

琉球大学学術リポジトリ

沿岸開領域における非線形波動解析のための新しい無限要素

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Infinite element, Finite element method, Unbounded wave problems, Nonlinear waves, Mapping 作成者: 筒井, 茂明, Tsutsui, Shigeaki メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/2219

沿岸開領域における非線形波動解析のための 新しい無限要素

筒井 茂明*

New Infinite Element for Nonlinear Wave Analyses in Unbounded Coastal Domains

Shigeaki TSUTSUI*

Abstract

For wave height prediction in unbounded coastal domains, the treatment of the boundary condition at the infinity, i.e., the Sommerfeld radiation condition, is the most significant. The finite element method (FEM), as a numerical simulation method, can handle the radiation condition skillfully in terms of the infinite element. The representative infinite element presented by Zienkiewicz *et al.* (1985), however, has some inconvenient features, such as singularity in the element integrals due to the characteristics of mapping and difficulty in connecting the infinite element to any interior element in the region to be analyzed. It is therefore required to remove these fatal properties for extension of FEM to the nonlinear unbounded wave problems. The present paper develops a new infinite element based on an idea for the infinite mapping, proposed recently by introducing the complementary element. Numerical experiments for three kinds of models indicate efficiency of the new infinite element.

Key Words: Infinite element, Finite element method, Unbounded wave problems, Nonlinear waves, Mapping.

1. 緒言

開領域での波動場解析のために種々のモデル方程式 (Liuら, 1985; 後野, 1993; 磯部, 1994; 灘岡ら, 1994; 喜岡・柏原, 1995; 筒井・大木, 1998; Tsutsuiら, 1998) が提案されているが, 適用に際しては無限遠での境界条件の処理が重要である。ただし, 遠方場における散乱波の減衰モードは判っており, この特性が利用される。

ここでは有限要素法 (FEM) による波動場の解析を考える。この方法では通常, 解析対象海域の外方に仮想境界を設定し, 外部海域での水深は一定と仮定される。その上で, (1) 内部領域の波をFEM, 外部領域の波を他の方法で定式化し, 両者を仮想境界上で接続するハイブリッド法, (2) 領域全体をFEMで統一的に取り扱う方法などが用いられる。

前者の1つである境界解を用いる方法 (HFEM) (Chen & Mei, 1975) は簡便で効率的な計算法であるが, 得られる連立方程式の係数行列の対角成分に, 遠方場での波を構成する高次のハンケル関数が位置し, 行列に特異性が現れる。す

なわち, 境界解をハンケル関数によるFourier級数で表すため, その係数が未知係数となることが特異性の発生原因である。線形問題の場合には, 未知係数を消去するための逆行列を直接求めることができるので, この特異性を避けることができる (Tsutsui, 1990)。

一方, 沿岸での非線形な波浪変形を記述するためのモデル方程式に対するFEMによる離散化式は, 各Fourierモードごとにブロック化された非線形連立方程式であり, 疎で非対称な複素係数行列を持っている (筒井・大木, 1998)。したがって, HFEMのもつ上述の特異性は, 有限要素解析の非線形波動への拡張に際しては, 煩雑さと困難をもたらすであろう。さらに, HFEMは変分法に基づくため, 非線形なモデル方程式の汎関数を求めることも容易ではない。これらを考え合わせて, 本研究では後者の方法, すなわち, 有限要素解析により波動場を統一的に取り扱うこととし, その手法として無限要素を採用する。

代表的な無限要素 (Bettesら, 1984; Zienkiewiczら, 1985) は, 空間座標と物理変数に対して同じ形状関数を用いるアイソパラメトリック写像であるため, 無限写像の特性として, 要素積分の被積分関数に特異性が現れ, 数値計算に工夫を要する。また, 散乱波の減衰特性をより厳密に満たすため, 無限要素に対する散乱中心を移動し, 再設定する必要がある。

受理: 1999年6月7日

* 琉球大学工学部環境建設工学科

Dept. of Civil Engineering and Architecture, Faculty of Engrg.

ある。これらの特性は数値処理上から判断して好ましくなく、早急に解決することが望まれる。

また、従来の無限要素では9節点の四辺形2次要素を用いるため、外部領域を仮想境界に接する領域とその外側領域とに再分割する必要がある。さらに、この要素形状は内部領域における要素生成に対する制約となり、任意形状の要素との結合に困難を伴う。しかし、無限要素が設定される領域では、一般的に、水深を一定と仮定した線形モデル、すなわち、Helmholtz方程式による解析が可能である。したがって、線形要素による有限要素解析で十分であろうと考えられるので、ここでは線形な無限要素について述べる。

本研究では、新たな無限要素の開発に当たり、(1)要素積分の被積分関数中の特異性の除去、(2)仮想境界を構成する内部要素との簡便な結合に主眼に置く。その上で、写像に関する新しい考え(菊池・岡部, 1986)に基づきHelmholtz方程式に対する無限要素を開発・提案し、数値計算例によりその有用性を示す。

2. 非線形波動方程式に対する無限要素を用いた弱形式

解析対象海域を、図-1のように、仮想境界 Γ_1 により領域 Ω_1 および Ω_2 に分割する。内部領域 Ω_1 での水深は変化し、そこには海岸線や構造物などの境界 Γ_B あるいは水深不連続部 Γ_D が存在する。外部領域 Ω_2 での水深は一定と仮定し、無限要素はこの外部領域に適用される。

本章における全ての物理量は、代表水深 h_0^* および重力加速度 g により定められる基準長: h_0^* 、時間: $\sqrt{h_0^*/g}$ 、速度: $\sqrt{gh_0^*}$ による無次元量である。静水面に座標原点を置き、水平方向に (x, y) -軸、鉛直上方に z -軸を採る。 (ζ, η) : 領域 Ω_1, Ω_2 での水面変動量、 η^G : 入射波および反射波などの幾何光学的な波、 η^S : 散乱波、 c : 波速、 c_g : 群速度、 ω : 周波数、 k : 波数、 h : 水深とする。支配方程式および境界条件は次の通りである。

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \zeta_n) + \omega^2 (c_g/c) \zeta_n = Q \quad \text{領域 } \Omega_1 \text{ 内} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \eta^S) + \omega^2 (c_g/c) \eta^S = 0 \quad \text{領域 } \Omega_2 \text{ 内} \quad (2)$$

$$n_1 \cdot \nabla \zeta_n + n_2 \cdot \nabla (\eta^G + \eta^S) = 0 \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3.1)$$

$$\zeta_n = \eta^G + \eta^S \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3.2)$$

$$n_B \cdot \nabla \zeta_n = B \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_B \text{ 上} \quad (4)$$

$$\left[cc_g n_D \cdot \nabla \zeta_n \right]_{\xi_0^+}^{\xi_0^-} = D \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_D \text{ 上} \quad (5)$$

$$\text{無限遠でのSommerfeldの放射条件} \quad (6)$$

ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

$$B = \frac{\omega}{c} \left(-i \frac{1-R}{1+R} \sin \beta_B + \frac{\tanh kh}{1 + \cosh kh} \frac{\partial h}{\partial n_B} \right) \quad (7.1)$$

$$D = \gamma h_s (h_d - h_s) \left| \frac{(kh_0^*)^2}{\cosh^2 kh} \right|_{\xi_0} \quad (7.2)$$

