

# 琉球大学学術リポジトリ

## 波浪変形解析のための有限要素網生成

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2007-10-28 キーワード (Ja): キーワード (En): Mesh generation, Generation front, Finite element, Wave deformation 作成者: 筒井, 茂明, Tsutsui, Shigeaki メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/2223">http://hdl.handle.net/20.500.12000/2223</a>

# 波浪変形解析のための有限要素網生成

筒井 茂明\*

## Finite Element Mesh Generation for Analyses of Coastal Wave-Deformation

Shigeaki TSUTSUI\*

### Abstract

Because of recent developments of mathematical and physical arithmetic in improvement of analytical accuracy, e.g., spectral/*hp* element methods, the finite element method is of further importance for making progress in computer fluid dynamics. In application of this method to large scale engineering problems with complex boundaries, a first difficulty is automatic mesh generation. The present paper describes a method of two-dimensional finite element mesh generation, developed with a concept of the generation front and included in CATWAVES – Wave Analysis System: concretely, with the aid of a simple example for coastal wave-deformation, they are the ways to divide and specify a region of analysis, to generate mesh in each subregion under distribution of internal nodes, and finally to interpolate the nodal water depth. In addition, examples of particular mesh generation are demonstrated to model regions composed of coastal structures. The schemes of present mesh generation are found to be effective and reliable, and are available to the other fields of problems.

**Key Words:** Mesh generation, Generation front, Finite element, Wave deformation.

### 1. 緒言

有限要素法は、工学の諸問題に対する微分方程式の数値解法として一般性が高く、有限差分法などと比べて境界条件の取り扱いに優れている。その応用には、数学・コンピュータソフトウェア技術などの様々な周辺技術が不可欠となっている。有限要素法は境界形状が複雑な系を対象としていることから、いろいろな分野での大規模な解析において最初に問題となるのは、解析に必要な要素網の自動生成である。

河口域での流れあるいは沿岸域での波動の問題では、2次元問題の場合においても、解析対象領域は幾何学的に複雑な平面地形を持つと共に、各地点における水深が変化する。この水深情報の適否は、解析結果の妥当性および精度に影響を及ぼす。

解析が物理的に妥当であるためには、海岸地形が要素網によつて的確に再現される—水深が現地特性に応じて定められる—ことが肝要である。したがって、そのための方策の

1つは、要素網生成のための入力データとして、等深線に沿った地形情報を用いることである。解析精度に影響を及ぼす要素形状としては、要素生成法への信頼性、その汎用性と利便性、あるいは解析精度向上のための要素再分割の必要性 (Zienkiewicz & Taylor, 1991)などを考慮すると、非構造格子が適切であり、三角形要素が汎用される。その際の要素条件として、サイズは水深変化と共に滑らかに変化し、形状はできるだけ正三角形に近いことが望まれる。

代表的な要素生成法としては、デローニー (Delauney) 三角分割法 (Bowyer, 1981; Watson, 1981; Norman & David, 1992; 谷口建男, 1992) や前進先端法 (Peraireら, 1987) が挙げられる。

前者は、“与えられた節点に対して生成された三角形の内角の等角条件が満たされる”、“個々の三角形要素の外接円はその内部に他の要素節点を含まない”という数学的事実などの理由から、要素生成の基本として広く利用されている。この方法では、要素生成の開始時に、入力された全節点を包含する仮想の三角形が用いられる。その結果、要素網には不必要な三角形要素が内・外部境界において生成されるので、これらを取り除く必要がある。また、得られる三角形要素網の良否は、要素生成時に用いられる領域内での節点

受理：2003年6月23日

\* 琉球大学工学部 環境建設工学科

Dept. of Civil Engineering and Architecture, Faculty of Engrg.

E-mail: shigety@tec.u-ryukyu.ac.jp

配置の状況に強く依存する。

後者においては、要素生成領域に対する閉境界を考え、これに属する個々の辺を底辺として三角形要素を作成することができる場合、この閉境界を要素生成過程における先端 (generation front) と定義し、要素生成の基礎とする。したがって、要素生成のためには、この閉境界上に所要の間隔で節点を与えるだけでよく、特定の最適条件に基づき内部に節点が発生され、三角形要素の生成が進められる。

有限要素解析は、これまでの解析精度向上に対する各種算法の飛躍的な進展 (Patera, 1984; Babuska & Suri, 1994; Karniadakis & Sherwin, 1999) と相まって、今後共その重要性は高くなるであろう。と同時に、その要素生成法への依存度は有限差分法などの他の解析法より高く、有限要素解析の基礎となる自動要素生成法が希求される所以である。

波浪解析システム: CATWAVES (Tsutsui, 1990, 2001) においても、前進先端法に類似の方法に基づく有限要素網生成ルーチンが組み込まれている。このルーチンは、簡便かつ汎用性があり、他の分野への適用も容易である。また、得られる三角形要素網は、前述の要素条件を近似的に満たす。ここでは、沿岸域での波動問題を例に採り、CATWAVESに組み込まれている自動要素生成ルーチンの要点を具体的に説明し、今後の参考に供する。その構成は次の通りである。

§2では、有限要素網生成領域の分割方法および個々の領域の定義方法が、ホモロジーの概念に基づいて述べられる。各領域での三角形要素網の生成方法については、§3において、領域内節点の配置法および要素生成のための節点の選択方法とともに論じられる。要素網を完結するための要素節点での物理常数 (ここでは、水深) の設定方法は§4で述べられる。その際にも、§3で示される三角形要素網の生成機能が重要な役割を担っていることが判明する。さらに、海岸構造物を対象とした特殊な領域については、§5において取り扱われる。§6では、以上の結果がとりまとめられる。

## 2. 有限要素網生成領域の構成

数値解析精度は、要素のサイズおよび形状に依存する。要素サイズは、水深に依存する波の波長に応じて各地点で変化させる必要がある。また、大規模な問題では、数値計算上も、解析対象領域を小領域に分割して処理することが得策である。さらに、水深急変部を取り扱う問題などでは、地形的に領域を分割する必要に直面する。ここでは、このような状況を考慮し、解析対象領域の分割およびその定義方法について述べる。

### 2.1 領域を構成する線分

沿岸領域を定める境界線には、(1) 海岸線や汀線などの領域境界線、(2) 海域に点在する島や海岸構造物などの領域内境界線、および(3) 潜堤やリーフ先端部に沿って水深が階段状に変化する場合は、領域内の不連続境界線が考えられる。

三角形要素網を生成するときには、通常、全領域を小領域に分割し、個々の領域において三角形要素網を生成した後、まとめて全領域の要素網を構築する方法が採られる。したがって、全領域を小領域に分割する過程において、次のような線分が新たに発生する。

(1) 等深線に沿った境界線；流れや波動の問題での重要な情報は各要素節点における水深である。水深を適切に定め、

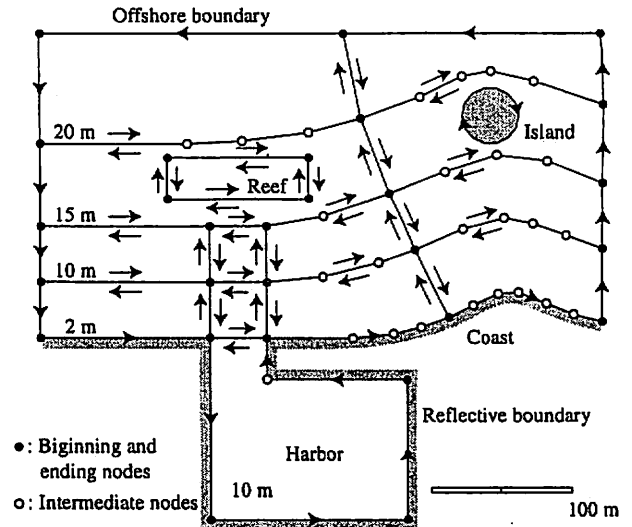


図-1 有限要素網の生成領域とその分割

現地海岸地形を再現するためには、領域分割のための仮想境界線を等深線に沿って配置することが重要である。

### (2) 領域分割に必要な等深線を結ぶ仮想境界線

図-1は沿岸部の港周辺の領域分割例を示す。湾口部には浚渫された一定水深の海域があり、その沖側に矩形の人工リーフが設置されている。ただし、●は境界線の始点および終点となる節点、○は領域分割に必要な中間節点である。外周の線分は、海岸線、護岸、および領域特定のための仮想境界線により成る。解析対象領域は、理論上は沖方向に無限遠まで広がっているが、数値計算上は有限な範囲に制限される。領域内部には、島による領域内境界線、領域を分割するための等深線に沿った境界線、等深線間を結ぶ境界線、人工リーフおよび浚渫部に沿った水深が急変する不連続境界線などが存在する。

