

# 琉球大学学術リポジトリ

## 沿岸開領域における非線形波動解析のための新しい無限要素（第2報）－高次無限要素と誤差評価－

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Infinite element, Finite element method, Unbounded wave problems, Nonlinear waves, Mapping 作成者: 筒井, 茂明, Tsutsui, Shigeaki メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/2220">http://hdl.handle.net/20.500.12000/2220</a>

# 沿岸開領域における非線形波動解析のための新しい 無限要素 (第2報) – 高次無限要素と誤差評価 –

筒井 茂明\*

## New Infinite Element for Nonlinear Wave Analyses in Unbounded Coastal Domains Part 2. – Higher Order Infinite Element and Error Estimate –

Shigeaki TSUTSUI\*

### Abstract

Treatment of the radiation boundary condition at infinity is of great significance for wave analyses in unbounded coastal domains. The higher order infinite element for the finite element method is newly developed in order to improve accuracy rather than that by the linear infinite element presented in this series of researches. The shape functions for function variation are third-order polynomials in the radial coordinate and the variation in the angular coordinate is linear. The element has three novel features. First, the mapping for function variation is able to perform the radiation boundary condition up to  $r^{-3m}$ ,  $r$  being the radial distance and  $m = 1/2$  for wave problems. The second feature is easiness in connecting the infinite element to the interior, standard elements. The third one is an integrable feature over the element with the aid of the infinite mapping. As a test of the new, third-order infinite element, the problem of wave diffraction by a cylinder is solved, along with a comparison with the analytical solution and with numerical results obtained using other finite elements. Numerical error assessment shows efficiency of the new infinite element.

**Key Words:** Infinite element, Finite element method, Unbounded wave problems, Nonlinear waves, Mapping.

### 1. 緒言

無限遠での放射境界条件の処理は開領域での波動場の解析にとって非常に重要である。前報(筒井, 1999a)においては、無限要素を用いた有限要素法による統一的な取り扱いのため、開領域での非線形な波動場解析をも視野に入れて、従来の無限要素に代わる新しい無限要素が提案された。さらに、その適用性について数値計算例による検証が行われ、次のような重要な特性を持つことが示された。

(a) 無限要素と解析対象領域内の要素との結合は簡単で、かつ内部要素の形状に左右されない。

(b) 無限要素の要素積分においては、被積分関数に強い特異性が存在せず、積分が陽に表示される。したがって、数値積分は容易で精度良く計算される。

無限要素が適用される外部領域での波動場の支配方程

式は Helmholtz の方程式で、ハンケル関数はその基本解である。ハイブリッド型の有限要素法 (HFEM) (Chen・Mei, 1975) では、遠方場での波をハンケル関数を用いた級数解で表し、これを境界解とし内部の有限要素解と接続する。したがって、級数解の項数を十分多く採ることにより高精度な波動場解析が可能であり、その最終的な推算精度は一義的に要素サイズに依存する。

前報で提案された無限要素は前述の (a), (b) のような優れた特性を持っているが、その精度は HFEM の計算精度と比較してわずかに劣る。そこで本研究では、取り扱いの簡便さなどの本来の特性を保ちつつ、波高推算の高精度化を図るため、高次の無限要素を開発・提案する。さらに、数値計算例により推算精度を調べ、その有用性を示す。

### 2. 無限要素を用いた弱形式

解析対象海域を、図-1のように、仮想境界  $\Gamma_1$  により領域  $\Omega_1$  および  $\Omega_2$  に分割する。内部領域  $\Omega_1$  での水深は変化し、そこには海岸線や構造物などの境界  $\Gamma_B$  あるいは水深不連続部  $\Gamma_D$

受理: 1999年12月6日

\* 琉球大学工学部環境建設工学科

Dept. of Civil Engineering and Architecture, Faculty of Engrg.

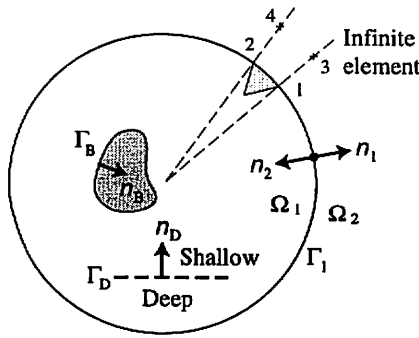


図-1 解析対象海域と定義

が存在する。外部領域  $\Omega_2$  での水深は一定と仮定され、無限要素はこの外部領域に適用される。

本章と次章における全ての物理量は、代表水深  $h_0^*$  および重力加速度  $g$  により定められる基準長:  $h_0^*$ , 時間:  $\sqrt{h_0^*/g}$ , 速度:  $\sqrt{gh_0^*}$  による無次元量である。静水面に座標原点を置き、水平方向に  $(x, y)$  軸、鉛直上方に  $z$  軸を採る。また、 $(\zeta, \eta)$ : 領域  $\Omega_1$  および  $\Omega_2$  での水面変動量,  $\eta^G$ : 入射波および反射波などの幾何光学的な波,  $\eta^S$ : 散乱波,  $c$ : 波速,  $c_g$ : 群速度,  $\omega$ : 周波数とする。

支配方程式は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \zeta_n) + \omega^2 (c_g / c) \zeta_n = Q \quad \text{領域 } \Omega_1 \text{ 内} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \eta^S) + \omega^2 (c_g / c) \eta^S = 0 \quad \text{領域 } \Omega_2 \text{ 内} \quad (2)$$

境界条件は次の通りである。

$$n_1 \cdot \nabla \zeta_n + n_2 \cdot \nabla (\eta^G + \eta^S) = 0 \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3.1)$$

$$\zeta_n = \eta^G + \eta^S \quad \text{境界 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3.2)$$

$$n_B \cdot \nabla \zeta_n = B \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_B \text{ 上} \quad (4)$$

$$[cc_g n_D \cdot \nabla \zeta_n]_{\xi_0^-}^{\xi_0^+} = D \zeta_n \quad \text{境界 } \Gamma_D \text{ 上} \quad (5)$$

$$\text{無限遠での Sommerfeld の放射条件} \quad (6)$$

ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  であり、 $(n_1, n_2)$ ,  $n_B$ ,  $n_D$  はそれぞれ境界  $\Gamma_1, \Gamma_B, \Gamma_D$  での外向き法線を表す。

式(1)は  $n$  次の Fourier 成分波に対する非線形波動方程式である (筒井・大木, 1998; Tsutsuiら, 1998)。同式の左辺は緩勾配方程式, 右辺の  $Q$  は高次成分波を含む非線形項を表す。式(2)は一定水深のときには Helmholtz 方程式となる。式(4)は反射境界条件 (Tsutsui・Lewis, 1992) であり、係数  $B$  は境界での波の反射率および境界への波の入射角の関数である。水深不連続部における境界条件, 式(5)は、水深の深い側より浅い側へ波が伝播すると仮定して適用する (Tsutsui・Zamami, 1993)。ただし、 $\xi_0$ : 水深不連続部の位置,  $D$ : 無次元係数である。なお、式(1)-(6)においては、 $Q$  を除く波動量は全て  $n$  次成分波に対するものであるが、 $\zeta_n$  以外の添字  $n$  は省略されている。

式(1), (2), (3.1), (4), (5) に対する弱形式は、形状関数  $v$  を用いると、次式で与えられる。

$$\iint_{\Omega_1} \left\{ cc_g \nabla v \cdot \nabla \zeta_n - v \omega^2 (c_g / c) \zeta_n + Q \right\} d\Omega_1$$

$$+ \iint_{\Omega_2} \left\{ cc_g \nabla v \cdot \nabla \eta^S - v \omega^2 (c_g / c) \eta^S \right\} d\Omega_2$$

$$- \int_{\Gamma_B} v cc_g B \zeta_n ds - \int_{\Gamma_D} v D \zeta_n ds$$

$$= \int_{\Gamma_1} v cc_g n_1 \cdot \nabla \eta^G ds \quad (7)$$

さらに、式(7)の各項を離散化して得られる要素行列をそれぞれ  $\{K\}, \{K^{\infty}\}, \{K_B\}, \{K_D\}, \{q\}$  とすると、次の連立方程式が得られる。

$$\sum_{\Omega_1} \{K\} \{\zeta_n\} + \sum_{\Omega_2} \{K^{\infty}\} \{\eta^S\}$$

$$- \sum_{\Gamma_B} \{K_B\} \{\zeta_n\} - \sum_{\Gamma_D} \{K_D\} \{\zeta_n\} = \sum_{\Gamma_1} \{q\} \quad (8)$$