であり、 (n_1, n_2) , n_B , n_D はそれぞれ境界 $\Gamma_1, \Gamma_B, \Gamma_D$ での外向き法線を表す。

式(1)は n 次のFourier成分波に対する非線形波動方程式で

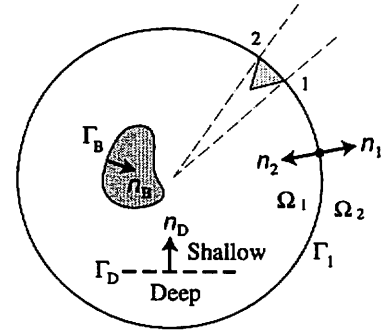


図-1 解析対象海域と定義

ある(筒井・大木, 1998; Tsutsuiら, 1998)。同式の左辺は緩勾配方程式、右辺の Q は高次成分波を含む非線形項を表す。式(2)は一定水深のときにはHelmholtz方程式となる。反射境界条件:(4), (7.1) (Tsutsui & Lewis, 1992)においては、 R : 境界での波の反射率、 β_B : 境界への波の入射角、 i : 虚数単位である。水深不連続部での境界条件:(5), (7.2)は、水深の深い側(h_d)より浅い側(h_s)へ波が伝播すると仮定して適用する(Tsutsui & Zamami, 1993)のもので、 ξ_0 : 水深不連続部の位置、 γ : 無次元係数である。なお、式(1)-(7)においては、 Q を除く波動量は全て n 次成分波に対するものであるが、 ζ_n 以外の添字 n は省略されている。

式(1), (2), (3.1), (4), (5)に対する弱形式は、任意関数 v_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)を用いると、以下のように定められる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} v_1 \left\{ \nabla \cdot (cc_g \nabla \zeta_n) + \omega^2 (c_g/c) \zeta_n - Q \right\} d\Omega_1 \\ & + \iint_{\Omega_2} v_2 \left\{ \nabla \cdot (cc_g \nabla \eta^S) + \omega^2 (c_g/c) \eta^S \right\} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Gamma_1} v_3 \left\{ n_1 \cdot \nabla \zeta_n + n_2 \cdot \nabla (\eta^G + \eta^S) \right\} ds \\ & + \int_{\Gamma_B} v_4 \left\{ n_B \cdot \nabla \zeta_n - B \zeta_n \right\} ds \\ & + \int_{\Gamma_D} v_5 \left\{ \left[cc_g n_D \cdot \nabla \zeta_n \right]_{\xi_0^+}^{\xi_0^-} - D \zeta_n \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、部分積分により得られる関係式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} v_1 \left\{ \nabla \cdot (cc_g \nabla \zeta_n) + \omega^2 (c_g/c) \zeta_n \right\} d\Omega_1 \\ & = - \iint_{\Omega_1} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta_n - v_1 \omega^2 (c_g/c) \zeta_n \right\} d\Omega_1 \\ & + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_B + \Gamma_D} v_1 cc_g (n_1 \cdot \nabla \zeta_n) ds \end{aligned} \quad (9)$$

および

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_2} v_2 \left\{ \nabla \cdot (cc_g \nabla \eta^s) + \omega^2 (c_g / c) \eta^s \right\} d\Omega_2 \\ &= - \iint_{\Omega_2} \left\{ cc_g \nabla v_2 \cdot \nabla \eta^s - v_2 \omega^2 (c_g / c) \eta^s \right\} d\Omega_2 \\ &+ \int_{\Gamma_1} v_2 cc_g (\mathbf{n}_2 \cdot \nabla \eta^s) ds \end{aligned} \quad (10)$$

を用いると、式(8)は次のように変形される。

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega_1} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta_n - v_1 \omega^2 (c_g / c) \zeta_n + Q \right\} d\Omega_1 \\ & - \iint_{\Omega_2} \left\{ cc_g \nabla v_2 \cdot \nabla \eta^s - v_2 \omega^2 (c_g / c) \eta^s \right\} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Gamma_B} \left\{ v_1 cc_g (\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \zeta_n) + v_4 (\mathbf{n}_B \cdot \nabla \zeta_n - B \zeta_n) \right\} ds \\ & + \int_{\Gamma_D} \left\{ v_1 cc_g (\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \zeta_n) + v_5 \left([cc_g \mathbf{n}_D \cdot \nabla \zeta_n]_{\xi_0^+}^{\xi_0^-} - D \zeta_n \right) \right\} ds \\ & + \int_{\Gamma_1} v_1 cc_g (\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \zeta_n) ds + \int_{\Gamma_1} v_2 cc_g (\mathbf{n}_2 \cdot \nabla \eta^s) ds \\ & + \int_{\Gamma_1} v_3 \left\{ \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \zeta_n + \mathbf{n}_2 \cdot \nabla (\eta^G + \eta^s) \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

さらに、境界 $\Gamma_1, \Gamma_B, \Gamma_D$ 上での $\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \zeta_n$ および $\mathbf{n}_2 \cdot \nabla \eta^s$ を消去するため

$$v_2 = v_1, \quad v_3 = v_4 = -cc_g v_1, \quad v_5 = -v_1 \quad (12)$$

と置くと、弱形式は結局次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta_n - v_1 \omega^2 (c_g / c) \zeta_n + Q \right\} d\Omega_1 \\ & + \iint_{\Omega_2} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \eta^s - v_1 \omega^2 (c_g / c) \eta^s \right\} d\Omega_2 \\ & - \int_{\Gamma_B} v_1 cc_g B \zeta_n ds - \int_{\Gamma_D} v_1 D \zeta_n ds \\ & = \int_{\Gamma_1} v_1 cc_g \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \eta^G ds \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)の右辺は既知量であるから、境界 Γ_1 における外力として作用する。式(13)の各項を離散化して得られる要素行列をそれぞれ $\{K\}, \{K^*\}, \{K_B\}, \{K_D\}, \{q\}$ とすると、次の

連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_1} \{K\} \{\zeta_n\} + \sum_{\Omega_2} \{K^*\} \{\eta^s\} \\ & - \sum_{\Gamma_B} \{K_B\} \{\zeta_n\} - \sum_{\Gamma_D} \{K_D\} \{\zeta_n\} = \sum_{\Gamma_1} \{q\} \end{aligned} \quad (14)$$

行列 $\{K\}$ は線形問題では対称であるが、非線形問題では非対角ブロックが非対称となり(筒井・大木, 1998), 取り扱いの困難が急増する。

残された境界条件(3.2)および(6)は以下のように取り扱われる。まず、無限遠での境界条件(6)は、外部領域 Ω_2 での無限要素による定式化の際に、近似的ではあるが自動的に満たされる。次に、支配方程式(2)は外部領域 Ω_2 における散乱波のみに対するものであるから、式(14)においては境界 Γ_1 上での波動量が不連続となっている。そこで境界条件(3.2)を満たすため、次のような処理が必要である。無限要素の要素行列 $\{K^*\}$ および境界 Γ_1 上の節点における幾何光学的な波 $\{\eta^G\}$ より $\{K^*\} \{\eta^G\}$ なる量を求め、式(14)の両辺の対応する節点に付加すると、式(14)は次式となる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_1} \{K\} \{\zeta_n\} + \sum_{\Omega_2} \{K^*\} \{\eta^G + \eta^s\} \\ & - \sum_{\Gamma_B} \{K_B\} \{\zeta_n\} - \sum_{\Gamma_D} \{K_D\} \{\zeta_n\} \\ & = \sum_{\Gamma_1} \{q\} + \sum_{\Omega_2} \{K^*\} \{\eta^G\} \end{aligned} \quad (15)$$