### 2.2 ホモロジー

分割された小領域における海岸地形は多面体である。多面体はポリゴン面の集まりとして、また、各ポリゴン面は向きが付けられた線分の集まりとしての閉境界によって表現される。要素網を生成する際には、各線分にホモロジーを付加する、すなわち、各領域の閉境界においてその向きを定義すると好都合である。

図-2(1)は閉領域 (ポリゴン面)  $M$  の境界に向きを付けた例である。ここでは反時計回りの向きを正の向きと定義

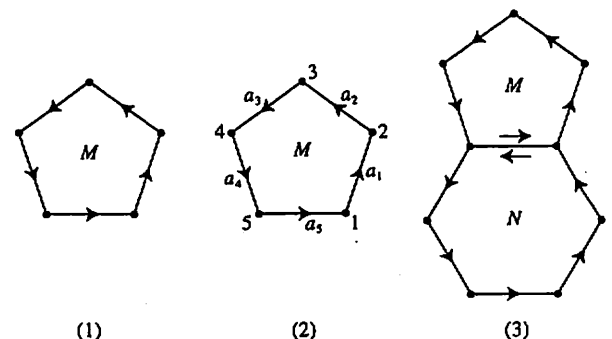


図-2 閉境界でのホモロジーの定義；(1) 正のホモロジー、(2) 閉境界を構成する辺とその始点および終点、(3) 2つの向きを持つ2閉境界の共通辺

する。したがって、閉境界に沿って動くとき、対象とする領域  $M$  を左手に見る向きを正とし、以下では、これを正のホモロジーと呼ぶ。

これらの閉境界は、図-2 (2) に示すように、向きを持った辺 (線分  $a_1, a_2, \dots$ ) で構成され、各辺は始点および終点で定義される。例えば、線分  $a_1$  の始点および終点はそれぞれ節点 1, 2 である。また、連結された 2 領域の閉境界での共通辺は、図-2 (3) に示すように、逆方向の 2 つの向きを持つ。このとき  $M, N$  は同調に向きづけられた閉領域と呼ばれる。

要素網生成のために分割された各領域の閉境界に対して、以上のように向きを定めると、相隣る 2 つの領域の向きづけが同調であるようにできる。図-1 における矢印は、各線分に向きづけが行なわれた結果であり、以下のことが明らかになる。

- (1) 全領域を取り囲む外周の閉境界は、全て反時計回りの正の向きを持つ辺 (線分) で構成される。
- (2) 領域内に点在する島々や海岸構造物などの境界に沿っては、対象とする海域を左手に見るように向きを付けるので、これらに対しては時計回りに向きづけが行われる。
- (3) 領域分割後の内部の仮想境界は逆方向の 2 つの向きを持つ。しかし、要素網生成用の入力データにおいては、この境界上の辺の始点および終点の定義 (順序づけ) は、便宜上、一方の領域に対して正のホモロジーを持つように定める。
- (4) 潜堤やリーフなどの水深不連続線を持つ海域がある場合にも、(3) と同様に、不連続線上では逆方向の 2 つの向きが存在する。したがって、この海域が閉領域のときに限り、閉海域に対して正のホモロジーを付加し、反時計回りに順序づけを行う。
- (5) 逆方向の 2 つの向きを持つ (3), (4) の場合には、必要ならば要素網を生成する際に、個々の領域における閉境界が正のホモロジーを持つようにその向きを再定義する。

### 2.3 個々の領域の定義

上述のようにホモロジーが付加された線分を組み合わせると、各領域を定義することができる。例として、図-3 に示すように、領域内に島および水深不連続部がある場合を考える。全領域は小領域 I, II, III, IV に分割され、境界を構成するための線分 ①-⑨ は、次のように向きづけ (順序づけ) される。

- |              |               |
|--------------|---------------|
| ① : 1-2-3    | ② : 3-9       |
| ③ : 9-1      | ④ : 9-7       |
| ⑤ : 7-8-1    | ⑥ : 3-4-5-6-7 |
| ⑦ : 10-11-12 | ⑧ : 12-13-10  |
| ⑨ : 14-14    |               |

ただし、閉領域 IV の境界に沿った水深は、階段状に急変し、不連続になっている。したがって、各領域は、これらの線分を用いて、次のように定義することができる。

- 領域 I : ①-②-③  
 領域 II : ④-⑤-③-⑨  
 領域 III : ⑥-④-②-⑦-⑧  
 領域 IV : ⑦-⑧

領域定義の際の注意点は以下の通りである。

- (1) 最初の線分 (この例では、線分 ①, ④, ⑥, ⑦) は、対象

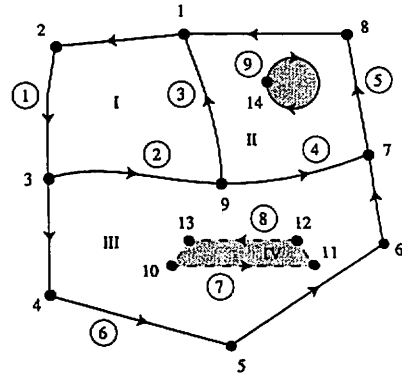


図-3 領域の分割とその定義

領域に対して正のホモロジーが付加されていること。

- (2) 閉領域が構成されていること。
- (3) 閉境界の共通な線分 (②, ③, ④, ⑦, ⑧) は逆方向の 2 つの向きを持つので、そのホモロジーは §2.2 (3), (4) にしたがって便宜的に定められていること。ただし、必要ならば、最初の線分の始点および終点の情報を用いて、これら共通な線分が個々の領域に対して正のホモロジーを持つように、その向きが要素網生成時に再定義される。

### 2.4 領域構成に用いられる線分

分割された各領域は、一般的に、図-4 に示す 3 つの基本線分により構成される。

- (1) 折れ線; この線分は、図-4 (1) に示すように、向きづけされた直線により構成される。各節点では座標値および水深が与えられる。節点間には、所要の要素サイズに応じて中間節点が自動生成され、そこでの座標値および水深は、始点および終点での値を用いて線形補間される。
- (2) 任意の曲線; これは上記 (1) の特別な場合で、図-4 (2) に示すように、向きづけされた直線により曲線を近似するための線分である。ただし、各節点は節点間の距離が所要の要素サイズに相当するように設定されているので、節点間に中間節点は生成されない。

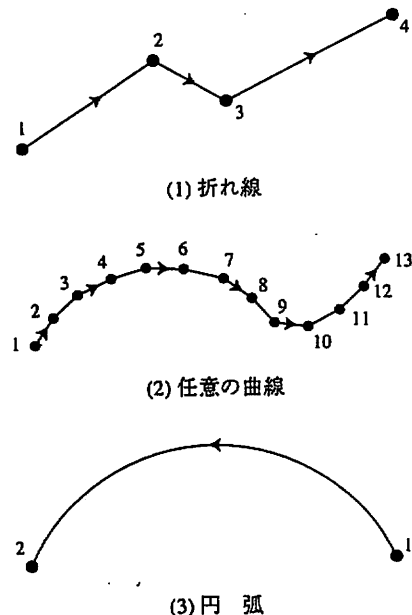


図-4 領域を構成する基本線分

(3) 円弧；この線分は、図-4(3)に示すように、反時計回りに向きづけされている。2 節点では座標値および水深が与えられ、円弧上には所要の要素サイズに応じて中間節点が自動生成される。ただし、中間節点での水深の設定については、各種の地形条件を考慮する必要があるため、§4において述べる。特別な場合として、始点と終点が一致するときには、この線分は円となる。

現地への適用性を考慮すると、海岸構造物などで構成される特殊な領域をモデリングするため、さらに、円弧を用いた以下の線分が有効である。

- (1) 扇面領域；この領域は、図-5(1)に示すように、2 同心円弧の始点および終点をそれぞれ直線で連結して得られ、2 円弧を結ぶ直線および内側の円弧部が護岸などの波の反射境界となる場合に限り有効である。
- (2) 円環領域；上記(1)において円弧の始点と終点が一致する場合、図-5(2)に示す円環領域が得られる。ただし、この領域では、内側の円が円柱による波の反射境界となる。
- (3) 扇形領域；この領域は、図-5(3)に示すように、偶角部を持つ埋め立て地護岸などに適用され、扇形の直線部が波の反射境界となる場合にのみ有効である。
- (4) 円盤領域；この領域は、図-5(4)に示す円内の領域が浅瀬などの場合に適用される。