支配方程式(2)は外部領域  $\Omega_2$  における散乱波のみに対するものであるから、式(8)においては境界  $\Gamma_1$  上での波動量が不連続となっている。そこで境界条件, 式(3.2)を満たすため、次のような処理を行う。無限要素の要素行列  $\{K^{\infty}\}$  および境界  $\Gamma_1$  上の節点での幾何光学的な波  $\{\eta^G\}$  より  $\{K^{\infty}\} \{\eta^G\}$  なる量を求め、式(8)の両辺の対応する節点に付加すると、次式が得られる。

$$\sum_{\Omega_1} \{K\} \{\zeta_n\} + \sum_{\Omega_2} \{K^{\infty}\} \{\eta^G + \eta^S\}$$

$$- \sum_{\Gamma_B} \{K_B\} \{\zeta_n\} - \sum_{\Gamma_D} \{K_D\} \{\zeta_n\}$$

$$= \sum_{\Gamma_1} \{q\} + \sum_{\Omega_2} \{K^{\infty}\} \{\eta^G\} \quad (9)$$

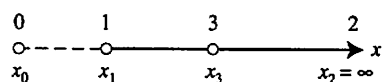
したがって、境界  $\Gamma_1$  上では全体の波動量  $\zeta_n = \eta^G + \eta^S$  が未知量となり、式(3.2)の境界条件が満たされる。

無限遠での放射境界条件, 式(6)は、外部領域  $\Omega_2$  における無限要素による波動場の定式化の際に、近似的ではあるが自動的に満たされる。

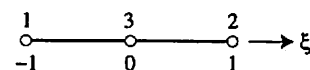
### 3. 高次の無限要素

#### (1) 1次元無限要素

図-2に示す  $x$  座標系において、節点1, 2で表される半無限区間  $[x_1, \infty]$  から成る1次元無限要素を考える。攪乱現象の中心点を0とし、区間  $[x_0, x_1]$  を無限要素に対する補要素と定義する。無限要素内の1点と中心点との距離は  $r = x - x_0$  であり、物理変数  $\phi$  が遠方場で  $r^{-m}$  の形で減衰することが判って



(a) 1次元無限要素



(b) 正規ξ系

図-2 1次元無限要素と正規ξ系

いるものとする。ただし、 $m$ は正の実数である。この無限要素が区間 $[-1, 1]$ の正規 $\xi$ 系に写像できると仮定すると、節点1, 2はそれぞれ正規 $\xi$ 系における $\xi = -1$ および $\xi = 1$ に対応する。 $x$ 座標系と正規 $\xi$ 系間の写像, すなわち、無限写像は次式で与えられる (菊池・岡部, 1986; 筒井, 1999a, b)。

$$x - x_0 = (x_1 - x_0) \left( \frac{1 - \xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad (10)$$

上式は補要素上の節点座標により定められていることが重要である。

さらに、高次要素のために、 $\xi = 0$ に対応する位置に節点3を採ると、その位置は $x_3 - x_0 = 2^{\frac{1}{m}}(x_1 - x_0)$ となる。従来の無限要素 (Bettesら, 1984; Zienkiewiczら, 1985) は $m = 1$ の場合に対応し、そこでは所要の減衰モードが得られるように種々の工夫がなされている。

ここで、中心点と節点1の間の距離 $r_1 = x_1 - x_0$ による無次元距離を $\rho = r/r_1$ と定義すると、式(10)より次式が得られる。

$$\frac{(1 - \xi)}{2} = \rho^{-m} \quad (11)$$

すなわち、物理変数の減衰特性 $r^{-m}$ を $\rho^{-m}$ のモードで代替させることになる。

物理変数の遠方場での減衰特性として、その漸近展開において $\rho^{-m}, \rho^{-2m}, \rho^{-3m}, \dots$ のように1, 2, 3, ...次と全ての項が現れる現象では、高次の無限要素を求めるときに、有限要素法で用いられる多項式補間を試行関数の定義に用いることができる。しかし、波動問題においては、以下のように特別な配慮が必要である。

一定水深における波動場を表すHelmholtz方程式のグリーン関数は0次のハンケル関数 $H_0$ であり、その漸近展開は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H_0(z) &\approx \exp\left\{\pm i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} P(z) \\ P(z) &\equiv 1 + \frac{i}{8z} - \frac{9}{128} \frac{1}{z^2} + O(z^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし、複合 $(\pm)$ は第1, 2種のハンケル関数に対応し、 $i$ は虚数単位 $(\sqrt{-1})$ である。したがって、漸近展開の主要項から、波動問題では係数 $m = 1/2$ であり、散乱波は遠方場において $\rho^{-m}, \rho^{-3m}, \rho^{-5m}, \dots$ のように奇数次の項のみで表される減衰特性を持っている。しかし、通常の形状関数にはこのような特性をもつ補間式は存在しないので、所要の形状関数を新たに求める必要がある。

ここでは、物理変数に対する試行関数 $\phi^h$ を節点1, 3での形状関数 $N_1, N_3$ を用いて次式で表す。

$$\phi^h = \phi_1 N_1 + \phi_3 N_3 \quad (13)$$

ただし、無限遠では $\phi_2 = 0$ となることが考慮されている。この試行関数により $\rho^{-m}$ ならびに $\rho^{-3m}$ の項が再現可能なように、両者の1次結合で $N_1, N_3$ を定める。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \rho^{-m} &= \alpha_1 N_1 + \beta_1 N_3 \\ \rho^{-3m} &= \alpha_2 N_1 + \beta_2 N_3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と置き、係数 $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ を決定する。

節点1では $\xi = -1, \rho^{-m} = 1$ であり、形状関数の満たすべき特性として $N_1 = 1, N_3 = 0$ であるから、係数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ が得ら

れる。同様に、節点3では $\xi = 0, \rho^{-m} = 1/2, N_1 = 0, N_3 = 1$ であるから、 $\beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1/8$ となる。したがって、形状関数 $N_1, N_3$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1 - \xi}{2} - 4 \left( \frac{1 - \xi}{2} \right)^3 \right\} \\ N_3 &= \frac{8}{3} \left\{ \frac{1 - \xi}{2} - \left( \frac{1 - \xi}{2} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし、 $N_2 = 1 - N_1 - N_3$ である。式(15)で表される形状関数は3節点を用いて決定されているにもかかわらず、その補間多項式の次数は3次であり、 $O(\rho^{-5m})$ の項は無視されている。図-3はこれら3次の形状関数を示す。より高次の形状関数は、中間節点を補い、式(14)と同様に高次モードの1次結合を仮定して、簡単に定めることができる。

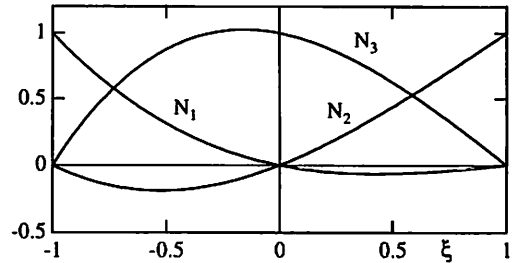


図-3 1次元無限要素に対する3次の形状関数

(2) 2次元無限要素

図-4に示すように、有限要素および無限要素がそれぞれ適用される領域 $\Omega_1$ と $\Omega_2$ との境界 $\Gamma_1$ 上における内部要素の節点を1, 2とする。無限要素 $\Omega_2^c$ はこの有限辺と放射状の2直線とで構成される。放射状の2直線の交点を中心点0と呼ぶ。さらに、三角形012を無限要素 $\Omega_2^c$ に対する補要素 $\Omega_1^c$ と

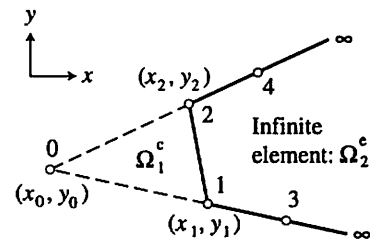


図-4 3次の無限要素とその補要素

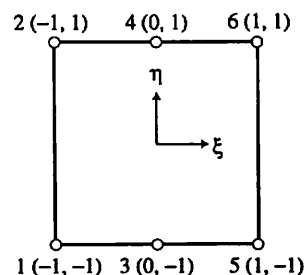


図-5 正規 $(\xi, \eta)$ 系

定義し、中心点 $(x_0, y_0)$ からの距離を $r$ とする。無限要素 $\Omega_2^i$ は図-5に示す正規 $(\xi, \eta)$ 系に写像できると仮定する。

波動問題における散乱波の振幅のように、減衰が散乱中心からの距離、すなわち、動径方向にのみ生じる場合には、正規 $(\xi, \eta)$ 系においては $\xi$ 方向のみの変化となる。したがって、 $\xi$ 方向には $\rho^{-m}$ および $\rho^{-3m}$ で表される減衰項を満足させることを考える。一方、 $\eta$ 方向には、内部要素との結合の簡便さを保つため、物理変数の線形変化を仮定する。このように、 $(\xi, \eta)$ 方向にそれぞれ次数の異なる特殊な高次無限要素を導く。

