^*, \eta^*]$  で積分すると、任意点での圧力は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho} (p^* - p_0^*) = g(\eta^* - z^*) + \frac{\partial}{\partial t^*} \int_{z^*}^{\eta^*} w^* dz^* + \frac{\partial}{\partial x^*} \int_{z^*}^{\eta^*} u^* w^* dz^* + \frac{\partial}{\partial y^*} \int_{z^*}^{\eta^*} v^* w^* dz^* - w^{*2} \quad (2.9)$$

ただし、 $p_0^*$  は  $z^* = \eta^*$  における大気圧である。鉛直流速  $w^*$  は連続方程式を  $z$  について区間  $[-h, z]$  で積分することにより得られ、次式で与えられる。

$$w^* = -\frac{\partial}{\partial x^*} \int_{-h}^{z^*} u^* dz^* - \frac{\partial}{\partial y^*} \int_{-h}^{z^*} v^* dz^* \quad (2.10)$$

以上の誘導過程ではいかなる仮定も用いられておらず、すべて厳密な式である。上式(2.6)–(2.10)における

各項のオーダーを調べるため、次の無次元量を定義する。すなわち、代表時間として周期  $T^*$ 、水平方向の代表長として線形長波の波速  $c_0^*$  を用いて定義される波長  $c_0^* T^*$ 、鉛直方向の代表長として基準点での水深  $h_0^*$  を採用する。水面変動量は振幅  $a_0^*$  で無次元化する。また、流速成分は線形長波の波速  $c_0^*$  で無次元するとともに、振幅水深比  $\varepsilon$  および無次元周波数  $\mu$  によりスケーリングを行う。

$$\left. \begin{aligned} t &= \omega^* t^*, \quad (x, y) = (\omega^* / c_0^*) (x^*, y^*), \quad z = z^* / h_0^*, \quad h = h^* / h_0^*, \quad \eta = \eta^* / a_0^*, \quad p = p^* / \rho g h_0^* \\ \varepsilon(u, v) &= (u^*, v^*) / c_0^*, \quad \varepsilon(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}^*, \bar{v}^*) / c_0^*, \quad \varepsilon w = \mu w^* / c_0^*, \quad \varepsilon = a_0^* / h_0^*, \quad \mu = \omega^* (h_0^* / g)^{1/2} \\ \omega^* &= 2\pi / T^*, \quad c_0^* = (g h_0^*)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

したがって、式(2.6)および(2.7)は以下ようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{(h + \varepsilon \eta) \bar{u}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{(h + \varepsilon \eta) \bar{v}\} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} (\Delta u)^2 dz + \frac{\varepsilon}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \Delta u \Delta v dz = -\frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\varepsilon} dz \quad (2.13.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \Delta u \Delta v dz + \frac{\varepsilon}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} (\Delta v)^2 dz = -\frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\varepsilon} dz \quad (2.13.2)$$

ここに、

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} v dz, \quad \Delta u = u - \bar{u}, \quad \Delta v = v - \bar{v} \quad (2.14)$$

である。また、式(2.9)、(2.10)はそれぞれ次式となる。

$$p - p_0 = -z + \varepsilon \eta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\varepsilon \eta} w dz + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\varepsilon \eta} u w dz + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\varepsilon \eta} v w dz - \varepsilon^2 (w / \mu)^2 \quad (2.15)$$

$$w = -\mu^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \right] \quad (2.16)$$

以下では、

$$\varepsilon = \mu^2 \ll 1 \quad (2.17)$$

と仮定する。高々

$$\Delta u = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \Delta v = O(\varepsilon^{1/2}) \quad (2.18.1)$$

となる波動に対しては、式(2.13)の左辺の積分項は  $O(\varepsilon^2)$  である。また、式(2.16)により圧力方程式(2.15)の非線形項である右辺の最後の3項は  $O(\varepsilon^3)$  となる。

したがって、式(2.15)において右辺第3項までの線形項を考慮し、式(2.13)の右辺の圧力項を評価すれば、 $O(\varepsilon)$  までの項を取り入れた近似方程式が得られる。