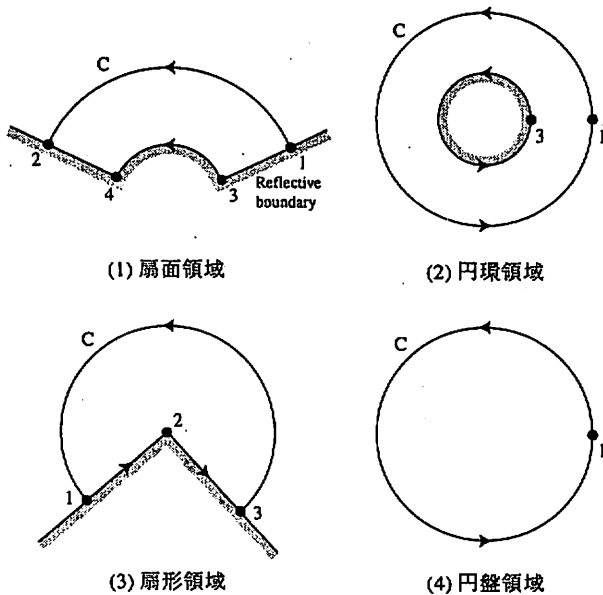


図-5 円弧により構成される特殊な領域

これらの特殊な領域においては、図中にCで示された円弧または円が、前述の領域を構成するための基本線分の円弧である。ただし、これらの円弧または円は領域内の仮想境界であり、波の反射境界としては取り扱えない。

以上の4 領域においては、所要の要素サイズに応じて、同心円上に節点が配置された放射状の三角形要素が自動生成される(付録)。なお、要素節点における水深の設定については、§4において述べる。

### 3. 個々の領域における三角形要素網の生成

個々の領域が定義された後、領域内に三角形要素網を生成する方法について述べる。

#### 3.1 領域内節点の配置

生成される三角形要素網の良否は、領域内部における節点配置(要素サイズとその形状)に左右される。流れや波動の問題における要素サイズは、各要素節点での水深に依存し、水深変化と共に領域内で滑らかに変化することが望ましい。一方、有限要素法による数値計算誤差を小さくするためには、個々の三角形要素はできるだけ正三角形に近いことが望ましい。しかし、両者を同時に満たすことは困難であるので、以下では次のような方法が採られる。

時間差分が必要な非定常問題の解析では、要素サイズはクーラン(Courant)数:  $C = c\Delta t / \Delta l$  ( $c$ : 進行波の局所波速,  $\Delta t$ : 時間差分間隔,  $\Delta l$ : 空間差分間隔) が一定となるように決定され、数値計算の安定性と精度の向上が図られる(例えば, Kashiyama & Okada, 1992)。定常問題に対する有限要素解析においては、上述の関係は、進行波の局所波長と要素サイズとの比が一定となることに相当する。したがって、要素サイズとして、分割された個々の領域における平均水深に対する進行波の波長の1/15-1/20を採用する。

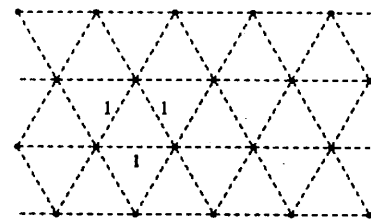


図-6 千鳥格子状の節点分布

一方、正三角形に近い要素を生成するため、図-6に示すような、所要サイズの正三角形の頂点より成る千鳥格子状の節点分布を用いる。この分布と各領域とが重ね合わせられ、内部節点が配置される。ただし、閉境界近くでは、閉境界上の最も近い節点への距離が要素サイズの35%より長い場合に、節点が配置される。このような節点配置の結果、各領域の中央付近では正三角形に近い要素網が生成される。

#### 3.2 領域内節点の選択

閉境界上で1 辺が与えられた場合、これを底辺とする三角形要素生成のための第3 節点の決定法について述べる。

##### (1) 第3 節点の一次選択

§2.2で述べた一般的な閉領域と同様に、生成される要素網の個々の三角形に対しても正のホモロジーを付加する。すなわち、三角形の3 辺に反時計回りの向きを付ける。したがって、例えば、図-7の辺1-2に対する所要の第3 節点は、有向辺1-2の左側に位置しなければならない。有向辺と節点との位置関係の判定アルゴリズムは以下の通りである。

(a) 有向辺1-2の左側に位置する節点 $k$ を用いた三角形 $12k$ に対しては、正のホモロジーが付されるので、次式で与えられる三角形の面積 $S_{12k}$ は正值を採る。

$$S_{ijk} = \frac{1}{2} \{ x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) \} \quad (1)$$

ただし、 $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, 2, k$ ) は節点 $l$ の座標である。一方、有向辺1-2の右側に位置する節点 $k$ を用いた三角形は、時計回りの負のホモロジーを持つので、 $S_{12k} < 0$ となる。3 節点1, 2,  $k$

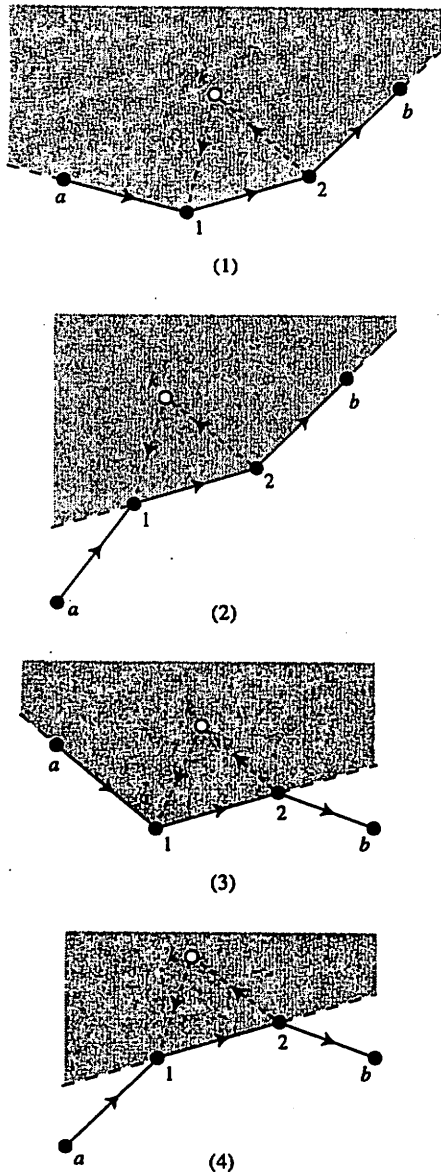


図-7 要素生成のための第3節点の存在範囲

が同一直線上に位置すると、 $S_{12k} = 0$ となる。

これらの事実を利用すると、各節点の辺1-2に対する左右の位置関係が容易に判定される。したがって、 $S_{12k} > 0$ となる節点  $k$  が第3節点の候補である。

(b)次に、図-7に示すように、節点1,2に連なる2辺の始点および終点をそれぞれ  $a, b$  とすると、対象とすべき第3節点は有向辺  $a-1$  および  $2-b$  にも左右される。これらに対しても上述の (a) と同様の判定が行われる。

節点  $a, b$  が有向辺1-2の左側にあると、2辺 ( $a-1, 1-2$ ) および2辺 ( $1-2, 2-b$ ) がそれぞれ凹形となる。この場合には、第3節点は有向辺  $a-1$  および  $2-b$  の左側に位置しなければならない。以下同様に、3有向辺 ( $a-1, 1-2, 2-b$ ) の関係として、図-7に示す4つの場合が考えられ、第3節点の候補は図中の陰影部に位置する。