1次元の場合と同様に、正規 $(\xi, \eta)$ 系の2点 $(0, -1)$ および $(0, 1)$ に対応する新たな2節点3, 4を無限要素の放射線上に設定する。無限要素の正規 $(\xi, \eta)$ 系への写像、すなわち、無限写像は、補要素 $\Omega_1^i$ の節点0, 1, 2のみで決定され、前報と同様に次式（菊池・岡部, 1986; 筒井, 1999a）で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x-x_0 &= \sum_{i=1}^2 (x_i-x_0) M_i \\ y-y_0 &= \sum_{i=1}^2 (y_i-y_0) M_i \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1-\eta}{2} \\ M_2 &= \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{1+\eta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

試行関数 $\phi^h$ は4節点での形状関数 $N_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )を用いて次式で定められる。

$$\phi^h = \phi_1 N_1 + \phi_2 N_2 + \phi_3 N_3 + \phi_4 N_4 \quad (17)$$

ただし、無限遠では $\phi_3 = \phi_4 = 0$ となることが考慮されている。形状関数 $N_i$ は、式(15)を参考にして、次式で与えられる。

$$N_1 = -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - 4 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1-\eta}{2} \quad (18.1)$$

$$N_2 = -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - 4 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1+\eta}{2} \quad (18.2)$$

$$N_3 = \frac{8}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1-\eta}{2} \quad (18.3)$$

$$N_4 = \frac{8}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1+\eta}{2} \quad (18.4)$$

なお、2次元の場合においても、減衰特性を表す式(11)が成立する。したがって、無限写像を表す式(16)の下で、中心点から出る放射線上では、試行関数 $\phi^h$ および形状関数 $N_i$ には $\rho^{-m}$ および $\rho^{-3m}$ のモードが含まれている。

以上は物理変数が単調に減衰する場合の議論であるが、波動問題においては補正が必要である。時間項を $\exp(i\omega t)$  ( $t$ :時間)と仮定すると、散乱波は $\exp\{-i(kr-\omega t)\}$ に比例する振動特性をもっている。したがって、形状関数(18)は振動特性を表す $\exp(-ikr)$ なる項を含まねばならない。いま、 $A$ を未知係数とし、式(16)により定められる中心点からの距離 $r$ を用いると、形状関数 $N_i$ は次式で表すことができる。

$$N_1 = -\frac{A}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - 4 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1-\eta}{2} \exp \left\{ -ikr f(\eta) \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (19)$$

ただし、 $f(\eta)$ は中心点から無限要素の辺12上の任意点までの距離（筒井, 1999a, b）である。

要素形状関数が満たすべき重要な条件は、内外の2領域 $\Omega_1, \Omega_2$ を接続する仮想境界 $\Gamma_1$ 上、すなわち、 $\xi=-1$ において内外の波の位相差がゼロとなることである。また、節点1, 2が半径 $r_0$ の円弧上にあり、内部領域の要素サイズが十分小さいときには、 $f(\eta) \equiv \text{const.} \equiv r_0$ と近似することができる。したがって、これら2条件を考慮すると、

$$A = \exp(ikr_0) \quad (20)$$

となり、形状関数 $N_i$ は次式で与えられる。

$$N_1 = -\frac{A}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - 4 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1-\eta}{2} \exp \left\{ -ikr_0 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (21.1)$$

同様に、補正係数 $A$ により形状関数の位相を合わせると、他の形状関数 $N_i$  ( $i=2, 3, 4$ )は次式となる。

$$N_2 = -\frac{A}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - 4 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1+\eta}{2} \exp \left\{ -ikr_0 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (21.2)$$

$$N_3 = \frac{8A}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1-\eta}{2} \exp \left\{ -ikr_0 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (21.3)$$

$$N_4 = \frac{8A}{3} \left\{ \frac{1-\xi}{2} - \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^3 \right\} \frac{1+\eta}{2} \exp \left\{ -ikr_0 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{m}} \right\} \quad (21.4)$$

3次の無限要素は、無限写像を表す式(16)および要素形状関数(21)で構成される。無限写像は前報（筒井, 1999a）の式と同じであるから、ここでも変数変換のヤコビヤンは正規系の $\eta$ に無関係となる。その結果、要素積分を解析的に実行することができ、要素行列はFresnelの正弦および余弦積分により陽に表示される。

なお、付録には、3次の無限要素を用いて外部領域を離散化したときの要素行列が示されている。

#### 4. 数値計算例および誤差解析

ここでは、一定水深域での円柱による波の散乱を例に採り、無限要素を用いた有限要素解析における計算精度と要素サイズおよび無限要素の次数との関係について検証する。用いる支配方程式は、式(1)において非線形項 $Q=0$ として得られる緩勾配方程式である。

数値モデルの諸元は、円柱の半径 $a=5.0\text{m}$ 、仮想境界 $\Gamma_1$ の半径 $r_0=10.0\text{m}$ 、水深 $h=5.0\text{m}$ である。図-6は線形三角形要素より成る有限要素網を示す。内部領域における総節点数: 404, 要素数: 687, 要素の平均的な辺長:  $l=0.7\text{m}$ である。

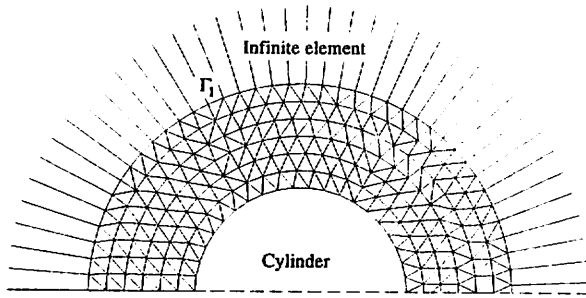


図-6 円柱の周りの有限要素網 (半領域)

外部領域での無限要素は、仮想境界面 $\Gamma_1$ 上の辺と中心点より出る2放射線により構成される。前報の線形無限要素と同様に、物理変数は仮想境界の辺上では線形変化すると仮定され、辺上に中間節点が存在しないので、無限要素の生成は内部要素の形状には左右されない。

このモデルに対して、表-1に示す4種類の波が入射する場合の円柱の周りの波高分布について検討する。ただし、 $T$ :波の周期、 $L$ :進行波の波長、 $k$ :波数である。

なお、円柱の周りの波動解は、入射波高を1とすると、次式(田中, 1956)で表される。

$$\zeta = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos n\theta - \frac{J'_0(ka)}{H_0(ka)} H_0(kr) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J'_n(ka)}{H_n(ka)} H_n(kr) \cos n\theta \quad (22)$$

ただし、 $J_n$ :ベッセル関数、 $H_n$ :第2種ハンケル関数、 $(r, \theta)$ :極座標、 $(\prime)$ :主変数に関する微分を表す。また、円柱表面は完全反射壁と仮定する。

水面変動量は複素変数で表されるから、その絶対値を採ると、任意点における入射波高に対する波高比が得られる。以下では、前報および本報で提案した無限要素に基づく有限要素法を、補間多項式の次数から、それぞれ1次および3次のIFEMと呼ぶ。

図-7は円柱の周りの波高分布を示す。上半円が式(22)で

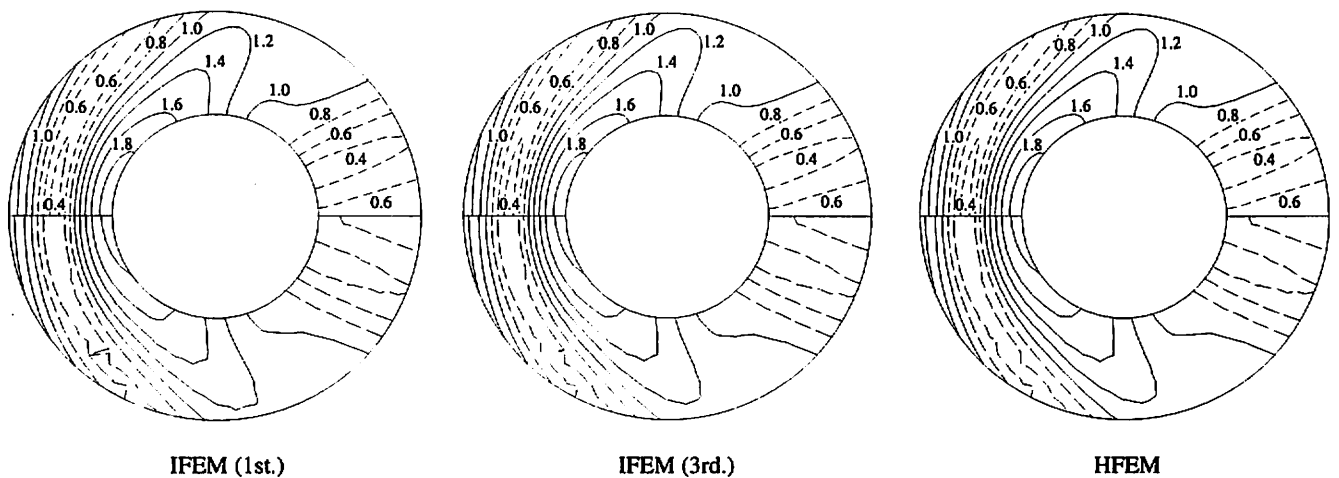
表-1 数値実験諸元

Run	$T$ (sec)	$L$ (m)	$kh$	$l/L$
1	2.598	10.48	3.0	1/15.0
2	3.232	15.71	2.0	1/22.4
3	3.852	20.95	1.5	1/29.9
4	5.143	31.42	1.0	1/44.9