Boussinesq型方程式として近年よく用いられる Pergrine (1967) の方程式は、水平流速成分に対して

$$\Delta u = O(\varepsilon), \quad \Delta v = O(\varepsilon) \quad (2.18.2)$$

と仮定し、式(2.15)および(2.16)により式(2.13)の圧力項を評価して得られ、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \mu^2 \left( \frac{1}{2} h \frac{\partial^3 (h \bar{u})}{\partial t \partial x^2} \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{2} h \frac{\partial^3 (h \bar{v})}{\partial t \partial x \partial y} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t \partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.19.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \mu^2 \left( \frac{1}{2} h \frac{\partial^3 (h \bar{v})}{\partial t \partial x \partial y} \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x \partial y} + \frac{1}{2} h \frac{\partial^3 (h \bar{v})}{\partial t \partial y^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.19.2)$$

式(2.19)は仮定(2.17)および(2.18.2)の下に成立する。仮定(2.17)は長波に対する近似であって、ここでの議論の必須条件である。Peregrineの方程式は正負両方向に進む波を取り扱え、かつ波の分散式がKdV型方程式より優れていること(Benjaminら, 1972; 筒井, 1993, 1994)から浅海での非線形波の変形計算に用いられている。しかし、この式は短周期領域において線形分散関係を満たしておらず、不規則波に対して必須である短周期波を取り扱うには不都合がある。その主原因は水深平均流速を用いた仮定(2.18.2)に依る。したがって、次章では仮定(2.18.2)を用いないで式(2.13)の右辺の圧力項を評価し、非線形性と線形分散関係を合わせ持つ浅海長波方程式を誘導する。

### 3. 圧力項の評価とモデル方程式

前述のように、圧力方程式(2.15)における右辺第4-6項は非線形項であり、式(2.13)の右辺の圧力項を評価する際には無視できる。したがって、ここでは水深平均流速に依らず、圧力方程式(2.15)における右辺第1-3項に相当する線形理論、すなわち、次式(3.1)-(3.5)に示す線形境界値問題の解により式(2.13)の圧力項を評価する(Chester, 1968; Roseau, 1976)。

$$\mu^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.2.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} - 1 \quad (3.3)$$

$$\mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad z = \varepsilon \eta \quad (3.4)$$

$$\mu^2 \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + w = 0 \quad z = -h \quad (3.5)$$

式(3.2), (3.3)より無渦運動の条件

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

が得られる。したがって、速度ポテンシャル  $\phi$  が存在し、任意の関数  $\varphi(k, t)$  のFourier積分として表わすことができる。

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk_x dk_y \quad (3.7.1)$$

$$A = (\omega^* / c_0^*)^2, \quad k = (c_0^* / \omega^*) k^* \quad (3.7.2)$$

ただし、 $k$  は無次元波数で、 $k_x, k_y$  はその  $x, y$  成分である。式(3.7.1)は連続方程式(3.1)を満たし、海底での境界条件(3.5)は、緩勾配方程式を誘導する場合と同様に、局所的には  $w=0$  としている。無次元量の定義式(2.11)および式(3.2), (3.3)により流速、圧力などは以下の諸式で与えられる。

$$u = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_x e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk_x dk_y \quad (3.8.1)$$

$$v = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_y e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk_x dk_y \quad (3.8.2)$$

$$w = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mu k e^{i(k_x x + k_y y)} \times \sinh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk_x dk_y \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\mu A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_x e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.10.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\mu A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_y e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.10.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{\mu A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mu k e^{i(k_x x + k_y y)} \times \sinh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.11)$$

式(3.11)を  $z$  につき積分し、式(3.10)を考慮すると次式が得られる。

$$p = -z - \frac{\mu A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.12)$$

ただし、時間  $t$  のみ依存する積分定数は任意関数

$\varphi(k, t)$ に含めてある。さらに、 $z = \varepsilon \eta$ で $p = p_0$ なる条件を考えると、水面変動量は次式で与えられる。

$$\eta = -\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh \mu k h \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.13)$$

ただし、平均水深を表わす定数は0とする。水面での境界条件(3.4)により関数 $\varphi(k, t)$ を定めるための微分方程式が得られるが、圧力項を評価するためには不要であるのでここでは省略する。