節点  $a, b$  に連なる辺を用いて同様の判定を加えることもできるが、節点の一次選択としては以上で十分である。

(2) 第3節点の二次選択

対象となる節点は辺1-2の近くに位置しなければならない

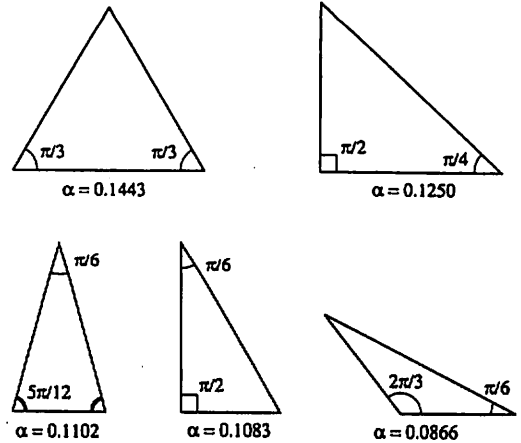


図-8 三角形の形状係数

い。したがって、一次選択された節点に対して、次の方法により二次選択を行う。

辺1-2の中点  $(x_{12}, y_{12})$  からの節点候補  $(x_k, y_k)$  への距離

$$r_k = \sqrt{(x_{12} - x_k)^2 + (y_{12} - y_k)^2} \quad (2)$$

を算定する。ただし、 $x_{12} = (x_1 + x_2)/2$ ,  $y_{12} = (y_1 + y_2)/2$  である。その結果より、距離の最短の方から2つの節点を第3節点の候補として選択する。

(3) 第3節点の決定

三角形の形状特性を示す係数として次式を定義する。

$$\alpha = S_{ijk} / (r_{ij}^2 + r_{jk}^2 + r_{ki}^2) \quad (3)$$

ただし、 $S_{ijk}$  は式(1)で与えられる三角形  $ijk$  の面積、 $r_{ij}$  は辺  $i-j$  の長さである。

図-8は代表的な三角形に対する形状係数  $\alpha$  の変化を示す。正三角形が最大値  $\alpha = 0.1443$  を採り、三角形の内角の1つが  $60^\circ$  より大きく、三角形が扁平になるにつれて、 $\alpha$  は小さくなる。

以下に述べる第3節点の決定においては、式(3)で定められる形状係数を用いたアルゴリズム (Lo, 1985) が採用されている。すなわち、図-9に示すように、2節点3,4が選ばれたとき、いずれの節点を用いれば最適な三角形要素が生成されるかの判定は、以下のように行われる。

2節点3,4に対して、次の形状係数を定義する。

節点3:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= S_{123} / (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2) \\ \beta_1 &= S_{324} / (r_{32}^2 + r_{24}^2 + r_{43}^2) \\ \gamma_1 &= S_{134} / (r_{13}^2 + r_{34}^2 + r_{41}^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\lambda_1 = \max(\beta_1, \gamma_1) \quad (4.2)$$

節点4:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= S_{124} / (r_{12}^2 + r_{24}^2 + r_{41}^2) \\ \beta_2 &= S_{423} / (r_{42}^2 + r_{23}^2 + r_{34}^2) = -\beta_1 \\ \gamma_2 &= S_{143} / (r_{14}^2 + r_{43}^2 + r_{31}^2) = -\gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\lambda_2 = \max(\beta_2, \gamma_2) \quad (5.2)$$

これらの形状係数を用いて、第3節点は次式で決定される。

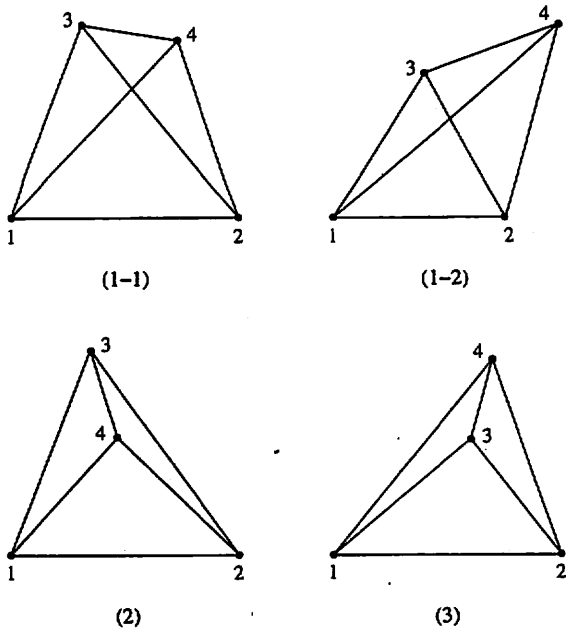


図-9 要素生成のための第3節点の選択

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \lambda_1 > \alpha_2 \lambda_2 \text{ のとき, 節点 } 3 \\ \alpha_1 \lambda_1 < \alpha_2 \lambda_2 \text{ のとき, 節点 } 4 \end{array} \right\} \quad (6)$$

ただし、ホモロジーの定義により  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  である。

図-9 (1-1), (1-2) に示すように、節点 3, 4 が互に他の三角形の外部に位置する場合には、節点 3 に対して  $\beta_1 > 0, \gamma_1 < 0$  であるから  $\lambda_1 = \beta_1$ 、節点 4 に対して  $\beta_2 < 0, \gamma_2 > 0$  であるから  $\lambda_2 = \gamma_2$  となる。このときには、節点 3, 4 共に第3節点に成り得るので、式(6)により最適性が判定される。

いま、図-9 (1-2) に示すように、四辺形 1243 の対角辺 14 が対角辺 23 より長い場合、三角形 124 が三角形 123 に比べて扁平となり、 $\alpha_2 < \alpha_1$  である。また、 $(\lambda_1, \lambda_2) = (\beta_1, \gamma_2)$  により三角形 324, 143 の形状係数が比較され、 $\gamma_2 < \beta_1$  となる。したがって、式(6)により三角形 123 が最適な三角形として選択される。このように、判定式(6)はデローニー三角分割法におけるスワッピング・アルゴリズム (Lawson, 1977; 谷口建男, 1992) と同等の判定機能を持っている。

一方、図-9 (2) に示すように、節点 4 が三角形 123 の内部に位置する場合には、 $\beta_1 < 0, \gamma_1 < 0, \beta_2 > 0, \gamma_2 > 0$  であるから  $\alpha_1 \lambda_1 < 0 < \alpha_2 \lambda_2$  となる。したがって、節点 4 が所要の第3節点であり、三角形 124 が生成される。逆に、図-9 (3) に示すように、節点 3 が三角形 124 の内部に位置する場合には、 $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0, \beta_2 < 0, \gamma_2 < 0$  であるから  $\alpha_1 \lambda_1 > 0 > \alpha_2 \lambda_2$  となる。節点 3 が所要の第3節点であり、三角形 123 が生成される。これらいずれの場合にも、“生成された三角形の中に他の節点が含まれてはならない” という要素の基本条件が自動的に満たされている。

### 3.3 三角形要素網の生成

前述のように、任意の一辺に対して第3節点を選び、三角形要素の生成を順次進めれば、所要の要素網が構築される。ここでは、その方法について述べる。

要素生成開始のための準備として、§2.4, 3.1 で述べた方法によって、対象とする領域の閉境界上および領域内に節

点が適切に配置されているものとする。

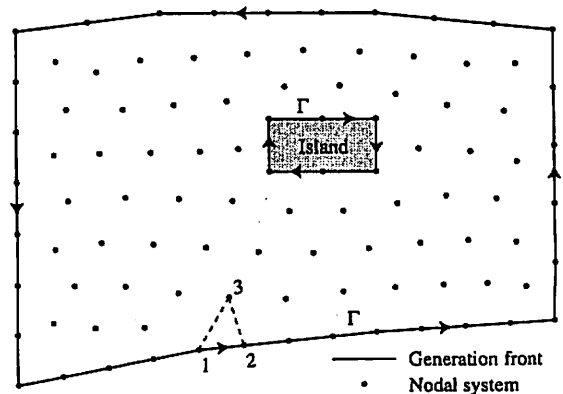
ここで、要素生成のための先端を次のように定義する。要素網が生成されるべき領域を取り囲む閉境界を考え、この閉境界を構成する任意の辺を底辺として三角形要素を作ることができる場合、これらアクティブな辺より成る閉境界を先端と呼ぶ。

要素網生成過程においては、閉境界である先端には1つの向き、内部の2節点により定められる共通辺には2つの向きが付加されるという特性が用いられる。すなわち、新たに生成された三角形の中、先端に属し三角形要素生成に使用された辺は先端から取り除かれる。残された辺は、対象領域に対して正のホモロジーを持つようにその向きが変更された後、先端に加えられる。その結果、先端が再構成される。