与えられる理論解, 下半円は左から順に1次および3次のIFEM, ハイブリッド型のHFEM (Chen・Mei, 1975)による数値解析結果である。波は紙面の左側より入射している。図中の実線は入射波高に対する波高比 $K \geq 1$ , 破線は $K < 1$ となる等波高線を示し、数値は波高比 $K$ の値を表す。等波高線の間隔は全て0.2である。

Run 1での円柱前方の $K < 1$ となる領域における等波高線には、1次のIFEMの結果と比較して、3次のIFEMによる改善が認められ、HFEMによる結果とほぼ同程度の計算精度となっている。しかし、理論において円柱前方に存在する $K = 0.4$ の等波高線がいずれの計算結果においても見られない。この原因として、前方領域では部分重複波が発生し、水面振動の間隔が進行波に比べて短くなっていることが考えられる。したがって、円柱の前方領域における要素サイズは、この重複波を再現するにはやや過大であると判断される。また、円柱背後における $K = 0.6$ の等波高線に若干の差異が認められ、円柱後方においても推算精度が劣ることが判る。

Run 2における1次のIFEMによる結果では、円柱の背後に生じる $K = 0.8$ の等波高線が再現されていない。しかし、3次のIFEMによる結果には、形状に差異が認められるものの、この等波高線が再現されている。円柱後方では明瞭な重複波は発生しないので、IFEMにおけるこの差異は、それぞれの計算に用いられた無限要素の次数に依存しているものと考えられる。3次のIFEMによる結果には局所的には理論とのわずかな差異が認められるが、全体とし



(a) Run 1:  $kh = ka = 3, kr_0 = 6$

図-7 円柱の周りの波高分布

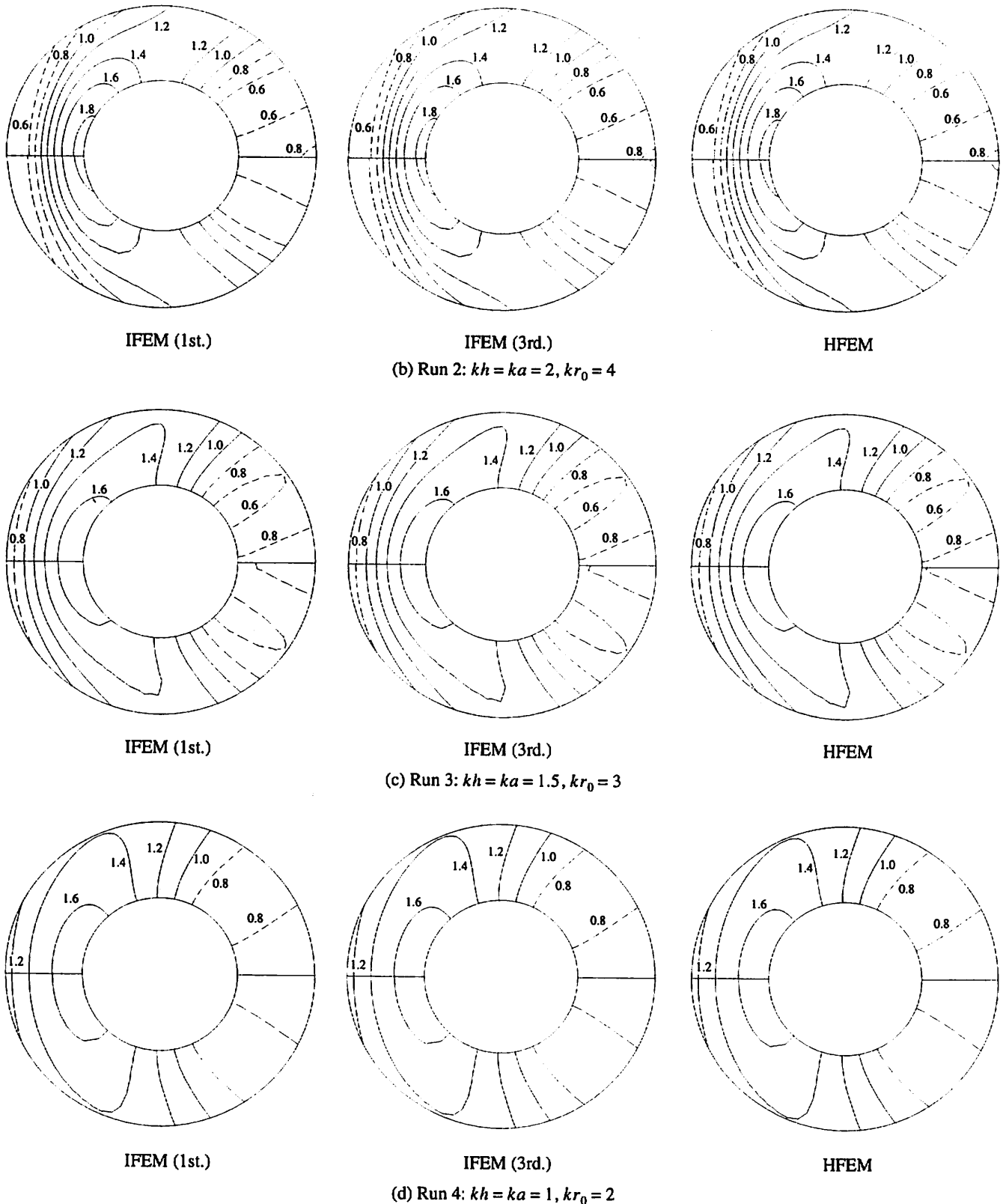


図-7 円柱の周りの波高分布（続き）

て両者は良好な一致を示している。この場合の平均的な要素サイズは進行波の波長の $1/22$ 程度であり、要素サイズの設定に対する1つの指標を示唆している。

次に、Run 3においては、Run 1, 2と比べて要素サイズが小さく、IFEMおよびHFEMによる計算結果と理論との一致度は良好である。ただし、円柱背後での等高線に極

わずかな差異がある。この誤差は3次のIFEMでは1次のIFEMより改善されている。

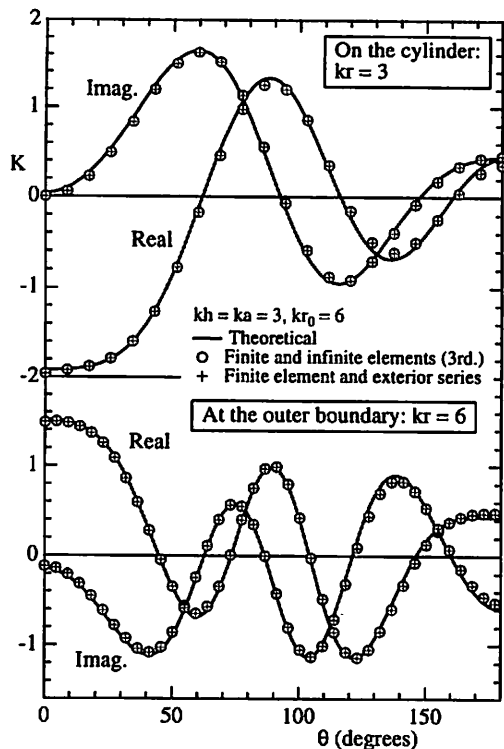
Run 4においては相対的に要素網が密であり、いずれの結果も理論結果を良く再現しており、1次のIFEMによる推算でも十分であることが判る。

ここで、波高分布の詳細をみるため、円柱沿いおよび外

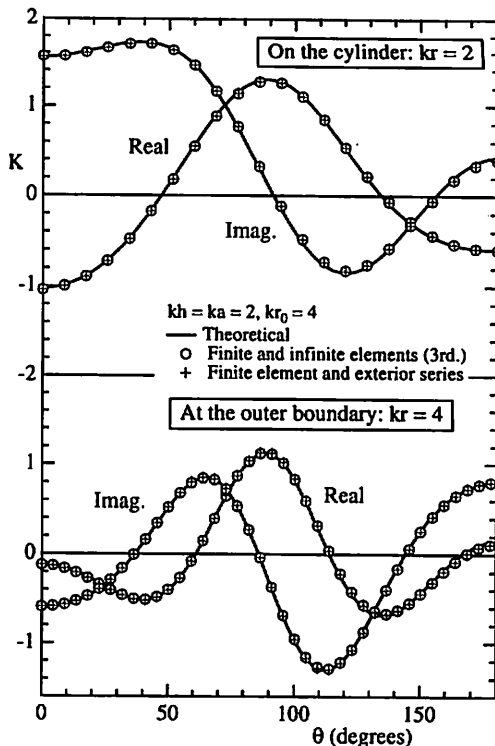
方の仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部の比較を図-8に例示する。縦軸は入射波高に対する相対値 $K$ , 横軸は円柱の中心からの角座標である。実線は理論解(22)を示す。○および+印は、それぞれ3次のIFEMおよびハイブリッド型のHFEMを適用して推算した結果である。