したがって、境界 Γ_1 上では全体の波動量 $\zeta_n = \eta^G + \eta^s$ が未知量となり、境界条件(3.2)が満たされる。

付録A-Dには、線形問題に対する要素行列： $\{K\}, \{K_B\}, \{K_D\}, \{q\}$ が示されている。

3. 可積分型無限要素

ここでは、菊池・岡部(1986)による写像に関する考えに基づきHelmholtz方程式に対する無限要素を導く。その概要は図-2に示す通りである。まず、無限要素に対する補要素を定義し、対応する正規 (ξ^*, η^*) 系を定め、この系を用いて無限要素を表示する。一方、無限要素に対する正規 (ξ, η) 系を定める。ここで、所要の減衰モードが再現可能なように、両正規化写像系の変換式を定める。波動問題においては、さらに、散乱波の振動特性を持つように物理変数に対する形状関数を補正する。

Zienkiewiczら(1985)の無限要素はアイソパラメトリックであるが、本手法で得られる無限要素では、補要素を媒介とした空間座標と物理変数に対して異なる2つの正規化写像系

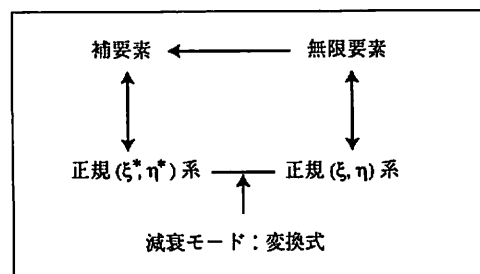


図-2 無限要素展開の概要

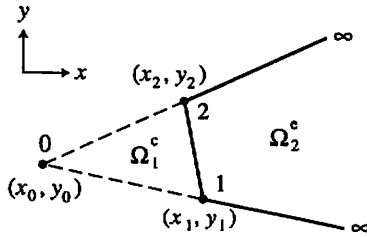


図-3 無限要素とその補要素

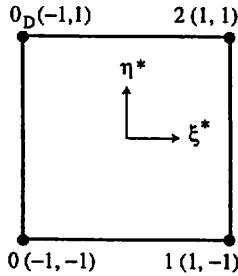


図-4 正規(ξ^* , η^*)系

を導入する点に特徴がある。

図-3に示すように2領域 Ω_1, Ω_2 の境界 Γ_1 上における内部要素の2節点を1, 2とすると, 無限要素 Ω_2^c はこの有限辺と放射状の直線とで構成される。放射状の2直線の交点を中心点0と呼び, 三角形012を無限要素に対する補要素 Ω_1^c と定義する。中心点 (x_0, y_0) からの距離を r とし, ある物理変数 ϕ が外方で r^{-m} の形で減衰することが判っているものとする。ただし, m は正の実数である。なお, 一定水深域における波動問題では, Helmholtz方程式の基本解である0次のハンケル関数の漸近展開の主要項から, $m=1/2$ となる。

図-4に示す正規(ξ^*, η^*)系における四辺形1次要素に対する形状関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{4}(1-\xi^*)(1-\eta^*) \\ N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi^*)(1-\eta^*) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi^*)(1+\eta^*) \\ N_{0D} &= \frac{1}{4}(1-\xi^*)(1+\eta^*) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

上式において, 辺 $\xi^* = -1$ 上の節点 0_D を補要素 Ω_1^c の頂点0に対応するように縮退させると, 補要素 Ω_1^c に対する正規系は次式で表される。

$$x = \sum_{i=0}^2 x_i M_i, \quad y = \sum_{i=0}^2 y_i M_i \quad (17)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= N_0 + N_{0D} = \frac{1}{2}(1-\xi^*) \\ M_1 &= N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi^*)(1-\eta^*) \\ M_2 &= N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi^*)(1+\eta^*) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。さらに, $M_0 + M_1 + M_2 = 1$ であるから, 式(17)は次式

のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \sum_{i=1}^2 (x_i - x_0) M_i \\ y - y_0 &= \sum_{i=1}^2 (y_i - y_0) M_i \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

辺01上($\eta^* = -1$)では $M_2 = 0$, 辺02上($\eta^* = 1$)では $M_1 = 0$ であるから, 辺01, 02上における中心点からの距離は

$$\frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}(1 + \xi^*), \quad r_i = \left((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

で表される。ただし, $r_i (i=1, 2)$ は中心点0と節点1および2間の距離である。

ここで, 無次元半径として

$$\rho \equiv \frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}(1 + \xi^*) \quad (21)$$

を定義すると, 無次元半径 ρ の性質が距離 r の性質に近いときには, 無限要素が持つべき r^{-m} なる特性を ρ^{-m} モードで代用させることができる。ただし, 中心点 $\xi^* = -1$ では $\rho = 0$, 辺 $\xi^* = 1$ では $\rho = 1$ となっている。

正規(ξ^*, η^*)系を拡張して $\xi^* \geq 1$ へ適用することとすれば, 無限遠点は $\xi^* \rightarrow \infty$ に対応し, 写像(18), (19)においては無限要素は $\xi^* = [1, \infty)$, $\eta^* = [-1, 1]$ で規定されている。したがって, 正規 $[-1, 1]$ 系へと変換する必要がある。

図-5に示す正規(ξ, η)系を導入し, 無限要素をこの系に正規化できるものと仮定する。物理変数 ϕ を考えると, 無限遠に相当する $\xi = 1$ では $\phi_3 = \phi_4 = 0$ であるから, 試行関数 ϕ^h は次式で表される。

$$\phi^h = \phi_1 N_1(\xi, \eta) + \phi_2 N_2(\xi, \eta) \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式(22)および(23)において, η のいかんに関わらず試行関数 ϕ^h が ρ^{-m} のモードを再現可能な条件は次式で与えられる。

$$N_1 + N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi) = \rho^{-m} \quad (24)$$

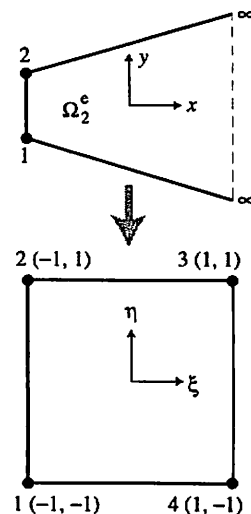


図-5 無限要素の正規(ξ, η)系への写像

無次元半径は、辺 $\xi = -1$ で $\rho = 1$ となり、正規 (ξ^*, η^*) 系の辺 $\xi^* = 1$ と C_0 連続となっている。 $\xi = 1$ は $\rho = \infty$ に対応する。

式(21)および(24)より ρ を消去すると、 ξ^* と ξ を結ぶ次の関係式が得られる。

$$\frac{1 + \xi^*}{2} = \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \quad (25)$$

さらに、補要素 Ω_i^* とこの正規系が $\xi = -1$ で η^* および η についても C_0 連続となるためには、次の条件式が必要である。

$$\eta^* = \eta \quad (26)$$

式(25)および(26)が (ξ^*, η^*) 系から (ξ, η) 系への変換式である。両式を式(18)に代入すると、空間座標に対する無限写像の形状関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1 - \eta}{2} \\ M_2 &= \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1 + \eta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