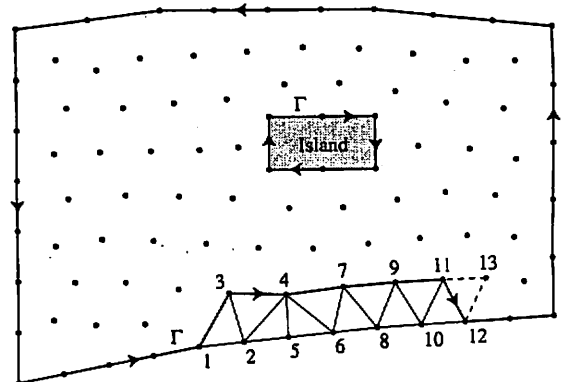
この方法によると、内部の共通辺は、先端に順次組み込まれ、三角形要素の生成に2度使用された時点で先端から取り除かれる。以下では、向きづけられた三角形  $ijk$  において、辺  $i-j, j-k, k-i$  をそれぞれ第1, 2, 3の辺と呼ぶ。

要素網生成の開始時における先端は、定義により、領域の閉境界そのものであり、正のホモロジーが付けられている。図-10 (1) においては、先端は  $\Gamma$  で示され、領域の外周および島の周りの閉境界により構成されている。

いま、図-10 (2) に示すように、辺 1-2 を出発辺として三角形 123 が生成されたとする。この時点では、先端に含まれている辺 1-2 は先端から取り除かれる。代わって2辺 2-3, 3-1の向きを逆にした有向辺 1-3, 3-2 が先端に加えられ、先端  $\Gamma$  が再形成される。

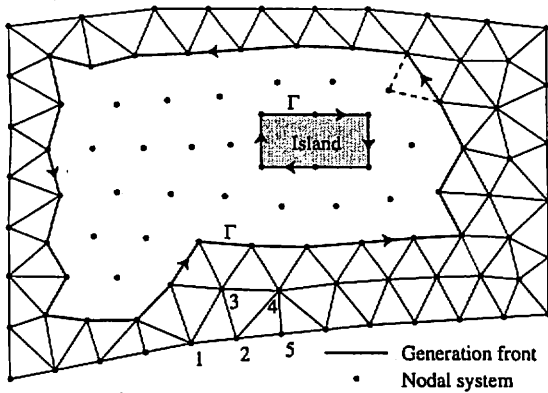


(1) 要素生成開始時における先端

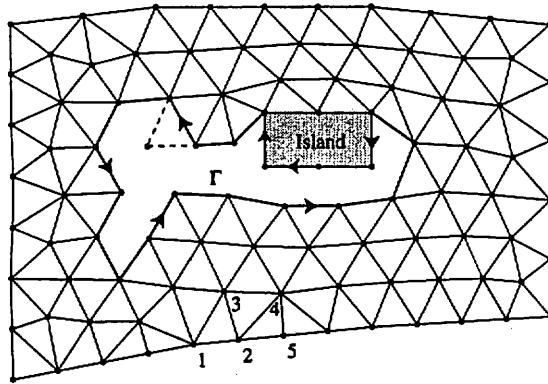


(2) 先端の形成過程

図-10 要素網生成過程における先端と三角形要素網



(3) 中間段階における先端の変化



(4) 最終段階における先端の変化

図-10 続き

次の三角形を生成するときには、先端に加えられた有向辺1-3, 3-2の中で三角形123の第2の辺3-2を底辺として第3節点4が決定される。これを節点4とすると、三角形324が生成される。ここでは、先端に属し要素生成に2度使用された2三角形123, 324の共通辺2-3が先端から取り除かれる。向きづけが変更された2辺3-4, 4-2を新たに取り入れて先端が再構成される。

同様に、三角形324の第2の辺4-2を底辺とする三角形425が生成される。この時点では、先端に属する辺4-2（2度使用された共通辺）および辺2-5が取り除かれ、有向辺4-5が先端に加えられる。

新たに生成された三角形425では、第1, 2の辺が取り除かれているので、第3の辺4-5を底辺とする三角形456が生成される。図-10(2)の太い実線は、以下同様にして、節点12まで要素生成が進められたときの先端Γを示す。

以上のように、生成された三角形の中で、先端に属し三角形要素生成に使用された辺（1-2, 2-3, 2-4, 2-5, ...）を取り除き、残る辺の向きを変えて先端に加えることにより、先端の再構築が繰り返される。

ただし、閉境界の形状によっては、最新の三角形の3辺が先端から同時に取り除かれ、次の三角形要素生成のための辺が一時的に消失する場合がある。このときには、これまでの要素網生成過程を逆にたどり、先端に属する最初のアクティブな1辺を探し出し、その辺を出発点として、三角形要素の生成を進めればよい。

図-10(3)に示す要素生成の中間段階では、先端はなお内

外の2閉境界に分かれているが、最終段階の同図(4)では、これらは連結し、1つの閉境界になっている。

重要なことは、図-10に示すように、三角形要素の生成過程において新たな三角形が生成されるたびに、先端は更新され、その形状が変化することである。また、要素網生成時には、閉境界である先端上およびその内部以外の節点は参照されず、これら節点も要素網生成と共に減少する。要素網の生成が終了した時点では、閉領域内の節点および先端は共に消失する。

以上の方法は、要素網生成の先端を初期の閉境界から領域内部へと順次進める点においては、前進先端法 (Peraireら, 1987) と同じである。ただし、ここでは、数値計算誤差を小さくするため、すなわち、できるだけ正三角形に近い要素が生成されるように、節点は領域内に予め配置されている。さらに、これらの節点を用いて、局所的に最適な三角形要素が得られるように節点の選択が行われる。

なお、領域分割の境界線近くでは、必ずしも正三角形に近い要素が得られないので、スムージング (例えば、Cavendish, 1974) により要素形状の最適化が図られる。すなわち、1節点を取り囲む多角形を求め、この節点を求めた多角形の重心位置に移動する操作を、境界上の節点を除く他の節点に対して繰り返し適用する。

図-11は、沿岸領域の分割例 (図-1) に対し、以上の方法で生成された有限要素解析のための要素網を示す。各領域の境界線から離れた中央付近では正三角形に近い要素が生成されている。要素サイズは沖から岸向きに漸変しているが、その平均的なサイズは、領域単位で変化し、各領域間の境界付近では必ずしも滑らかに変化していない。特に、海岸線近くでは水深が浅いので小サイズの要素網が生成されている。汀線近くでより滑らかな要素サイズの変化を得るためには、当該領域を細分割する必要がある。

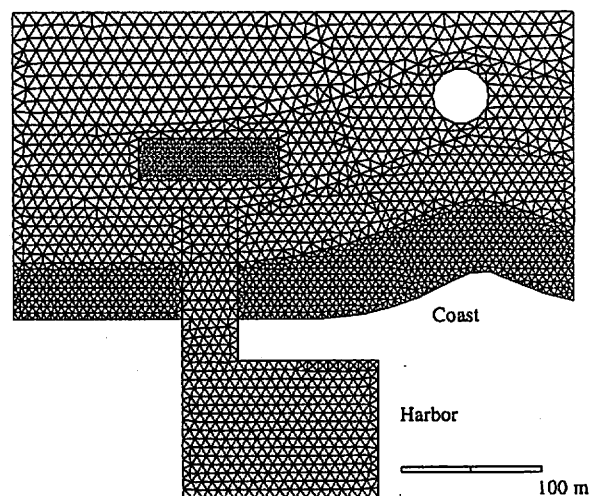


図-11 有限要素解析用の三角形要素網

#### 4. 三角形要素網節点での水深の設定

現地海岸地形が要素網によって再現されるためには、各領域内の要素節点での水深が的確に定められねばならない。水深設定法の基本としては、深淺図などの海岸地形データを用いてマスターファイルを作成し、解析用の要素網と重