式(3.10.1)を用いると式(2.13.1)の右辺の圧力項は、

$$-\frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} dz \approx -\int_{-h}^0 \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} dz \\ = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_x e^{i(k_x x + k_y y)} \cosh \mu k h \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} \times \frac{\tanh \mu k h}{\mu k h} dk_x dk_y \quad (3.14)$$

と近似できる。しかるに、式(3.13)より

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} ik_x e^{i(k_x x + k_y y)} \times \cosh \mu k h \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk_x dk_y \quad (3.15)$$

であるから、Fourier変換

$$K(x, y) = \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh \mu k h}{\mu k h} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.16)$$

が存在すれば、式(3.14)は畳込みの定理により次式で与えられる。

$$-\int_{-h}^0 \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} dz \\ = -\frac{1}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x} (x - \xi, y - \zeta, t) K(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (3.17)$$

式(2.13.2)の右辺の圧力項もまた同様に評価でき、結局、式(2.13)より次の微積分方程式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x} (x - \xi, y - \zeta, t) \times K(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (3.18.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial y} (x - \xi, y - \zeta, t) \times K(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (3.18.2)$$

式(2.12)および(3.18)が所要のモデル方程式である。これらの式が有用であるためには、式(3.16)で定義されるFourier積分が存在しなければならないが、変換式(3.16)の存在は不詳である。ただし、前報(筒井, 1994)で与えた積分核は式(3.16)に対する1つの近似式である。

#### 4. モデル方程式の分散関係

一定水深の場合にはモデル方程式(2.12)および(3.18)は線形分散関係を満たし、長波近似のときにはPeregrine (1967)の式と一致することを証明する。これらの式の線形部分を用いて $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{h}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} (x - \xi, y - \zeta, t) K(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \\ + \frac{h}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} (x - \xi, y - \zeta, t) K(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.1)$$

が得られる。この式に線形波

$$\eta = a e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad a : \text{振幅} \quad (4.2)$$

を代入すると、

$$\frac{1}{k^2} = A^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} h K(\xi, \zeta) e^{-i(k_x \xi + k_y \zeta)} d\xi d\zeta \\ = \frac{\tanh \mu k h}{\mu k} \quad (4.3)$$

となる。式(4.3)は次元量では

$$c^*{}^2 = \frac{g}{k^*} \tanh k^* h^* \quad (4.4)$$

と表わされ、線形波の分散関係を満たしていることが判る。一方、長波近似( $\mu k h \rightarrow 0$ )のときには積分核 $K(x, y)$ は次のように近似される。

$$K(x, y) = \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} (\mu k h)^2 + \dots \right\} \times e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\ = \frac{A}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{3} (\mu h)^2 [(ik_x)^2 + (ik_y)^2] + \dots \right\} \times$$

$$\times e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$= A \left\{ \delta(x) \delta(y) + \frac{1}{3} (\mu h)^2 [\delta_{xx}(x) \delta(y) + \delta(x) \delta_{yy}(y)] + \dots \right\} \quad (4.5)$$

ここに,

$$\delta(x) \delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (4.6)$$

は2次元デルタ関数であり, 添字は偏微分を表わす. 式(4.6)を式(3.18)に代入すると浅海長波の式

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{3} (\mu h)^2 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (4.7.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \varepsilon \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{3} (\mu h)^2 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right) \quad (4.7.2)$$

が得られる. これらの式はPeregrine (1967)の式(2.19)において最低次の近似式

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.8)$$

を右辺に代入して得られる式と一致する. 浅海長波方程式(4.7)はBoussinesq型の方程式とはなっていないが, 式(3.18)は短周期領域で線形分散関係を満たしているので短周期波に対しても有用である.