無限写像(19), (27)によると、中心点からの距離は

$$r = f(\eta) \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \quad (28.1)$$

$$\begin{aligned} [f(\eta)]^2 &= \left\{ (x_1 - x_0) \frac{1 - \eta}{2} + (x_2 - x_0) \frac{1 + \eta}{2} \right\}^2 \\ &+ \left\{ (y_1 - y_0) \frac{1 - \eta}{2} + (y_2 - y_0) \frac{1 + \eta}{2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (28.2)$$

となり、次式が得られる。

$$\frac{1 - \xi}{2} = \left\{ \frac{r}{f(\eta)} \right\}^{-m} \quad (29)$$

ただし、 $f(\eta)$ は中心点から補要素の辺12上の1点までの距離である。したがって、無限写像(19), (27)の下で中心点から出る放射線上では、形状関数 N_1, N_2 および試行関数 ϕ^h には確かに r^{-m} モードが含まれている。

以上は単調に減衰する現象に対する議論であるが、波動問題においては、時間項を $\exp(i\omega t)$ (t : 時間)と仮定すると、散乱波は $\exp\{-i(kr - \omega t)\}$ に比例する振動特性をもっている。したがって、形状関数(23)には $\exp(-ikr)$ なる項を含める必要がある。 A を未知係数とすると、形状関数 N_1 は次式の型とならねばならない。

$$N_1 = \frac{A}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \exp\left\{-ikf(\eta) \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right\} \quad (30)$$

仮想境界 Γ_1 上、すなわち、 $\xi = -1$ においては内外の波の位相差はゼロとなるべきである。さらに、節点1, 2が半径 r_0 の円弧上にあり、要素長が十分小さいときには、 $f(\eta) \cong \text{const.} \equiv r_0$ と近似することができる。したがって、これら2条件を考慮すると $A = \exp(ikr_0)$ となり、形状関数 N_1 は次式で与えられる。

$$N_1 = \frac{A}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \exp\left\{-ikr_0 \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right\} \quad (31.1)$$

同様に、形状関数 N_2 は次式となる。

$$N_2 = \frac{A}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \exp\left\{-ikr_0 \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right\} \quad (31.2)$$

無限要素は無限写像(19), (27)および要素形状関数(31)で構成される。この要素の特徴は無無限写像に由来する。すなわち、変数変換のヤコビアンは

$$|J| = \frac{A}{2m} \left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-1 - \frac{1}{m}} \quad (32)$$

で与えられ、 η に無関係となる。その結果、要素積分の被積分関数には弱い特異性が生じるものの、積分を解析的に実行することができ、要素行列が陽に表示される。

この無限要素に基づき、式(13)の左辺第2項を離散化して得られる要素行列が付録Eに示されている。

4. 数値計算例

ここでは、まず、一定水深域での円柱による波の散乱および長方形港湾の来襲波に対する周波数応答を例に採り、新しい無限要素の適用性を検討する。次に、海底に水深不連続部がある場合の例として、湾口の沖側に潜堤が設置された人工港湾を対象とし、港内静穏度の推算を行う。用いる支配方程式は緩勾配方程式であり、有限要素網は3角形の線形要素を用いる。なお、ここで提案した無限要素に基づく有限要素法を、以下ではIFEMと呼ぶ。

(1) 円柱による波の散乱

図-6は自動要素網生成ルーチン (Tsutsui, 1990) により作成された円柱の周りの三角形有限要素網を例示する。内部領域における節点数は404、要素数は687である。外部領域における無限要素は、それぞれ、仮想境界 Γ_1 上の辺と中心点より出る2放射線により構成されるので、無限要素の生成は内部要素の形状には左右されない。したがって、仮想境界 Γ_1 上において内外の要素は容易に結合でき、全領

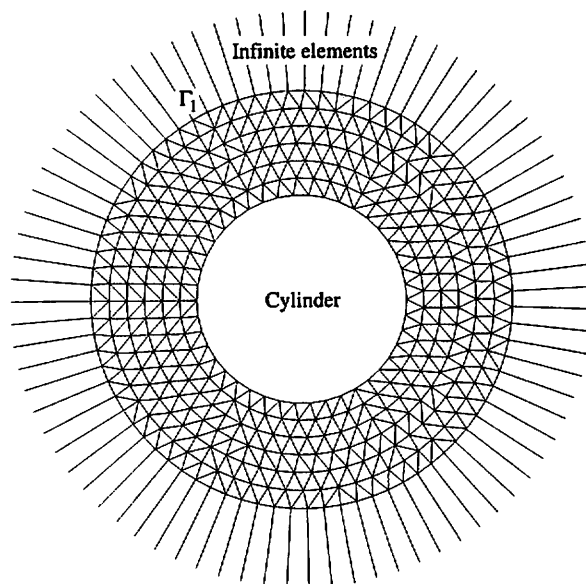
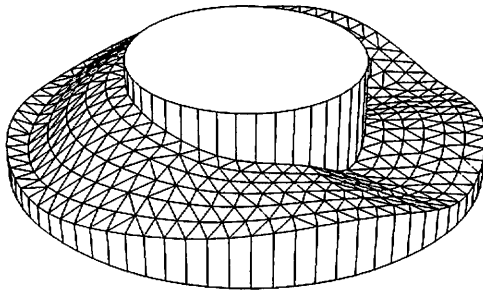
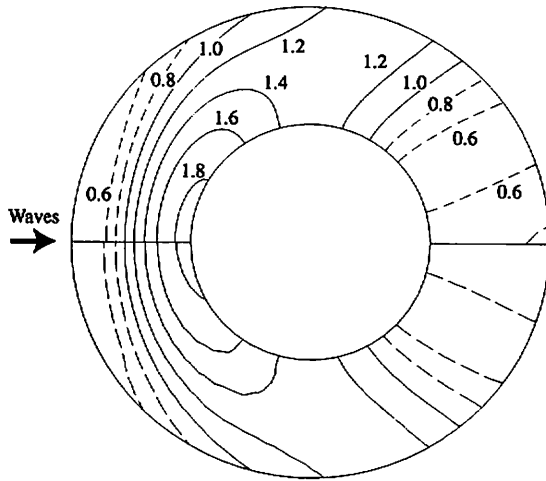


図-6 円柱の周りの有限要素網



(1) 円柱の周りの水面変動



(2) 円柱の周りの等波高線

図-7 円柱による波の散乱： $kh = ka = 2, kr_0 = 4$

域の有限要素網が生成される。

図-7 (1)は、一定水深域に設置された円柱により波が散乱される様子を、IFEMを用いて推算した結果を示す。計算条件は、 $kh = ka = 2$ (a : 円柱の半径), $kr_0 = 4$ である。円柱表面は完全反射壁と仮定し、波は紙面の左側より入射している。波の回折により円柱の背後に波が進入する様子が判る。このような円柱の周りの波は、入射波高を1とすると、次式 (田中, 1956) で表される。

$$\zeta = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos n\theta - \frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)} H_0(kr) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} H_n(kr) \cos n\theta \quad (33)$$

ただし、 J_n : ベッセル関数, H_n : 第2種ハンケル関数, (r, θ) : 極座標, (\prime) : 主変数に関する微分を表す。

図-7 (2)は円柱の周りの等波高線を示し、上半円が理論解(33), 下半円がIFEMによる数値解析結果である。図中の数値は入射波高に対する波高比 K を表す。円柱の背後に見られるように、局所的にはわずかな差異が認められるが、両者は全体として良好な一致を示している。

その詳細を見るため、図-8は円柱沿いおよび外方の仮想境界円 Γ_1 上での水面変動量の実部および虚部の比較を示す。縦軸は入射波高に対する相対値 K , 横軸は偏角である。実線は理論解を示す。○および+印は、同じ有限要素