Run 1においては、円柱沿いおよび仮想境界円上のいずれにおいても、推算値と理論値には位相のずれが生じている。この傾向は円柱沿いにおいて顕著である。

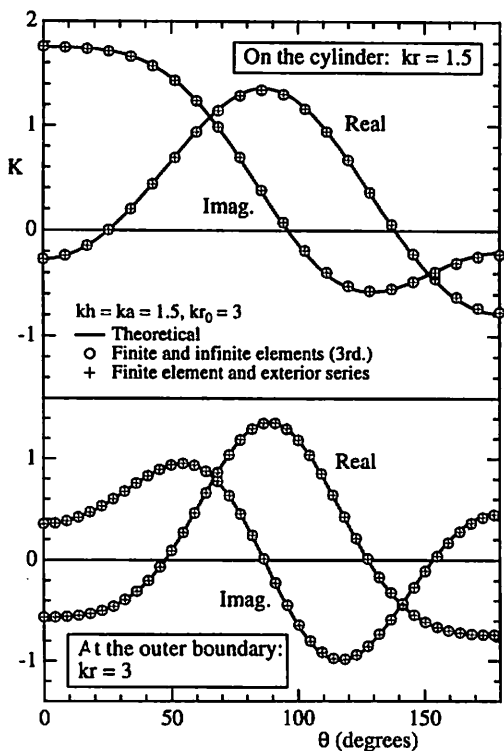
Run 2に対する計算結果は、 $\theta > 160^\circ$ において理論解と比べて最大3-4%程度の過小評価となっている。この影響



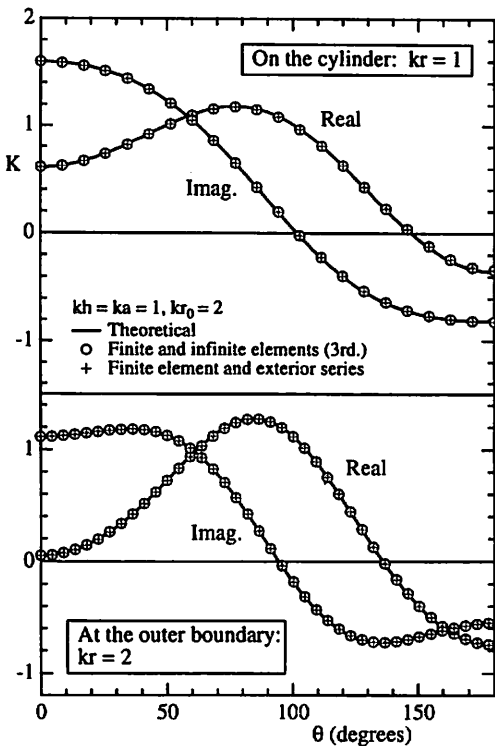
(a) Run 1:  $kh = ka = 3, kr_0 = 6$



(b) Run 2:  $kh = ka = 2, kr_0 = 4$



(c) Run 3:  $kh = ka = 1.5, kr_0 = 3$



(d) Run 4:  $kh = ka = 1, kr_0 = 2$

図-8 円柱沿いおよび仮想境界円上での水面変動量の実部および虚部



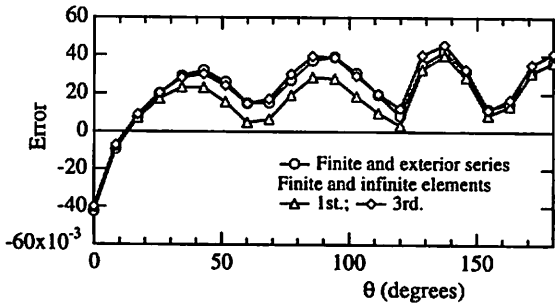
が図-7(b)の円柱背後の等波高線のわずかな差異として現れている。しかし、本推算結果は十分な精度を有し、HFEMによる結果との差異は1%以下である。

Run 3においても、円柱背後における波高比をやや過小評価する傾向が認められる。その結果が図-7(c)での波高比 $K=0.8$ の等波高線の差異となっている。Run 4においては実部および虚部ともに十分な推算精度を持っている。

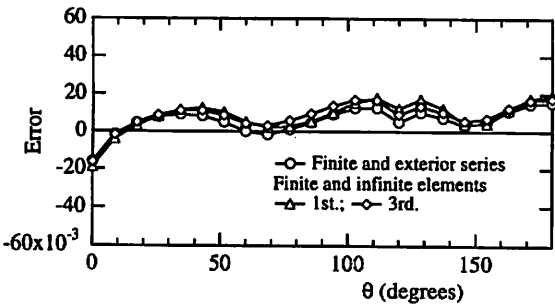
さらに、これら水面変動量の実部および虚部の誤差が、円柱沿いおよび仮想境界円上での波高分布の誤差として

どの程度の影響を及ぼすかについて調べた結果は、図-9および図-10に示す通りである。縦軸は入射波高に対する波高比の誤差、横軸は角座標である。図中の $\Delta$ 、 $\diamond$ 、および $\circ$ 印はそれぞれ1次、3次のIFEMおよびハイブリッド型のHFEMを適用して推算した場合の誤差を示す。

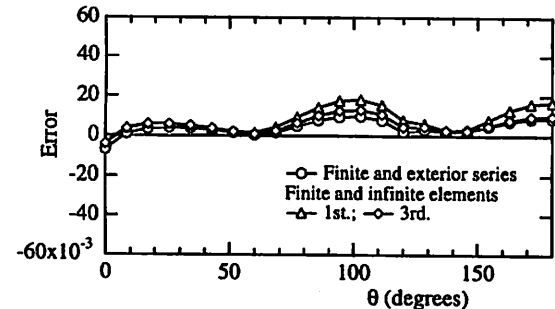
Run 1においては誤差の最大値は約0.04に達している。誤差は円柱沿いではやや規則的に、仮想境界円上においては不規則に変動している。ここでの特徴として、3次のIFEMとHFEMの誤差の値および変動特性は、ともに、全