## 5. 断面2次元でのモデル方程式

断面2次元の場合には以上の諸式で  $y$  成分を除いて議論すればよい. ここでは簡単にその結果について述べる. 水深平均された連続方程式および運動方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \varepsilon \eta) \bar{a} \} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \varepsilon \bar{a} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} (u - \bar{a})^2 dz = -\frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\varepsilon} dz \quad (5.2)$$

圧力項を評価するために次の境界値問題を考える.

$$\mu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - 1 \quad (5.5)$$

$$\mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad z = \varepsilon \eta \quad (5.6)$$

$$\mu^2 u \frac{\partial h}{\partial x} + w = 0 \quad z = -h \quad (5.7)$$

式(5.3)を満たすように速度ポテンシャルを定めると

$$\phi(x, t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cosh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk \quad (5.8.1)$$

$$A = \omega^2 / c_0^2 \quad (5.8.2)$$

となる. 式(2.11)および式(5.4), (5.5)により流速, 圧力, および水面変動量は以下の諸式で与えられる.

$$u = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \cosh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk \quad (5.9)$$

$$w = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu k e^{ikx} \sinh[\mu k(h+z)] \varphi(k, t) dk \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \cosh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{\mu A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu k e^{ikx} \sinh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk \quad (5.12)$$

$$p = -z - \frac{\mu A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cosh[\mu k(h+z)] \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk \quad (5.13)$$

$$\eta = -\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cosh \mu kh \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk \quad (5.14)$$

式(5.11)により式(5.2)の右辺の圧力項を評価すると

$$-\frac{1}{h + \varepsilon \eta} \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\varepsilon} dz \approx \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \cosh \mu kh \times \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} \frac{\tanh \mu kh}{\mu kh} dk \quad (5.15)$$

となる. ここで,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \cosh \mu kh \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t} dk \quad (5.16)$$

およびFourier変換

$$K(x) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh \mu kh}{\mu kh} e^{i k x} dk \quad (5.17)$$

の存在を仮定すると、式(5.15)の右辺は畳込みの定理により表わすことができる。したがって、式(5.2)は結局、次の微積分方程式となる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -A^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x}(x - \xi, t) K(\xi) d\xi \quad (5.18)$$

式(5.1)および(5.18)が断面2次元の場合のモデル方程式である。これらの式が一定水深の場合には短周期領域において線形分散関係を満たすことは、§4の式(4.1)–(4.4)と同様にして容易に示すことができる。長波近似のときには積分核  $K(x)$  は1次元デルタ関数

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k x} dk \quad (5.19)$$

を用いて、

$$K(x) = A \left\{ \delta(x) + \frac{1}{3} (\mu h)^2 \delta_{xx}(x) + \dots \right\} \quad (5.20)$$

と近似できる。この式を式(5.18)に代入すると浅海長

波の式

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{3} (\mu h)^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (5.21)$$

が得られ、式(5.1)および(5.18)は本質的に断面2次元の場合のPeregrine (1967)の式と一致することが判る。

## 6. 数値計算例

モデル方程式の線形分散性および長波の非線形性を検証するためには、式(2.12)および(3.18)あるいは式(5.1)および(5.18)を直接解くべきであるが、この微積分方程式の数値解法が未知である。したがって、ここでは断面2次元の場合で波が  $x$  軸の正方向にのみ進む場合を例に採り、上述のモデル方程式の有用性を示す。

移動座標を

$$X = \varepsilon x, \quad \theta = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^X h^{-1/2} dX - t, \quad h = h(X) \quad (6.1)$$

と置くと、式(5.1)および(5.18)より  $O(\varepsilon)$  まででは次式が得られる。

$$-\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \varepsilon h \frac{\partial a}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial X} \bar{u} + \varepsilon h^{-1/2} \eta \frac{\partial a}{\partial \theta} + \varepsilon h^{-1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \bar{u} + h^{1/2} \frac{\partial \bar{a}}{\partial \theta} = 0 \quad (6.2)$$

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \varepsilon h^{-1/2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + (\varepsilon A)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} + h^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \eta(X - \zeta, \theta) \cdot K(\zeta) d\zeta = 0 \quad (6.3)$$

ただし、 $\zeta = \varepsilon \xi$  である。式(6.2)、(6.3)より  $\partial \bar{u} / \partial \theta$  を消去し、さらに式(6.2)より得られる最低次近似  $\bar{u} = h^{-1/2} \eta$  を代入すると、次式が得られる。