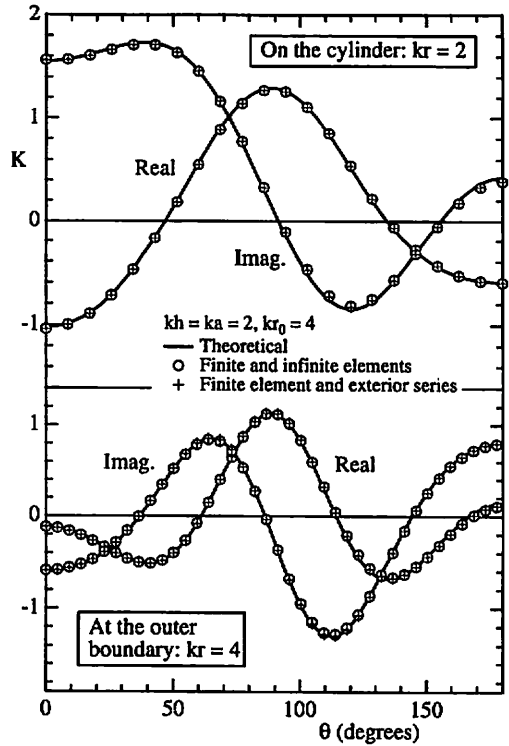


図-8 円柱沿いおよび仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部： $kh = ka = 2, kr_0 = 4$

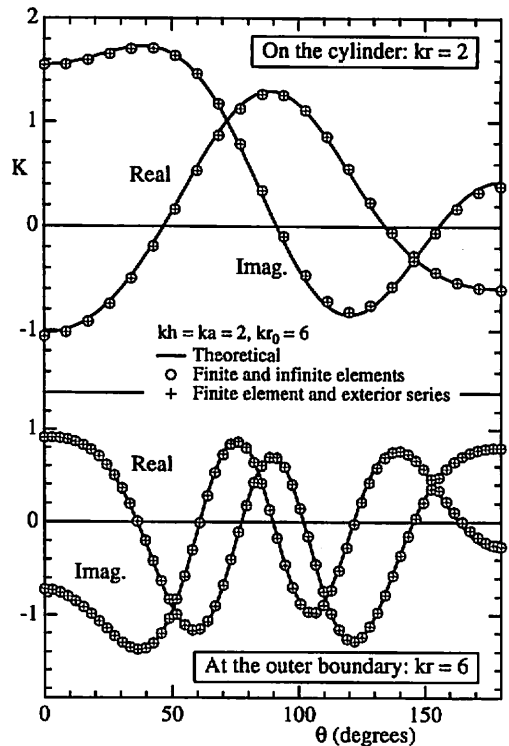


図-9 円柱沿いおよび仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部： $kh = ka = 2, kr_0 = 6$

網に対して、それぞれIFEMおよびハイブリッド型のHFEM (Chen & Mei, 1975) を適用して推算した結果である。計算結果は、理論解と比較すると、 $\theta > 160^\circ$ において最大3-4%程度過小評価となっている。この影響が図-7 (2)の円柱背

後の等波高線のわずかな差異として現れている。しかし、本推算結果は十分な精度を有し、HFEM による結果との差異は1%以下である。

ここで、仮想境界円 Γ_1 の設定位置が推算精度に及ぼす影響について調べる。図-8と同様に $kh=ka=2$ であるが、計算領域を $kr_0=6$ と広げた場合、円柱沿いおよび仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部は図-9に示すように変化する。ただし、要素サイズは図-7, 8と同じである。円柱沿いの波高分布は $kr_0=4$ の場合と同様の結果が得られている。一方、仮想境界円上での波高の推算精度は、解析領域が広く採られているので、若干向上している。しかし、一般的な誤差の程度は $kr_0=4$ の場合とほぼ同じである。

Helmholtz方程式に対するグリーン関数である0次のハンケル関数は、主変数が $|z| \gg 1$ のとき、漸近展開の初項を用いて次式で近似される。

$$H_0(z) \approx \exp\{\pm i(z - \pi/4)\} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \quad (34)$$

ただし、複合(\pm)はそれぞれ第1, 2種のハンケル関数に対応する。図-10は式(34)による近似誤差の変化を示す。主変数 $z \geq 4$ のとき、絶対誤差は約0.13%, 相対誤差は0.4%程度である。また、 $z=2$ のときの両誤差は1%程度である。

この近似誤差特性および図-7-9の結果から判断して、本計算例では仮想境界円の設定位置として、 $z \geq 2-4$ とすれば十分であると考えられる。ただし、一般的な場合には散乱源が固定されないので、仮想境界円の設定位置については検討を要する。

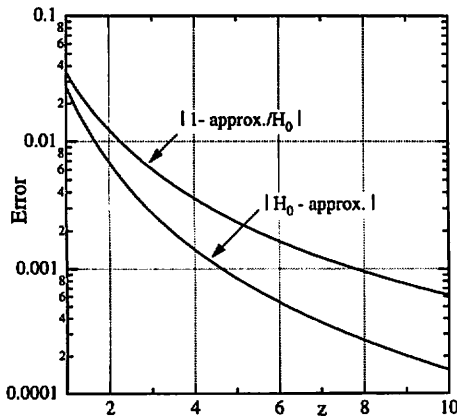
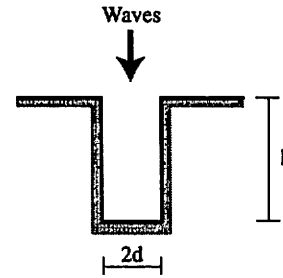


図-10 0次のハンケル関数に対する近似誤差

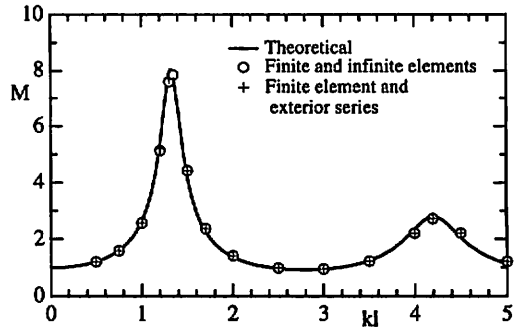
(2) 長方形港湾の周波数応答

図-11 (1) に示すように、湾口に防波堤が無い長方形港湾に対して、波が海岸線に垂直な方向から襲撃する場合の港内での強制振動について考える。モデルはIppen & Gode (1963)により実験に用いられたもので、その諸元は、長さ: $l=31.13$ cm, 幅: $2d=6.05$ cm, 水深: $h=25.73$ cmである。また、全ての境界は完全反射壁とする。

図-11 (2) は種々の周期をもつ来襲波に対する周波数応答の推算結果の比較を示す。横軸は港湾の相対長 kl , 縦軸は港内の最奥の隅での重複波の波高と港外での重複波の波高との比として定義される波高増幅率 M である。図中の実線はIppen & Gode (1963)による理論曲線を示し、他の記号



(1) 防波堤の無い長方形港湾



(2) 周波数応答曲線

図-11 防波堤の無い長方形港湾とその周波数応答

は図-8と同じである。全ての周期について、IFEMによる数値解析結果と理論値との整合性は良好であり、推算精度はこの場合もHFEMとほぼ同じである。

(3) 沖側潜堤をもつ人工港湾

ここでは、海底に水深不連続部が存在する場合の例として、図-12に示すような人工港湾での港内静穏度について述べる。海域の水深は港内・外ともに $h_0=20$ mであるが、湾口部の沖側100mの海底には破線で示すように直線状の潜