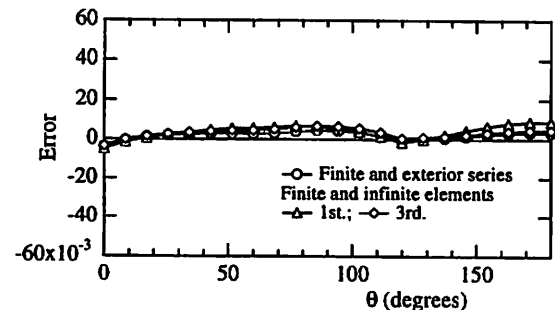
(a) Run 1:  $kh = ka = 3, kr_0 = 6$



(b) Run 2:  $kh = ka = 2, kr_0 = 4$

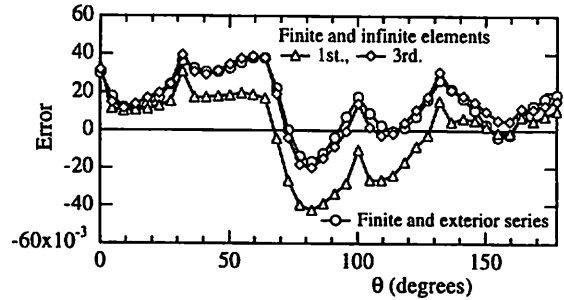


(c) Run 3:  $kh = ka = 1.5, kr_0 = 3$

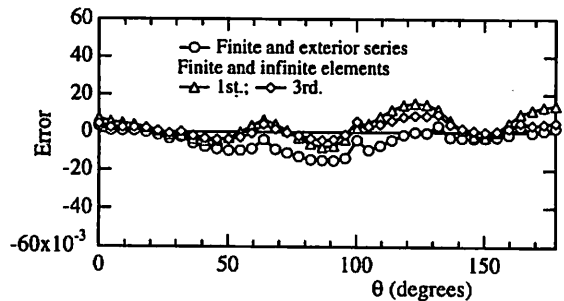


(d) Run 4:  $kh = ka = 1, kr_0 = 2$

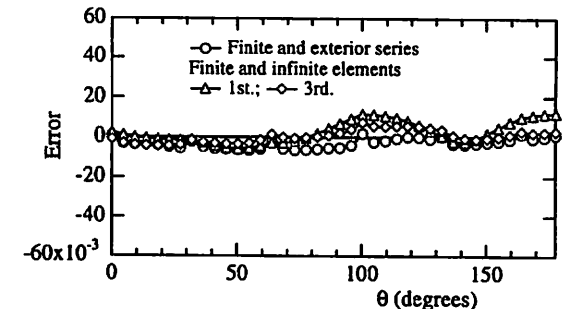
図-9 円柱沿いの波高比の誤差



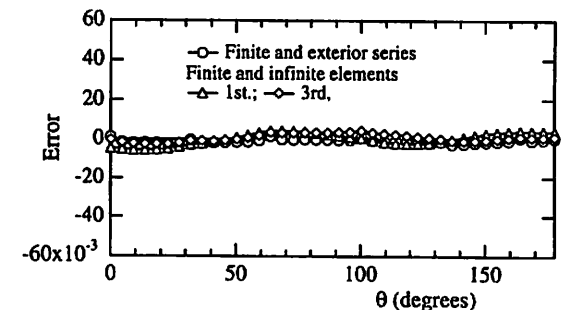
(a) Run 1:  $kh = ka = 3, kr_0 = 6$



(b) Run 2:  $kh = ka = 2, kr_0 = 4$



(c) Run 3:  $kh = ka = 1.5, kr_0 = 3$



(d) Run 4:  $kh = ka = 1, kr_0 = 2$

図-10 仮想境界円上での波高比の誤差

偏角に渡りほぼ同じであることが挙げられる。

Run 2における誤差は高々0.02の程度である。円柱沿いの誤差は3 推算法ともにはほぼ同じで、その変動はやや規則的である。一方、仮想境界円上においては、 $\theta = 120^\circ$ 前後および $\theta > 160^\circ$ の領域での3次のIFEMによる誤差の改善が顕著である。その結果、図-7(b)に示されているように、1次のIFEMによる結果には見られない円柱背後の波高比 $K=0.8$ の等波高線が、3次のIFEMによる推算結果には現れている。

Run 3の結果はRun 2の推算精度が向上したもので、3次のIFEMによる誤差が1次の誤差より小さく、HFEMによる誤差とはほぼ同じであることが判る。Run 4においては、3 推算法における誤差に顕著な差異は認められない。

最後に、総合的な誤差評価の1つとして、3手法で推算された入射波高に対する波高比の誤差の自乗平均(RMS)

について述べる。図-6に示すように領域は同心円で分割されているので、各同心円上での誤差のRMSと解析対象領域の分割数 $n=L/l$ (表-1参照)との関係を両対数紙上に描くと、図-11が得られる。横軸は進行波の波長と要素サイズとの比であり、領域全体の平均的な分割数の指標を意味する。図中の記号で、例えばR3は仮想境界円より第3番目の同心円を意味する。その他の記号は図-9, 10と同じである。なお、第5同心円(R5)上ではR4上とはほぼ同じ結果が得られたので、R5上の結果は省略されている。

仮想境界円上の誤差についてみると、Run 2, 3に対する3次のIFEMによる誤差はHFEMのものより小さく、境界条件の処理が優れていることを示す。また、1次および3次のIFEMによる誤差のRMSの変化は相似的であり、Run 2からRun 3への分割数の増加の効果が少ないことが判る。

外方より第1, 2, ..., 5同心円、円柱沿いと中心に近づくに

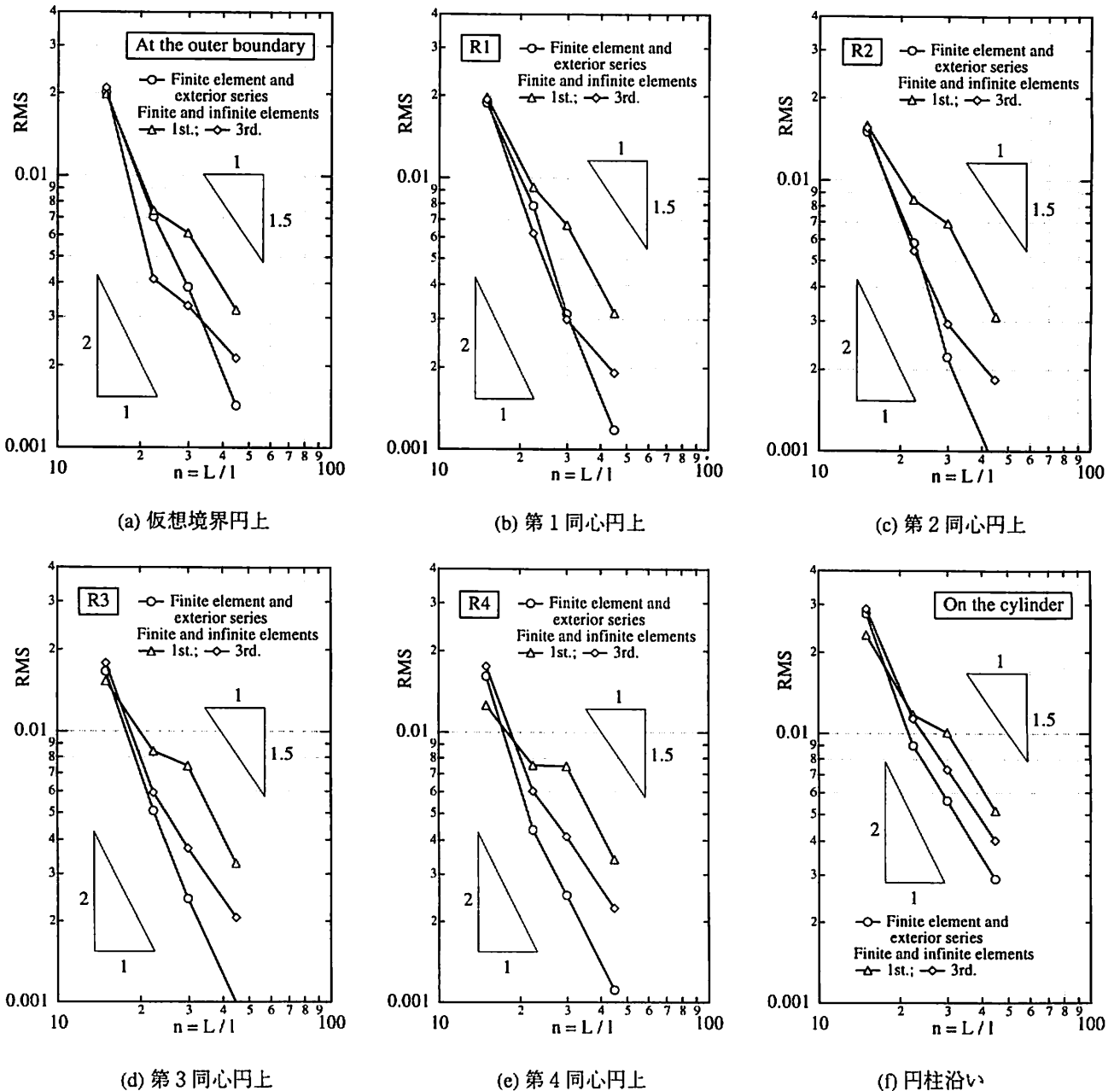


図-11 同心円上における波高比の誤差のRMSと分割数との関係

つれて、3次のIFEMによる誤差のRMSは、分割数の増大とともに単調に減少する傾向を示す。また、Run 3に対する1次のIFEMによる推算誤差は、仮想境界円上と同様に、分割数の増加にもかかわらずRun 2と比べてわずかに減少する程度で、この傾向は円柱近くで特に顕著である。

内部領域で線形要素が用いられている場合には、要素内の近似の最大誤差は $O(\Delta^2)$  ( $\Delta$ : 最大要素サイズ) を満たすと考えられ、推算誤差のRMSは $O(n^{-2})$  ( $n$ : 領域の分割数) で与えられる。分割数 $n$ による解の収束性を議論するには、 $kh$ および $kr_0$ を一定として $n$ を変化させるべきであるが、ここでは $kh, kr_0$ がともに変化している。したがって、図-11に基づく収束性に対する直接的な議論はできない。しかし、IFEMおよびHFEMによる誤差のRMSの勾配は-1.5~-2であり、上記の誤差特性の一端を示している。

IFEMを用いた場合のRun 2からRun 3における誤差の変化に見られるように、与えられた地形および波浪条件の下で良好な波高推算精度を得るためには、仮想境界円、すなわち、 $kr_0$ の設定、無限要素の次数および最適な要素サイズの見積りが重要であることが判る。