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial X} + 3 h^{-3/2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{1}{2h} \frac{dh}{dX} \eta + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} + h^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \eta(X - \zeta, \theta) \cdot \left\{ (\varepsilon^2 A)^{-1} K(\zeta) - \varepsilon^{-1} \delta(\zeta) \right\} d\zeta = 0 \quad (6.4)$$

式(6.4)が本章での議論に用いる方程式である。式(5.20)と同様に  $K(\zeta)$  を級数展開することにより、式(6.4)は長波近似ではKdV方程式となることが容易に判る。

ここで、全ての変数を次元量で表わし、改めて基準長  $h_0$ 、時間  $\sqrt{h_0/g}$ 、および速度  $\sqrt{gh_0}$  で無次元化した変数を用いると、積分核(5.17)は

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh kh}{kh} e^{i k x} dk = -\frac{1}{\pi h} \ln \tanh \left( \frac{\pi |x|}{4h} \right) \quad (6.5)$$

となり、次の近似式が得られる(筒井, 1994)。

$$K(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi h} \ln |x| & |x| \rightarrow 0 \\ \frac{2}{\pi h} \exp \left( -\frac{\pi |x|}{2} \right) & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (6.6)$$

$K(x)$  は  $|x| \ll 1$  において対数ポテンシャルとなっている。式(6.4)は波の伝播変形には隣接する波の特性



が相互干渉することを表わしている。また、 $|x| > 4h$  のときには  $K(x) \approx 0$  である。したがって、 $|x - \xi| < 4h$  なる範囲で水深変化および波の振幅の変化が小さいと仮定すると、式(6.4)の積分項は次式で近似される。

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + h^{-1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \{K(\xi) - \delta(\xi)\} e^{-i\lambda\xi} d\xi$$

$$= \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + h^{-1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\tanh kh}{kh} - 1 \right) \quad (6.7)$$

ただし、

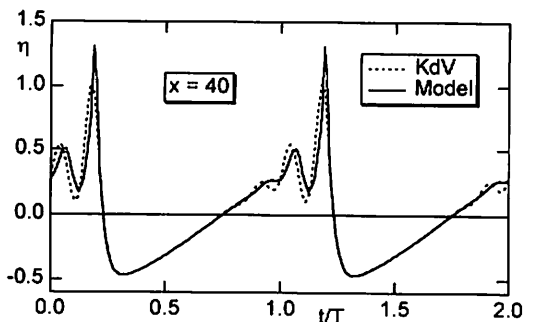
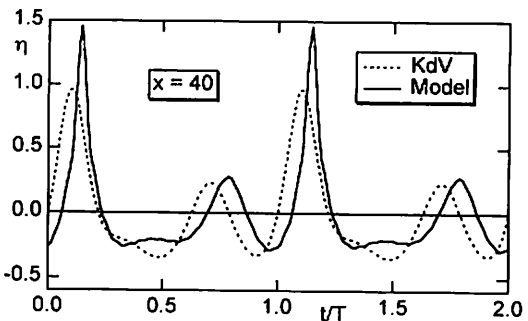
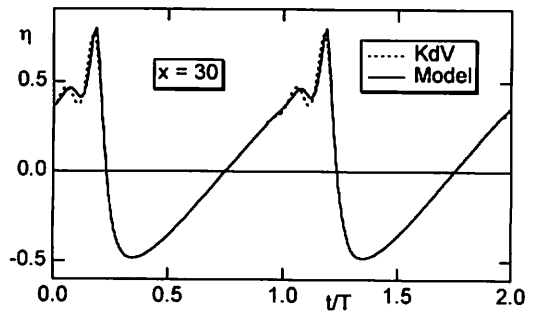
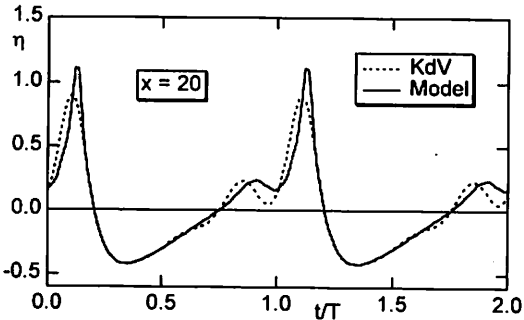
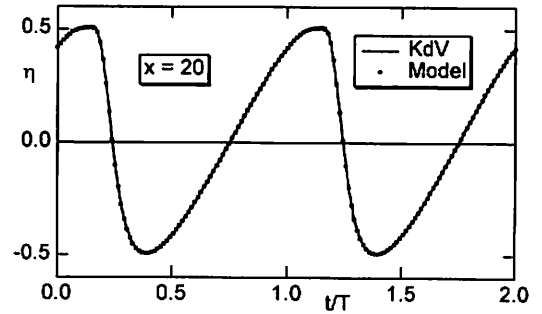
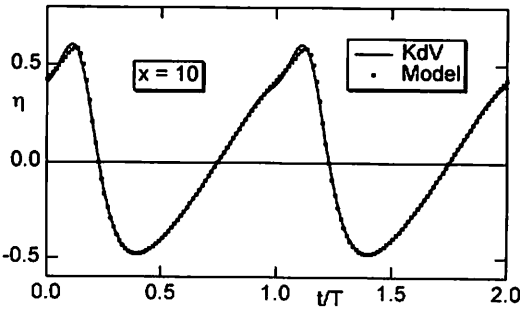
$$\theta = \int_0^x h^{-1/2} dx - t \quad (6.8)$$