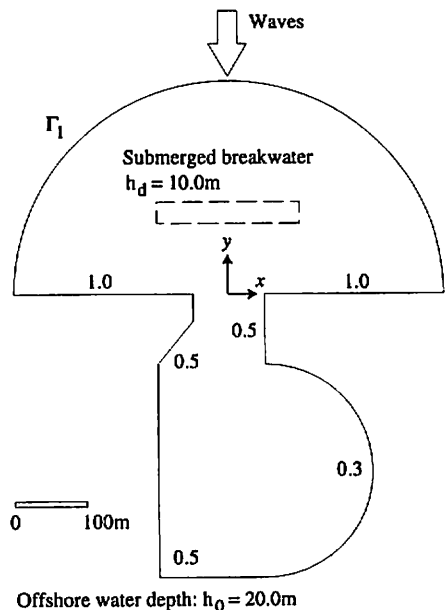
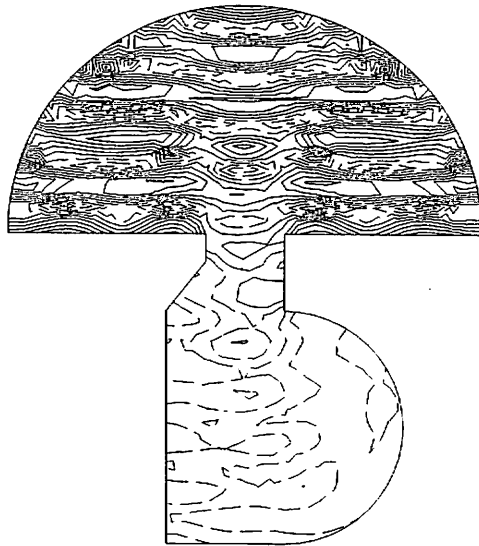
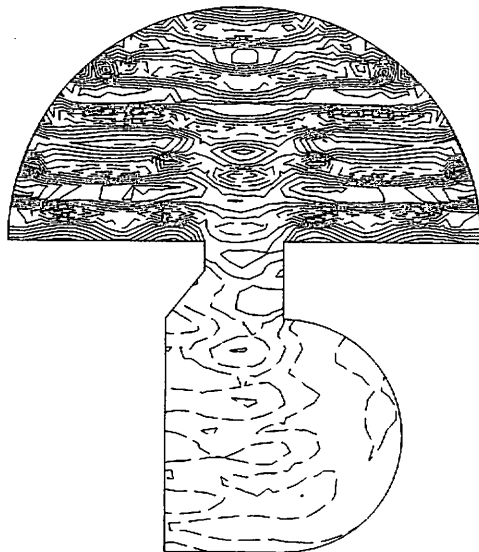


図-12 湾口部の沖側に潜堤が設置された人工港湾



(1) 無限要素を用いる IFEM



(2) 境界解を用いる HFEM

図-13 湾口部の沖側に潜堤が設置された人工港湾での波高分布： $T = 10.0 \text{ sec}$, $kr_0 = 15.56$

堤が設置されている。潜堤上の水深は $h_d = 10\text{m}$ であり、潜堤に沿って水深が不連続になっている。波の反射率は、前面護岸では完全反射 ($R = 1.0$) とし、港内の曲線状の護岸では 0.3 、それ以外の護岸では 0.5 とする。座標原点は開口部中央に位置し、仮想境界円 Γ_1 の半径は $r_0 = 300\text{m}$ である。

この人工港湾に周期 10.0sec の規則波が来襲するときの波高分布（入射波高に対する波高比 K ）を IFEM および HFEM により推算する。その等波高線はそれぞれ図-13 (1), (2) に示す通りである。図中の実線は波高比 $K \geq 1$ 、破線は $K < 1$ である等波高線を表し、等波高線間隔はともに 0.2 である。なお、仮想境界円の位置は $kr_0 = 15.56$ となる。

さらに、図-14は開口部中央を通る測線 ($x = 0$) に沿う波高分布および海底地形を示す。実線および \circ 印はそれぞれ IFEM および HFEM による推算結果である。ただし、波は紙面

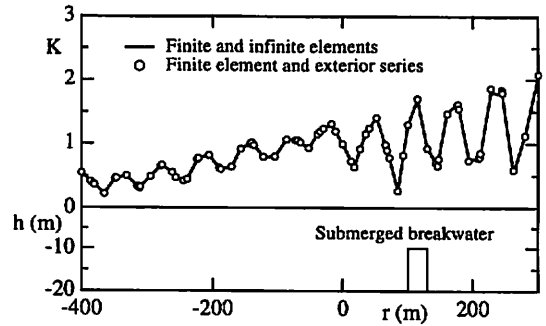


図-14 開口部の中央断面における波高分布

の右側より入射している。

図-13, 14から判るように、沖側海域では前面護岸からの波の反射により重複波が生じている。また、潜堤背後に位置する港口部では、潜堤による波の遮蔽効果が認められる。遮蔽効果は港内の泊地において特に顕著で、波高が 50% 程度減衰している。IFEM および HFEM による推算値には、沖側の海域においてわずかな差異が見られるが、全体的には両者は極めて類似した波高分布となっている。この結果は、無限要素を用いた有限要素解析の有用性を示している。

以上のように、ここで提案した無限要素は、取り扱いが非常に簡単であり、従来の有益な手法の1つである HFEM と同程度の推算精度をもつことが示された。

5. 結語

開領域での波動場を有限要素解析により統一的に取り扱う際には、無限遠での放射境界条件の処理が重要である。本研究では、この処理が簡単になるように、Helmholtz 方程式に対する新しい無限要素を開発した。さらに、数値計算例によりその有用性を示した。その結果は次のように要約される。

(1) 補要素を媒介とする空間座標と物理変数に対して、異なる2つの正規化写像系を導入し、新しい無限要素が導かれた。

(2) 無限要素と仮想境界を構成する解析領域内の要素との結合は、簡単でかつ内部要素の形状に左右されない。

(3) 無限要素の要素積分においては、被積分関数に強い特異性が存在せず、積分が陽に表示される。したがって、数値積分は容易で精度良く計算される。

(4) 提案した無限要素に基づく有限要素法は、境界解を用いる HFEM と同程度の推算精度を有する。

(5) この無限要素は、その簡便さゆえ、開領域での非線形波動の数値解析に対しても有用であろうと期待される。

参考文献

磯部雅彦(1994)：非線形緩勾配波動方程式の提案，土木学会，海岸工学論文集，Vol.41, pp.1-5.
 喜岡 渉・柏原謙爾(1995)：高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性，土木学会，海岸工学論文集，Vol.42, pp.166-170.
 菊池文雄・岡部政之(1986)：有限要素システム入門，日科技連，東京，191pp.

田中 清(1956): 円形島による波の回折, 土木学会, 第3回海岸工学講演会講演集, pp.33-35.

筒井茂明・大木洋典(1998): スロープおよびステップ型リーフ上での波の非線形挙動, 海岸工学論文集, Vol.45, JSCE, pp.41-45.

灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史(1994): 新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法と室内実験による検証, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol.41, pp.11-15.

後野正雄(1993): 緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol.40, pp.21-25.