無限要素の次数の増加の効果により、当然ながら、3次のIFEMが1次のIFEMより優れている。Run 2に対する3次のIFEMによる結果をHFEMの結果と比較すると、3次のIFEMは仮想境界円付近ではHFEMより優れ、円柱付近ではやや劣る。HFEMにおいては散乱振幅を十分満たすように仮想境界円上での境界解を定めているが、3次のIFEMにおいては $O(r^{-5/2})$ 以上の項は無視されている。このような仮想境界円上での境界条件の処理方法の差異が、両者の誤差のRMSの差異として現れていると考えられる。

図-12は、解析領域内の全節点での誤差のRMSと分割数との関係を示す。基本特性は図-11と同じであるが、3次のIFEMはRun 2においてHFEMと同等の推算精度を達成し、Run 3においてもHFEMの結果に近い。領域全体の誤差の程度から判断すると、3次のIFEMによる解析は、図-11にも示されているように、局所的にはHFEMより若干劣ると考えられる。しかし、新しい無限要素はHFEMにおける

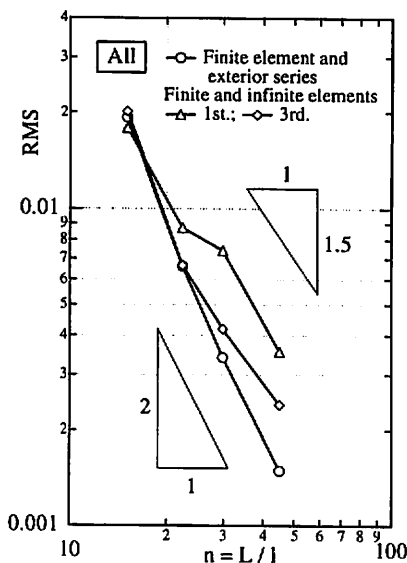


図-12 全域での波高比の誤差のRMSと分割数との関係

取り扱いの煩雑さなどを無くすために提案されたものである。さらに、Run 2, 3における3次のIFEMによる推算波高比の誤差のRMSは、入射波高の高々1%程度である。したがって、新しい無限要素を用いた有限要素解析に対する1指標として、領域を進行波の波長の $1/20-1/25$ の要素サイズで分割し、3次のIFEMを採用すれば、実用的には十分な精度で波高推算が可能である。

### 5. 結 語

本研究では、波動場解析のために前報で提案された新しい無限要素による解析精度の向上を図るため、3次の無限要素を誘導し、その推算誤差の特性を数値計算例により検証した。これらの結果は次のように要約される。

(1) 散乱波の振幅は散乱源から動径方向に減衰するので、正規 $(\xi, \eta)$ 系において、 $\xi$ 方向には $\rho^{-m}$ および $\rho^{-3m}$ のモードが再現可能であり、 $\eta$ 方向には物理変数の線形変化を仮定した特殊な無限要素が提案された。

(2) しかし、無限要素と解析領域内の要素との結合が簡単で、かつ内部要素の形状に左右されないこと、および要素積分が陽に表示されるという可積分性などの基本的な特性は保たれている。

(3) 3次の無限要素に基づく有限要素法は、境界解を用いるHFEMと比較すると推算精度は極わずかに劣るが、仮想境界円の設定および要素サイズとの整合性を図ることにより、十分実用に供することができる。

### 参 考 文 献

菊池文雄・岡部政之(1986)：有限要素システム入門，日科技連，東京，191pp。  
 田中 清(1956)：円形島による波の回折，土木学会，第3回海岸工学講演会講演集，pp.33-35。  
 筒井茂明・大木洋典(1998)：スロープおよびステップ型リーフ上での波の非線形挙動，海岸工学論文集，Vol.45, JSCE, pp.41-45。  
 筒井茂明(1999a)：沿岸開領域における非線形波動解析のための新しい無限要素，琉球大学工学部紀要，Vol.58, pp.17-27。  
 筒井茂明(1999b)：沿岸開領域における波動場解析のための新しい無限要素，海岸工学論文集，Vol.46, JSCE, pp.81-85。  
 Bettess, P. C. Emson and T. C. Chiam (1984)：A new mapped infinite element for exterior wave problems, Numerical Methods in Coupled Systems, John Wiley Sons Ltd., pp.489-504。  
 Chen, H. S. and C. C. Mei (1975)：Hybrid-element method for water waves, Proc. Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975), Vol.1, pp.63-81。  
 Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1992)：Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol.34, pp.145-158。  
 Tsutsui, S. and K. Zamami (1993)：Jump condition of energy flux at the line of bathymetric discontinuity and wave breaking on the reef flat, Coastal Eng. in Japan, JSCE, Vol.36, pp.155-175。  
 Tsutsui, S., K. Suzuyama and H. Ohki (1998)：Model equations of nonlinear dispersive waves in shallow water and an application of its simplest version to wave evolution on the step-type reef, Coastal Eng. Jour., JSCE, Vol.40, No.1, pp.41-60。  
 Zienkiewicz, O. C., K. Bando, P. Bettess, C. Emson and T. C. Chian (1985)：Mapped infinite elements for exterior wave problems. Int. Jour. for Nemer. Methods in Eng., Vol.21, pp.1229-1251。

付録. 3次の無限要素による要素行列

外部領域  $\Omega_2$  での水深を一定と仮定し, 式(7)の左辺第2項を無限要素により離散化すると, 要素行列  $\{K^\infty\}$  の成分は次式で表される.

$$K_{ij}^\infty = cc_g \iint_{\Omega_2^e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dx \, dy - \omega^2 (c_g / c) \iint_{\Omega_2^e} N_i N_j \, dx \, dy \quad (A1)$$

ここで, 式(16)および(21)で構成される3次の無限要素を用いると, 要素行列の成分  $K_{ij}^\infty$  は以下の諸式で与えられる.

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_1 / \partial x)^2 \, d\Omega_2 = \frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{11} I_{2m+1} - 8S_{21} I_{4m+1} + 16S_{31} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_1 - i\Delta y (S_{71} I_{2m} - 4S_{81} I_{4m} + 16S_{91} I_{6m}) \right\} \quad (A2.1)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_1 / \partial y)^2 \, d\Omega_2 = \frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{12} I_{2m+1} - 8S_{22} I_{4m+1} + 16S_{32} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_1 - i\Delta x (S_{72} I_{2m} - 4S_{82} I_{4m} + 16S_{92} I_{6m}) \right\} \quad (A2.2)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_2 / \partial x)^2 \, d\Omega_2 = \frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{13} I_{2m+1} - 8S_{23} I_{4m+1} + 16S_{33} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_1 + i\Delta y (S_{73} I_{2m} - 4S_{83} I_{4m} + 16S_{93} I_{6m}) \right\} \quad (A2.3)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_2 / \partial y)^2 \, d\Omega_2 = \frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{14} I_{2m+1} - 8S_{24} I_{4m+1} + 16S_{34} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_1 + i\Delta x (S_{74} I_{2m} - 4S_{84} I_{4m} + 16S_{94} I_{6m}) \right\} \quad (A2.4)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_3 / \partial x)^2 \, d\Omega_2 = \frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{11} I_{2m+1} - 2S_{21} I_{4m+1} + S_{31} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_3 - i\Delta y (S_{71} I_{2m} - S_{81} I_{4m} + S_{91} I_{6m}) \right\} \quad (A2.5)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_3 / \partial y)^2 \, d\Omega_2 = \frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{12} I_{2m+1} - 2S_{22} I_{4m+1} + S_{32} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_3 - i\Delta x (S_{72} I_{2m} - S_{82} I_{4m} + S_{92} I_{6m}) \right\} \quad (A2.6)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_4 / \partial x)^2 \, d\Omega_2 = \frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{13} I_{2m+1} - 2S_{23} I_{4m+1} + S_{33} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_3 + i\Delta y (S_{73} I_{2m} - S_{83} I_{4m} + S_{93} I_{6m}) \right\} \quad (A2.7)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} (\partial N_4 / \partial y)^2 \, d\Omega_2 = \frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{14} I_{2m+1} - 2S_{24} I_{4m+1} + S_{34} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_3 + i\Delta x (S_{74} I_{2m} - S_{84} I_{4m} + S_{94} I_{6m}) \right\} \quad (A2.8)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \, d\Omega_2 = -\frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{15} I_{2m+1} - 4S_{25} I_{4m+1} + 16S_{35} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 C_1 - i(\Delta y)^2 D_1 \right\} \quad (A2.9)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \, d\Omega_2 = -\frac{A^2}{216\Delta} \left\{ S_{16} I_{2m+1} - 4S_{26} I_{4m+1} + 16S_{36} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_1 - i(\Delta x)^2 D_1 \right\} \quad (A2.10)$$