である。したがって、式(6.4)から次の近似式が得られる。

$$\left( 1 + \frac{\tanh kh}{kh} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + 3h^{-3/2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \eta$$

$$- \left( 1 - \frac{\tanh kh}{kh} \right) h^{-1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.9)$$

式(6.9)をスペクトル法(Liuら, 1985)により解く。水



(1)  $H = 0.3, T = 20$

(2)  $H = 0.3, T = 40$

図-1 一定水深域での波の伝播に及ぼす分散項の影響

面変動量を次式のようにFourier級数展開する。

$$\eta(x, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x) e^{-in\omega\theta} + \text{c.c.} \quad (6.10)$$

ここに、c.c. は式(6.10)の右辺第1項の共役複素数を表わす。式(6.10)を式(6.9)に代入すると  $e^{-in\omega\theta}$  の係数から  $n$ -次成分波に対する常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\tanh kh}{kh}\right) \frac{d\eta_n}{dx} + \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \eta_n \\ & - \frac{3}{4} in\omega \left( \sum_{l=1, n>l}^n \eta_l \eta_{n-l} + 2 \sum_{l=1, n<N}^N \eta_l^* \eta_{n+l} \right) \\ & + in\omega \left(1 - \frac{\tanh kh}{kh}\right) h^{-1/2} \eta_n = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

ただし、 $n=1, 2, 3, \dots, N$  ( $N$ :成分波の総数)、上添字\*は共役複素数を表わす。式(6.11)の左辺第2項は浅水変形、第3項は非線形相互干渉、第4項は分散性を表わしている。同様に、 $e^{in\omega\theta}$  の係数からは式(6.11)と共役関係にある式が得られる。

本研究で提案したモデル方程式において分散項を表わす積分表示の特性が顕著に現れる一定水深の場合を考え、非線形項と分散項の役割について吟味する。式(6.11)はRunge-Kutta法により数値計算を行う。入射波として波高水深比  $H=0.3$ 、無次元周期  $T=20, 40$  とした場合の伝播変形とKdV方程式の結果との比較を示すと図-1となる。図中の  $x$  は座標原点からの距離、すなわち伝播距離を示している。無次元周期  $T=20$  の場合、伝播距離が長くなると式(6.11)による波形はKdV方程式の波形より位相が進んでいる。これは分散項の差異に起因するもので、短周期になるほど顕著になる。無次元周期  $T=40$  の場合、式(6.9)を導く際に用いた簡便な近似にもかかわらず、伝播に伴う波の変形はよく表わされており、モデル方程式による波の伝播特性は長波領域では従来より用いられているBoussinesq型の方程式、KdV方程式とよく一致することが判る。なお、ここでは短周期域での分散特性を改良するためモデル方程式を提案したので、短周期域では式(6.11)のような近似式でなく、連続方程式と微積分方程式で与えられる運動方程式を連立させて解く必要がある。