Bettes, P. C. Emson and T. C. Chiam (1984): A new mapped infinite element for exterior wave problems, Numerical Methods in Coupled Systems, John Wiley Sons Ltd., pp.489-504.

Chen, H. S. and C. C. Mei (1975): Hybrid-element method for water waves, Proc. Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975), Vol.1, pp.63-81.

Ippen, A. T. and Y. Goda (1963): Wave induced oscillation in harbors: The solution for rectangular harbor connected to the open sea, Hydrodynamics Laboratory Rep. No. 59, MIT.

Liu, Philip L.-F., Sung B. Yoon and J. T. Kirby (1985): Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, Jour. Fluid Mech., Vol.153, pp.185-201.

Tsutsui, S. (1990): CATWAVES-Wave analysis system, Centre for Water Research, Univ. of Western Australia, Report No. WP-318-ST, p.61.

Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1992): Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol.34, pp.145-158.

Tsutsui, S. and K. Zamami(1993): Jump condition of energy flux at the line of bathymetric discontinuity and wave breaking on the reef flat, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol.36, pp.155-175.

Tsutsui, S., K. Suzuyama and H. Ohki (1998): Model equations of nonlinear dispersive waves in shallow water and an application of its simplest version to wave evolution on the step-type reef, Coastal Eng. Jour., JSCE, Vol.40, No.1, pp.41-60.

Zienkiewicz, O. C., K. Bando, P. Bettess, C. Emson and T. C. Chian (1985): Mapped infinite elements for exterior wave problems, Int. Jour. for Nemer. Methods in Eng., Vol.21, pp.1229-1251.

付録. 各種の要素行列

以下では, 解析対象領域 Ω_1 を三角形1次要素, 外部領域 Ω_2 を無限要素を用いて離散化した場合の, 各種の要素行列について述べる.

A. 領域 Ω_1 における要素行列

三角形要素の3節点番号を*i, j, k*とすると, 式(13)の左辺第1項の線形部分に対する要素行列は次式で与えられる.

$$I_{\Omega_1^e} = \iint_{\Omega_1^e} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta_n - v_1 \omega^2 (c_g / c) \zeta_n \right\} d\Omega_1 \equiv \{K\} \{\zeta_n\} \tag{A1}$$

$$K_{ii} = \frac{\alpha}{\Delta} (b_i^2 + c_i^2) - \omega^2 \Delta \left(\frac{\beta_i}{10} + \frac{\beta_j}{30} + \frac{\beta_k}{30} \right) \tag{A2.1}$$

$$K_{ij} = \frac{\alpha}{\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) - \omega^2 \Delta \left(\frac{\beta_i}{30} + \frac{\beta_j}{30} + \frac{\beta_k}{60} \right) \tag{A2.2}$$

$$\{\zeta_n\}^T = \{\zeta_{n,i}, \zeta_{n,j}, \zeta_{n,k}\} \tag{A3}$$

ただし, 係数は次の諸式で与えられる.

$$\alpha = \frac{1}{12} \left\{ (cc_g)_i + (cc_g)_j + (cc_g)_k \right\} \tag{A4.1}$$

$$\beta = c_g / c \tag{A4.2}$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \tag{A4.3}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \{x_i b_i + x_j b_j + x_k b_k\} \tag{A4.4}$$

B. 反射境界 Γ_B 上での境界積分

三角形要素の2節点*i, j*が反射境界 Γ_B 上に位置するとき, 式(13)の左辺第3項に対する境界積分は次式で与えられる.

$$I_{\Gamma_B^e} = \int_{\Gamma_B^e} v_1 cc_g B \zeta_n ds \equiv \{K_B\} \{\zeta_n\} \tag{B1}$$

$$K_{B,ii} = l_{ij} \left(\frac{\beta_i}{4} + \frac{\beta_j}{12} \right), \quad K_{B,jj} = l_{ij} \left(\frac{\beta_i}{12} + \frac{\beta_j}{4} \right) \tag{B2.1}$$

$$K_{B,ik} = K_{B,jk} = K_{B,kk} = 0 \tag{B2.2}$$

$$\tilde{B} = cc_g B \tag{B2.3}$$

$$\{\zeta_n\}^T = \{\zeta_{n,i}, \zeta_{n,j}\} \tag{B3}$$

ただし, l_{ij} は2節点*i, j*間の距離である.

C. 水深不連続線 Γ_D 上での境界積分

三角形要素の2節点*i, j*が水深不連続線 Γ_D 上に位置するとき, 式(13)の左辺第4項に対する境界積分は次式で与えられる.

$$I_{\Gamma_D^e} = \int_{\Gamma_D^e} v_1 D \zeta_n ds \equiv \{K_D\} \{\zeta_n\} \tag{C1}$$

$$K_{D,ii} = l_{ij} \left(\frac{D_i}{4} + \frac{D_j}{12} \right), \quad K_{D,jj} = l_{ij} \left(\frac{D_i}{12} + \frac{D_j}{4} \right) \tag{C2.1}$$

$$K_{D,ik} = K_{D,jk} = K_{D,kk} = 0 \tag{C2.2}$$

$$\{\zeta_n\}^T = \{\zeta_{n,i}, \zeta_{n,j}\} \tag{C3}$$

ただし, l_{ij} は2節点*i, j*間の距離である.

D. 仮想境界 Γ_1 上での境界積分

ここでは, 付図-1に示すような2解析モデルを対象とする. 幾何光学的な波 η^G はそれぞれ次式で与えられる.

(1) 島モデル

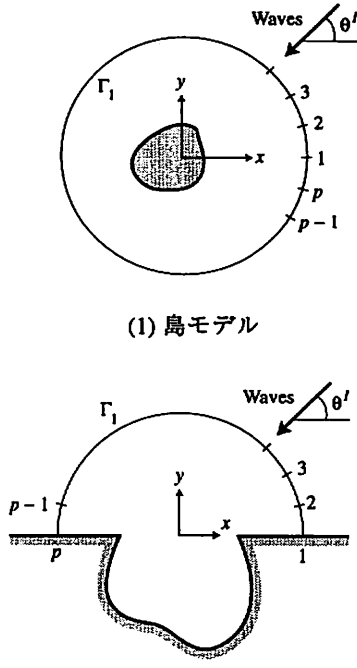
$$\eta^G = a \exp \{ ikr \cos(\theta - \theta') \} \tag{D1.1}$$

(2) 港湾モデル

$$\eta^G = a \exp \{ ikr \cos(\theta_j - \theta') \} + aR \exp \{ ikr \cos(\theta_j + \theta') \} \tag{D1.2}$$

ただし, a : 入射波の振幅, (r, θ) : 極座標, θ' : 波の入射角 (入射波の*x*-軸とのなす角), R : 港湾モデルにおける直線状海岸での波の反射率である. したがって, 式(13)の右辺の外力項は以下のように表される.

$$I_{\Gamma_1^e} = \int_{\Gamma_1^e} v_1 cc_g n_1 \cdot \nabla \eta^G ds \equiv \{q\} \tag{D2}$$



(1) 島モデル

(2) 港湾モデル

付図-1 有限要素解析モデル

一定要素を用いる場合：

$$\{q_i, q_{i+1}\}^T = \frac{1}{4} ka cc_g l_i \{\bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}, \bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}\}^T \quad (D3.1)$$

線形要素を用いる場合：

$$\{q_i, q_{i+1}\}^T = ka cc_g l_i \left\{ \frac{\bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}}{3}, \frac{\bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}}{6}, \frac{\bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}}{6}, \frac{\bar{q}_i + \bar{q}_{i+1}}{3} \right\}^T \quad (D3.2)$$