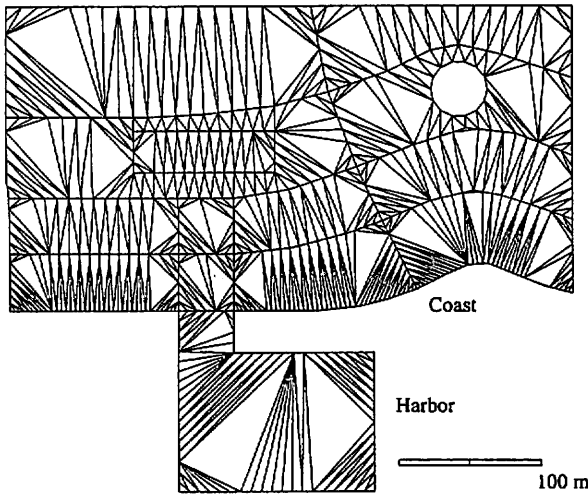


図-12 要素節点での水深補間用の三角形要素網

ね合わせることにより、要素節点での水深を内挿補間するのが一般的である。ここでは、領域分割に用いられた閉境界上での地形情報を用いて、マスターファイルを作成する。したがって、水深の設定方法は以下の通りである。

まず、各閉境界上での地形情報(座標および水深)を用いて、水深補間用の三角形要素網を作成する。図-12はその結果<sup>1)</sup>を例示する。この要素網情報がマスターファイルとして用いられる。ただし、領域内に節点を配置し、この三角形要素網作成に使用する場合には、等深線上の節点を用いなければならない。したがって、ここでもまた、§3で述べた三角形要素網の生成ルーチンが重要な役割を担っている。

次に、任意の節点 $(x_p, y_p)$ における水深 $h_p$ を設定するため、この節点を含む三角形要素を図-12に示した要素網より特定する。そのアルゴリズム<sup>2)</sup>は次の事実を利用する。

- (1) 任意の1節点と閉境界上の辺の始点および終点を結んでできる三角形を考え、この三角形が正のホモロジーを持つとき、閉境界上の辺の対角は正値を探ると定義する。したがって、図-13(1)に示すように、節点が正のホモロジーが付加された閉境界の内部に位置すると、各辺の

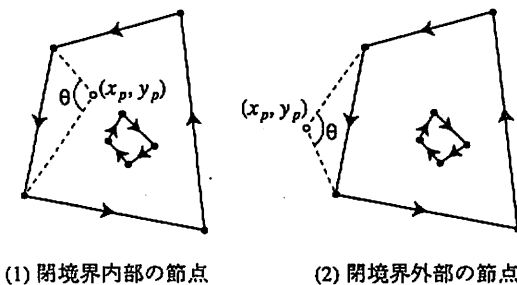


図-13 閉境界と節点との位置関係

<sup>1)</sup> 要素網生成の1方法として、この三角形要素網を利用して、各要素の再分割を繰り返し、所要の要素網を得ることが考えられる(谷口建男, 1992)。ただし、その結果の是非は、領域内での節点の配置に依存し、正三角形に近い要素が得られるとは限らない。

<sup>2)</sup> このアルゴリズムは、一般的な閉曲線に対するもので、閉曲線が三角形の場合には、§3.2で述べたアルゴリズムが利用できる。すなわち、任意の三角形の3辺に対して、式(1)がすべて正値を探れば、節点はこの三角形に含まれている。

対角 $\theta$ の総和 $\Sigma$ は $2\pi$ である。

- (2) 節点が負のホモロジーが付加されている閉境界の内部に位置すると、各辺の対角 $\theta$ の総和は $\Sigma = -2\pi$ である。
- (3) 図-13(2)に示すように、節点が閉境界の外側に位置すると、閉境界の正・負のホモロジーにかかわらず、各辺の対角 $\theta$ の総和は $\Sigma = 0$ である。
- (4) 節点が閉境界上に位置すると、 $\Sigma$ は上記以外の値を探る。

ここで、領域分割に用いられた等深線間の水深は線形変化すると仮定すると、マスターファイル(図-12)中の各三角形は平面である。したがって、節点 $(x_p, y_p)$ を含む三角形要素の節点座標および水深を $(x_i, y_i, h_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) とすると、所要の水深 $h_p$ は次式で内挿補間される。

$$h_p = h_1(1 - \xi - \eta) + h_2\xi + h_3\eta \quad (7.1)$$

ここに、 $(\xi, \eta)$ は次式で与えられる面積座標である。

$$\xi = \{(x_p - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_p - y_1)\} / d \quad (7.2)$$

$$\eta = \{(x_2 - x_1)(y_p - y_1) - (x_p - x_1)(y_2 - y_1)\} / d \quad (7.3)$$

$$d = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (7.4)$$

また、 $d/2$ は三角形要素の面積(式(1))である。

図-14は、各要素の節点水深の補間結果に基づく港周辺での等深線を示す。ただし、港内および沖合の人工リーフ上の水深はそれぞれ10m、3mであり、水深不連続部は破線で示されている。また、円形島の外周は鉛直壁であると仮定されている。円形島周辺および背後のトンボロ地形、湾口の浅瀬部および人工リーフに沿った水深不連続部をも含めて、全体の海岸地形が良く再現されている。この結果は、要素サイズとその分布および要素節点での水深の設定方法が妥当であることを示している。

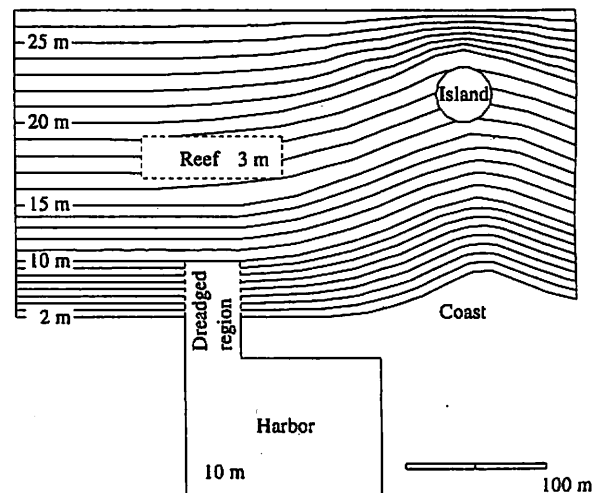


図-14 沿岸部の港周辺での等深線

### 5. 特殊な領域に対する要素網生成例

最後に、§2.4の図-5に示された特殊な領域を用いた場合の要素網および等深線を例示する。

図-15は、一様勾配の海域に扇形領域(中心角:180°)が位置するときの要素網と外周の円弧部での水深が連続および不連続な場合の等深線を示す。図中の破線は水深不連続