$$\iint_{\Omega_2^e} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} \, d\Omega_2 = -\frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{11} I_{2m+1} - 5S_{21} I_{4m+1} + 4S_{31} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_2 - i\Delta y (S_{71} I_{2m} - \frac{5}{2}S_{81} I_{4m} + 4S_{91} I_{6m}) \right\} \quad (A2.11)$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega_2 = -\frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{12} I_{2m+1} - 5S_{22} I_{4m+1} + 4S_{32} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_2 - i\Delta x \left( S_{72} I_{2m} - \frac{5}{2} S_{82} I_{4m} + 4S_{92} I_{6m} \right) \right\} \quad (\text{A2.12})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} d\Omega_2 = \frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{15} I_{2m+1} - S_{27} I_{4m+1} + 4S_{35} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 C_2 - i(\Delta y)^2 D_2 \right\} \quad (\text{A2.13})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} d\Omega_2 = \frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{16} I_{2m+1} - S_{28} I_{4m+1} + 4S_{36} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_2 - i(\Delta x)^2 D_2 \right\} \quad (\text{A2.14})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega_2 = \frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{15} I_{2m+1} - S_{29} I_{4m+1} + 4S_{35} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 C_2 - i(\Delta y)^2 D_2 \right\} \quad (\text{A2.15})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega_2 = \frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{16} I_{2m+1} - S_{210} I_{4m+1} + 4S_{36} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_2 - i(\Delta x)^2 D_2 \right\} \quad (\text{A2.16})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} d\Omega_2 = -\frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{13} I_{2m+1} - 5S_{23} I_{4m+1} + 4S_{33} I_{6m+1} - (\Delta y)^2 C_2 + i\Delta y \left( S_{73} I_{2m} - \frac{5}{2} S_{83} I_{4m} + 4S_{93} I_{6m} \right) \right\} \quad (\text{A2.17})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} d\Omega_2 = -\frac{A^2}{27\Delta} \left\{ S_{14} I_{2m+1} - 5S_{24} I_{4m+1} + 4S_{34} I_{6m+1} - (\Delta x)^2 C_2 + i\Delta x \left( S_{74} I_{2m} - \frac{5}{2} S_{84} I_{4m} + 4S_{94} I_{6m} \right) \right\} \quad (\text{A2.18})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} d\Omega_2 = -\frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{15} I_{2m+1} - S_{25} I_{4m+1} + S_{35} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 C_3 - i(\Delta y)^2 D_3 \right\} \quad (\text{A2.19})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} d\Omega_2 = -\frac{8A^2}{27\Delta} \left\{ S_{16} I_{2m+1} - S_{26} I_{4m+1} + S_{36} I_{6m+1} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_3 - i(\Delta x)^2 D_3 \right\} \quad (\text{A2.20})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} N_1^2 d\Omega_2 = \iint_{\Omega_2^c} N_2^2 d\Omega_2 = 2 \iint_{\Omega_2^c} N_1 N_2 d\Omega_2 = \frac{2}{27} A^2 \Delta (2kr_0)^{-2} C_1 \quad (\text{A2.21})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} N_3^2 d\Omega_2 = \iint_{\Omega_2^c} N_4^2 d\Omega_2 = 2 \iint_{\Omega_2^c} N_3 N_4 d\Omega_2 = \frac{128}{27} A^2 \Delta (2kr_0)^{-2} C_3 \quad (\text{A2.22})$$

$$\iint_{\Omega_2^c} N_1 N_3 d\Omega_2 = \iint_{\Omega_2^c} N_2 N_4 d\Omega_2 = 2 \iint_{\Omega_2^c} N_1 N_4 d\Omega_2 = 2 \iint_{\Omega_2^c} N_2 N_3 d\Omega_2 = -\frac{16}{27} A^2 \Delta (2kr_0)^{-2} C_2 \quad (\text{A2.23})$$

ただし、 $\Delta = \frac{1}{2} \{x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)\}$  は補要素 $\Omega_2^c$ の面積であり、 $\Delta x = x_2 - x_1$ 、 $\Delta y = y_2 - y_1$  および

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (m+1)\Delta y, & d_1 &= (m+1)\Delta x, & b_2 &= (3m+1)\Delta y, & d_2 &= (3m+1)\Delta x \\ a_1 &= 2(y_2 - y_0) - b_1, & a_2 &= 2(y_1 - y_0) + b_1, & a_3 &= 2(y_2 - y_0) - b_2, & a_4 &= 2(y_1 - y_0) + b_2 \\ c_1 &= 2(x_2 - x_0) - d_1, & c_2 &= 2(x_1 - x_0) + d_1, & c_3 &= 2(x_2 - x_0) - d_2, & c_4 &= 2(x_1 - x_0) + d_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

と置くと、式(A2)中の係数 $S_{ij}$ 、 $C_i$ 、および $D_i$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ )は以下の諸式で与えられる。

$$S_{11} = 3a_1^2 + b_1^2, S_{12} = 3c_1^2 + d_1^2, S_{13} = 3a_2^2 + b_1^2, S_{14} = 3c_2^2 + d_1^2, S_{15} = 3a_1a_2 + b_1^2, S_{16} = 3c_1c_2 + d_1^2 \quad (A4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{21} &= 3a_1a_3 + b_1b_2, S_{22} = 3c_1c_3 + d_1d_2 \\ S_{23} &= 3a_2a_4 + b_1b_2, S_{24} = 3c_2c_4 + d_1d_2 \\ S_{25} &= 3a_1a_4 + 3a_2a_3 + 2b_1b_2, S_{26} = 3c_1c_4 + 3c_2c_3 + 2d_1d_2 \\ S_{27} &= 3a_1a_4 + 12a_2a_3 + 5b_1b_2, S_{28} = 3c_1c_4 + 12c_2c_3 + 5d_1d_2 \\ S_{29} &= 12a_1a_4 + 3a_2a_3 + 5b_1b_2, S_{210} = 12c_1c_4 + 3c_2c_3 + 5d_1d_2 \end{aligned} \right\} \quad (A4.2)$$

$$S_{31} = 3a_3^2 + b_2^2, S_{32} = 3c_3^2 + d_2^2, S_{33} = 3a_4^2 + b_2^2, S_{34} = 3c_4^2 + d_2^2, S_{35} = 3a_3a_4 + b_2^2, S_{36} = 3c_3c_4 + d_2^2 \quad (A4.3)$$

$$S_{71} = 3a_1 - b_1, S_{72} = 3c_1 - d_1, S_{73} = 3a_2 + b_1, S_{74} = 3c_2 + d_1 \quad (A4.4)$$

$$S_{81} = 3a_1 + 3a_3 - b_1 - b_2, S_{82} = 3c_1 + 3c_3 - d_1 - d_2, S_{83} = 3a_2 + 3a_4 + b_1 + b_2, S_{84} = 3c_2 + 3c_4 + d_1 + d_2 \quad (A4.5)$$

$$S_{91} = 3a_3 - b_2, S_{92} = 3c_3 - d_2, S_{93} = 3a_4 + b_2, S_{94} = 3c_4 + d_2 \quad (A4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= I_{2m-1} - 8I_{4m-1} + 16I_{6m-1} \\ C_2 &= I_{2m-1} - 5I_{4m-1} + 4I_{6m-1} \\ C_3 &= I_{2m-1} - 2I_{4m-1} + I_{6m-1} \end{aligned} \right\} \quad (A4.7)$$

$$I_0 = \int_{\rho_0}^{\infty} e^{-iz} dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\rho_0}^T e^{-iz} dz = -ie^{-i\rho_0} \quad (A6.1)$$

$$I_1 = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{z} e^{-iz} dz = -Ci(\rho_0) - i \left\{ \frac{\pi}{2} - Si(\rho_0) \right\} \quad (A6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (2m-1)I_{2m} - 8(4m-1)I_{4m} + 16(6m-1)I_{6m} \\ D_2 &= (2m-1)I_{2m} - 5(4m-1)I_{4m} + 4(6m-1)I_{6m} \\ D_3 &= (2m-1)I_{2m} - 2(4m-1)I_{4m} + (6m-1)I_{6m} \end{aligned} \right\} \quad (A4.8)$$

$n \geq 2$ に対しては, 次の漸化式が成立する.

$$I_n = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{z^n} e^{-iz} dz = \frac{e^{-i\rho_0}}{(n-1)\rho_0^{n-1}} - \frac{i}{n-1} I_{n-1} \quad (A6.3)$$

また, 積分 $I_{j+k}$ は次式で定義される.

$$I_{j+k} = \rho_0^j \int_{\rho_0}^{\infty} z^{-(j+k)} e^{-iz} dz \quad (A5)$$

ただし,  $\rho_0 = 2kr_0$ ;  $j = 2m, 4m, 6m$ ;  $k = -1, 0, 1$ である.

さらに, 式(A5)を算定する際に必要な積分 $I_n$  ( $n \geq 0$ )は以下の諸式で与えられる.

なお, 積分 $I_1$ 中の $Si$ および $Ci$ は次式で定義されるFresnelの正弦および余弦積分である.

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \int_z^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad (A7.1)$$

$$Ci(z) = - \int_z^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \quad (A7.2)$$