ただし、 p を仮想境界 Γ_1 上の節点数とすると、島モデルでは添字 $i=1, 2, \dots, p; p+1=1$ 、港湾モデルでは $i=1, 2, \dots, p-1$ であり、 l_i は2節点 $(i, i+1)$ 間の距離である。 $\bar{q}_j (j=1, 2, \dots, p)$ は次式で与えられる。

(1) 島モデル

$$\bar{q}_j = i \cos(\theta_j - \theta') \exp\{ikr \cos(\theta_j - \theta')\} \quad (D4.1)$$

(2) 港湾モデル

$$\bar{q}_j = i \cos(\theta_j - \theta') \exp\{ikr \cos(\theta_j - \theta')\} + i R \cos(\theta_j + \theta') \exp\{ikr \cos(\theta_j + \theta')\} \quad (D4.2)$$

E. 無限要素に対する要素行列

無限要素を用いて式(13)の左辺第2項を離散化する。外部領域 Ω_2 での水深は一定と仮定すると、その要素積分は以下のように表される。

$$\begin{aligned} I_{\Omega_2} &= \iint_{\Omega_2} \left\{ cc_g \nabla v_1 \cdot \nabla \eta^s - v_1 \omega^2 (c_g / c) \eta^s \right\} d\Omega_2 \\ &= \{K^{\infty}\} \{\eta^s\} \end{aligned} \quad (E1)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{\infty} &= cc_g \iint_{\Omega_2} \nabla N_i \cdot \nabla N_j dx dy \\ &\quad - \omega^2 (c_g / c) \iint_{\Omega_2} N_i N_j dx dy \end{aligned} \quad (E2)$$

$$\{\eta^s\}^T = \{\eta_1^s, \eta_2^s\} \quad (E3)$$

まず、無限写像(19), (27)より、変数変換のヤコビアンは次式で与えられる。

$$|J| = \frac{\Delta}{2m} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-1-\frac{2}{m}} \quad (E4)$$

ただし、 Δ は直交座標系 (x, y) における補要素 Ω_2^e の面積：

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ x_0 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_0) + x_2 (y_0 - y_1) \right\} \quad (E5)$$

である。したがって、関数行列の成分は次式のように表される。

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{m}{\Delta} (y_2 - y_1) \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{1+\frac{1}{m}} \quad (E6.1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{m}{\Delta} (x_2 - x_1) \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{1+\frac{1}{m}} \quad (E6.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta} \left\{ (y_1 - y_0) \frac{1-\eta}{2} + (y_2 - y_0) \frac{1+\eta}{2} \right\} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (E6.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_1 - x_0) \frac{1-\eta}{2} + (x_2 - x_0) \frac{1+\eta}{2} \right\} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (E6.4)$$

式(E.6)により、形状関数 N_1, N_2 の直交座標系 (x, y) に関する微係数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{A}{4\Delta} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{1+\frac{1}{m}} \left\{ a_1 + b\eta - ikr_0 \Delta y \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} (1-\eta) \right\} \exp \left\{ -ikr_0 \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (E7.1)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{A}{4\Delta} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{1+\frac{1}{m}} \left\{ c_1 + d\eta - ikr_0 \Delta x \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} (1-\eta) \right\} \exp \left\{ -ikr_0 \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (E7.2)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = -\frac{A}{4\Delta} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{1+\frac{1}{m}} \left\{ a_2 + b\eta + ikr_0 \Delta y \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} (1+\eta) \right\} \exp \left\{ -ikr_0 \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (E7.3)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{A}{4\Delta} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{1+\frac{1}{m}} \left\{ c_2 + d\eta + ikr_0 \Delta x \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} (1+\eta) \right\} \exp \left\{ -ikr_0 \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (E7.4)$$

ただし, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $b = (m+1)\Delta y$, $d = (m+1)\Delta x$, $a_1 = 2(y_2 - y_0) - b$, $a_2 = 2(y_1 - y_0) + b$, $c_1 = 2(x_2 - x_0) - d$, $c_2 = 2(x_1 - x_0) + d$ である. したがって, 無限要素内での要素積分の各項を公式

$$\iint_{\Omega_2^e} [\dots] d\Omega_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\dots] |J| d\xi d\eta \quad (E8)$$

により求めると, 以下の積分が得られる.

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_1 / \partial x)^2 d\Omega_2 = \frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3a_1^2 + b^2) I_2 - (\Delta y)^2 I_0 - i\Delta y (3a_1 - b) I_1 \right\} \quad (E9.1)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_1 / \partial y)^2 d\Omega_2 = \frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3c_1^2 + d^2) I_2 - (\Delta x)^2 I_0 - i\Delta x (3c_1 - d) I_1 \right\} \quad (E9.2)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_2 / \partial x)^2 d\Omega_2 = \frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3a_2^2 + b^2) I_2 - (\Delta y)^2 I_0 + i\Delta y (3a_2 + b) I_1 \right\} \quad (E9.3)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_2 / \partial y)^2 d\Omega_2 = \frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3c_2^2 + d^2) I_2 - (\Delta x)^2 I_0 + i\Delta x (3c_2 + d) I_1 \right\} \quad (E9.4)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega_2 = -\frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3a_1 a_2 + b^2) I_2 + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 I_0 - i(2m-1)(\Delta y)^2 I_1 \right\} \quad (E9.5)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega_2 = -\frac{A^2}{24\Delta} (2kr_0)^{2m} \left\{ (3c_1 c_2 + d^2) I_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 I_0 - i(2m-1)(\Delta x)^2 I_1 \right\} \quad (E9.6)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} N_1^2 d\Omega_2 = \iint_{\Omega_2^e} N_2^2 d\Omega_2 = 2 \iint_{\Omega_2^e} N_1 N_2 d\Omega_2 = \frac{2}{3} A^2 \Delta (2kr_0)^{2m-2} I_0 \quad (E9.7)$$

ただし, I_0, I_1 および I_2 は次式で定義される積分である.

$$I_n = \int_{\rho_0}^{\infty} z^{-2m+1-n} e^{-iz} dz, \quad \rho_0 = 2kr_0, \quad n = 0, 1, 2 \quad (E10)$$

一定水深域における波動場を表す Helmholtz 方程式の場合には $m = 1/2$ であるから, 式(E10)の積分は次式となる.

$$I_0 = \int_{\rho_0}^{\infty} e^{-iz} dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\rho_0}^T e^{-iz} dz = -ie^{-i\rho_0} \quad (E11.1)$$

$$I_1 = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{z} e^{-iz} dz = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz - i \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \quad (E11.2)$$

$$I_2 = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{z^2} e^{-iz} dz = \frac{e^{-i\rho_0}}{\rho_0} - i I_1 \quad (E11.3)$$

一般的に, $n \geq 2$ に対して次の漸化式が成立する.

$$I_n = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{z^n} e^{-iz} dz = \frac{e^{-i\rho_0}}{(n-1)\rho_0^{n-1}} - \frac{i}{n-1} I_{n-1} \quad (E11.4)$$

ただし, 式(E11)においては, 超関数の意味での等式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-iT} = 0 \quad (E12)$$

が用いられている. また, 積分 I_1 は以下の Fresnel の正弦積分 Si および余弦積分 Ci により定められる.

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \int_z^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad (E13.1)$$

$$Ci(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \quad (E13.2)$$