## 7. 結 言

波の入・反射波が共存する波動場において波の非線形性と線形分散特性を具備する微積分方程式を、流体力学の基礎方程式より誘導し、検証を行った。その結

果を要約すると以下ようになる。

- (1) このモデル方程式は長周期の場合にはBoussinesq型の方程式に相当し、かつ短周期域では線形の分散関係を満たしている。
- (2) 分散項は局所波速のFourier変換を核とする積分表示として表わされる。
- (3) 断面2次元の場合の積分核、すなわち局所波速のFourier変換は存在するが、3次元の場合のFourier変換の存在は不詳である。
- (4) 断面2次元の場合に対して導かれたKdV方程式に相当する近似方程式に基づき一定水深での波の伝播についてモデル計算を行い、KdV方程式によるものと比較した結果、提案したモデル方程式の妥当性が確認された。

今後の問題点として、3次元の場合の積分核を求めること、および微積分方程式の効率的な数値解法の開発が挙げられる。

## 参考文献

- 磯部雅彦(1993): 有理近似による非定常緩勾配不規則波動方程式, 第40回海岸工学論文集, JSCE, pp.26-30.
- 磯部雅彦(1994): 非線形緩勾配方程式の提案, 第41回海岸工学論文集, JSCE, pp.1-5.
- 窪泰浩・小竹康夫・磯辺雅彦・渡部晃(1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 第38回海岸工学論文集, JSCE, pp.46-50.
- 筒井茂明・Don P. Lewis・長崎雅哉(1990): サンゴ礁海岸における波高分布推算法, 海岸工学論文集, 第37巻, JSCE, pp. 31-35.
- 筒井茂明(1991): リーフ海岸における波浪推算モデル, 琉球大学工学部紀要, 第42号, pp.35-43.
- 筒井茂明(1993): 海岸環境と波浪変形予測, くろしお, 高知大学黒潮圏研究所所報, No.8, pp.4-11.
- 筒井茂明(1994): 線形分散と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式, 琉球大学工学部紀要, 第48号, pp.41-50.
- 間瀬盛・James T. Kirby・栗林賢一(1991): 不規則波浪の浅水変形モデル, 第38回海岸工学論文集, JSCE, pp.51-55.
- 安田孝志・田中光宏・鶴飼亮行・土屋義人(1988): 現地波浪の波群の空間変化とそのモデル方程式による記述, 第35回海岸工学講演会論文集, JSCE, pp.93-97.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refrac-

- tion and diffraction, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., pp.471-490.
- Benjamin, T. B. (1967): Internal waves of permanent form in fluids of great depth., *Jour. Fluid Mech.*, Vol.29, pp.559-592.
- Benjamin, T. B., J. L. Bona and J. J. Mahony (1972): Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, Vol.A272, pp.47-78.
- Chester, W. (1968): Resonant oscillations of water waves. I. Theory, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A.306, pp.5-12.
- Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwang (1984): Wave diffraction due to areas of energy dissipation, *Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, ASCE, Vol.110, pp.67-79.
- Kirby, J. T. (1986): A general equation for waves over rippled beds, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.162, pp.171-186.
- Lewis, D. P., S. Tsutsui, M. Morison and J. Imberger (1989): Esperance Harbour Ship Motion Study, Final Report, Vol.I, Center for Water Research, University of Western Australia, Report No.WP-297-DL, pp.128.
- Liu, Philip L.-F., Yoon, Sung B. and Kirby, J. T. (1985): Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.153, p.185-201.
- Miles, J. W. (1981): The Korteweg-de Vries equation: a historical essay, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.106, pp.131-147.
- Ono, H. (1975): Algebraic solitary waves in stratified fluids, *Jour. Phys. Soc. Japan*, Vol.39, pp.1082-1091.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.27, pp.815-827.
- Roseau, M. (1976): *Asymptotic Wave Theory*, Elsevier, pp.349.
- Seliger, R. L. (1968): A note on the breaking of waves, *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, Vol.A.303, pp.493-496.
- Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1992): Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, *Coastal Eng. in Japan, JSCE*, Vol.34, pp.145-158.
- Whitham, G. B. (1967): Variational method and application to water waves, *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, Vol.A.299, pp.6-25.
-