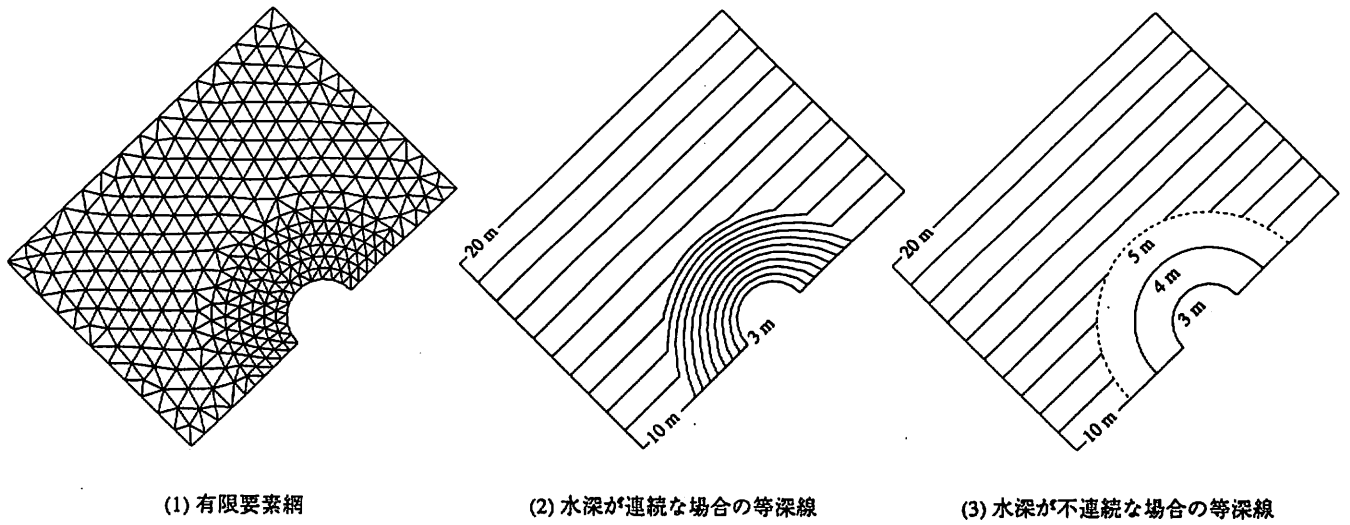


図-15 扇面領域 (中心角: 180°) での三角形要素網と等深線

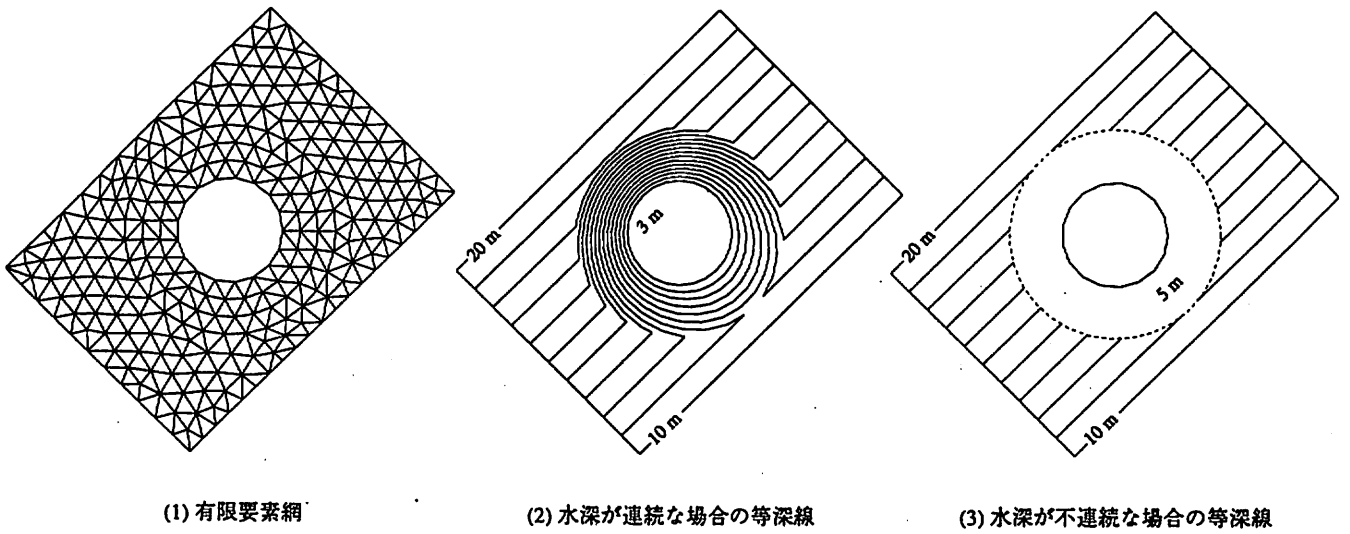


図-16 円環領域での三角形要素網と等深線

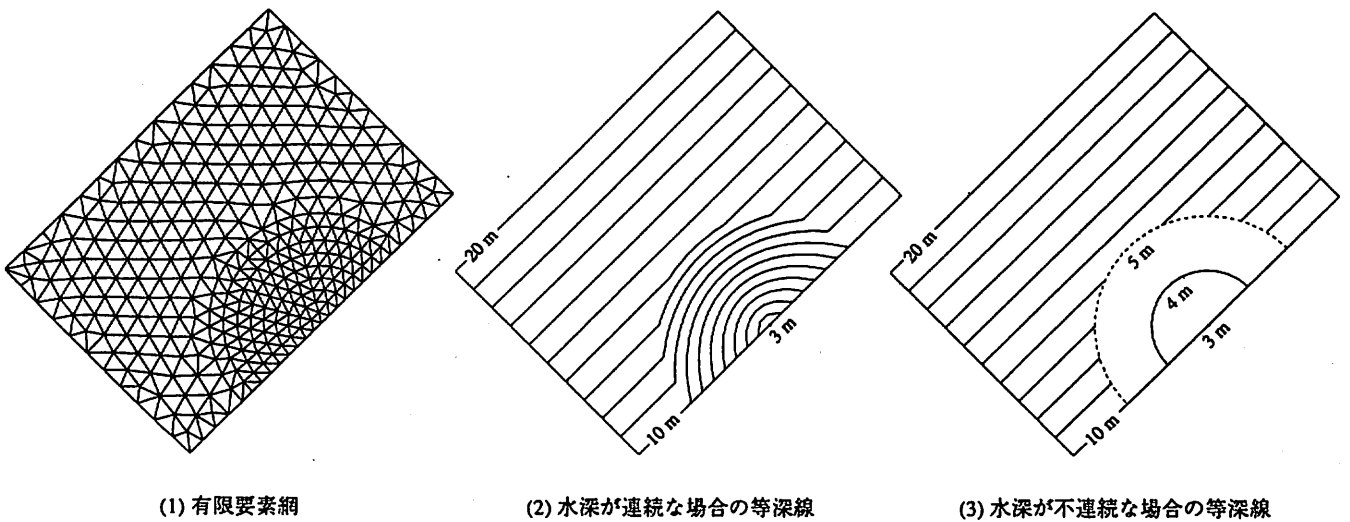


図-17 扇形領域 (中心角: 180°) での三角形要素網と等深線

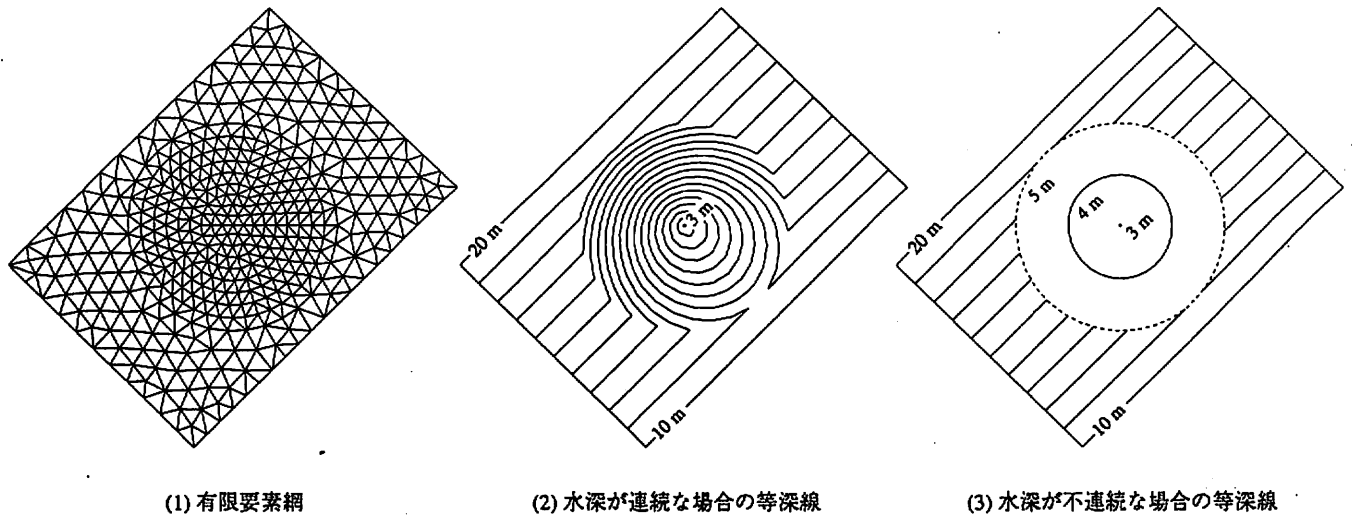


図-18 円盤領域での三角形要素網と等深線

境界を示す。扇面領域の特別な場合として、円弧の始点および終点が一致するときの円環領域の例が、図-16に示されている。この領域はシル (sill) を有する円形島などの円柱構造物のモデリングに適している。同様に、一様勾配の海域に扇形領域 (偶角部の角度は $180^\circ$ ) および円盤領域が位置する場合の要素網および等深線が、それぞれ、図-17, 18に示されている。

これらの特殊な領域内においては、いずれの場合も、同心円上に節点が配置された放射状の三角形要素網が生成されている。

図-15, 16において、外側の円弧あるいは円に沿った水深が連続な場合、各節点の水深は、§4で述べた方法により、平面上の節点として内挿補間されたものである。このときの扇面および円環領域内の水深は、内側の反射境界の円弧あるいは円に沿った一定水深 (3m) から半径方向に一樣に深くなっている。同様に、図-17, 18における扇形および円盤領域内の水深は、中心での水深 (3m) から半径方向に一樣に深くなっている。

水深が不連続な場合のこれら領域内の水深は、図-16(3)に示す一定水深 (5m)、または、図-15, 17, 18の(3)に示す同心円状の等深線となる場合が可能である。

これらいずれも、平行等深線となる海岸地形および特殊領域内の等深線を正確に再現し、要素網の生成方法および要素節点での水深の設定方法が妥当であることを示している。このような領域は、海岸構造物などによる特殊な海域を再現するために導入されているが、時として実際に出会うもので、海岸のモデリングには必要である。

## 6. 結 言

本研究では、波浪解析システム: CATWAVESで使用されている有限要素解析のための2次元有限要素網の生成方法が、沿岸域での波動問題に対する簡単な例を用いて、具体的に論述された。すなわち、(1)解析対象領域の分割および個々の領域の定義、(2)各領域での内部節点の配置と三角形要素網の生成、および(3)要素節点での水深の内挿補間などの方法が詳述された。さらに、海岸構造物などにより構成される

海域をモデリングするため、円弧を用いた特殊な領域に対する要素網および等深線が例示された。

以上の結果、三角形要素網の生成方法および要素節点での物理常数 (ここでは、水深) の設定方法は、効率的で信頼性の高い方法であるとともに、簡便かつ汎用性があり、他の分野への適用も容易であることが示された。

今後の課題として、領域内の節点密度の与え方が挙げられる。ここでは、各領域の中央付近で正三角形に近い要素網が得られるような節点配置法が用いられた。この方法によると、分割された各領域内ではほぼ一様な節点密度になる。したがって、要素サイズは、領域単位で変化し、各領域間の境界付近では必ずしも滑らかに変化しない。この点に関しては改良の余地が残されている。ただし、領域分割のために等深線に沿った地形情報が用いられるので、等深線の密度に配慮し、生成された要素網により現地海岸地形が的確に再現されるようにすれば、数値解析精度は保証される。

## 参 考 文 献

- 谷口建男 (1992): FEMのための要素自動分割, デローニー三角分割法の利用, 森北出版, 東京, 198pp.
- Babuska, I. and M. Suri (1994): The  $p$ - and  $hp$ -versions of the finite element methods, basic principle and properties, *SIAM Review*, Vol.36, No.4, pp.578-632.
- Bowyer, A. (1981): Computing dirichlet tessellations, *The Computer Jour.*, Vol.24, No.2, pp.162-166.
- Cavendish, J. C. (1974): Automatic triangulation of arbitrary planar domains for finite element method, *Int. Jour. Num. Meth. Engrg.*, Vol.8, pp.679-696.
- Karniadakis, G. E. and S. J. Sherwin (1999): Spectral/ $hp$  Element Methods for CFD, *Oxford University Press*, New York, 390pp.
- Kashiyama, K. and T. Okada (1992): Automatic mesh generation method for shallow water flow analysis, *Int. Jour. Num. Meth. Fluids*, Vol.15, pp.1035-1057.
- Lawson, C. L. (1977): Software for C1 surface interpolation, *Mathematical software III*, John R. Rice, ed., Academic Press, New York, pp.161-194.
- Lo, S. H. (1985): A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *Int. Jour. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.21, pp.1403-1426.

Norman, L. J. and R. R. David (1992): Mesh generation for estuarine flow modeling, *Jour. Waterways, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, Vol.118, No.6, pp.599-614.

Patera, A.T. (1984): A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *Jour. Comp. Phys.*, 54, pp.468-488.

Peraire, J., M. Vahdati, K. Morgan, and P. C. Zienkiewicz (1987): Adaptive remeshing for compressive flow computations, *Jour. Comp. Phys.*, Vol.72, pp.449-466.

Tsutsui, S. (1990): CATWAVES - Wave Analysis System, *Centre for Water Research, Univ. of Western Australia*, Report No.WP-318-ST, 61pp.

Tsutsui, S. (2001): CATWAVES - Prediction of linear and nonlinear wave motion in unbounded coastal domains, *Bull. Fac. Eng., Univ. of the Ryukyus*, No.61, pp.9-35.

Watson, D. F. (1981): Computing  $n$ -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *The Computer Jour.*, Vol.8, No.2, pp.167-172.

Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor (1991): *The Finite Element Method*, Fourth ed., Vol.1 & 2, McGraw-Hill, New York, 648pp & 807pp.

付録. 特殊な領域での要素網生成

ここでは, §2.4の図-5に示された特殊な領域における要素網の生成法について述べる.

図-A1 (1)に示すように, 半径 $r_0$ ,  $r_0+S$ の2円弧の間に同心円上の節点を配置することを考える. 2円弧間を $n$ 分割し, 各層の間隔を $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , 要素サイズを $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}$ とする. ただし,  $l_1+l_2+\dots+l_n=S$ であり, 内・外の円弧上での要素サイズ $d_1, d_{n+1}$ は既知である.

要素サイズが等比例するときには, 次式が得られる.

$$d_{j+1} = \lambda d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{A1}$$

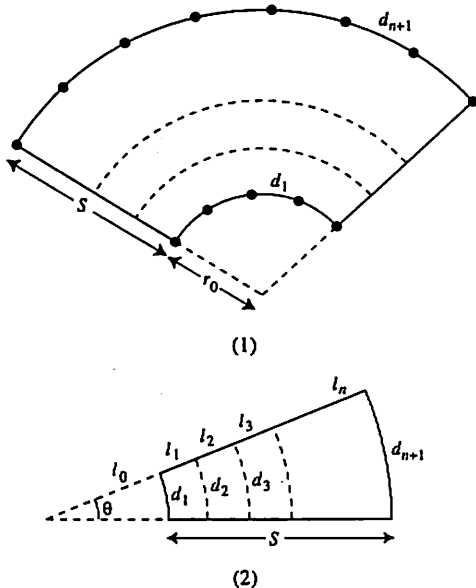


図-A1 2円弧間での節点配置

ただし,  $\lambda$ は比例係数で,  $\lambda > 1$ とする. 一方, 各層間には次の幾何学的関係が成立する.

$$\left. \begin{aligned} l_0 \theta &= d_1 \\ (l_0 + l_1) \theta &= d_2 \\ \dots\dots\dots \\ (l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1}) \theta &= d_n \\ (l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + l_n) \theta &= d_{n+1} \end{aligned} \right\} \tag{A2}$$

ただし,  $l_0$ および $\theta$ は, 図-A1 (2)に示すように, 外側の辺( $d_{n+1}$ )より内側の辺( $d_1$ )を見込む扇形の内側の半径と中心角である. したがって, 層間隔は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= (\lambda - 1) l_0 \\ l_1 + l_2 &= (\lambda^2 - 1) l_0 \\ \dots\dots\dots \\ l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} &= (\lambda^{n-1} - 1) l_0 \\ l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + l_n &= (\lambda^n - 1) l_0 \end{aligned} \right\} \tag{A3}$$

式(A3)の最後の式より,  $l_0 = S / (\lambda^n - 1)$ となり, 層間隔は次式で定められる.

$$l_j = \frac{\lambda - 1}{\lambda^j - 1} S, \quad l_j = \lambda l_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n \tag{A4}$$

すなわち, 層間隔もまた等比例する.

比例係数 $\lambda$ および層数 $n$ を決定するための式の1つは, 式(A1)において $j=n$ として得られる次式である.

$$\lambda^n = d_{n+1} / d_1 \tag{A5}$$

しかし, 未知数 $\lambda$ および $n$ の一方は任意の値を採り得るので, これらを定めるための第2の式は一義的に定まらない. Lo (1985)は比例係数 $\lambda$ として次式を提案している.

$$\lambda = \frac{S + d_{n+1}}{S + d_1} \tag{A6}$$

一方, 平均的な要素サイズ $(d_1 + d_{n+1}) / 2$ で全層厚 $S$ を分割すると考えれば, 層数 $n$ は次式で定められる.

$$n = \frac{2S}{d_1 + d_{n+1}} \tag{A7}$$

式(A5)と式(A6)または(A7)により比例係数 $\lambda$ および層数 $n$ が決定されると, 式(A4)および(A1)によりそれぞれ層間隔 $l_j$ と各層での要素サイズ $d_j$ が決定される.

以上のようにして,  $(n+1)$ 層の円弧上での節点配置が定められると, 三角形要素網は, §3で述べた方法により容易に生成される. なお, 扇形および円盤領域は, 以上において $r_0 = d_1$ として定められる.