開放マクロ経済の最適収支動学：無限期間モデルと有限期間モデル

開放マクロ経済の最適収支動学：無限期間モデルと有限期間モデル

徳島　武

抄　録

筆者の一連の開放マクロ経済の最適収支動学分析では、無限期間が仮定され、最適条件より鞍点の最適動学システムが導出され、定常均衡値へ収束して横断面の条件を満足する経路が、最適経路として選択された。本論文では有限期間を仮定すると、横断面の条件が満足されず、同様の最適動学システムでも収束経路が最適経路とならないことが証明されている。すなわち有限期間分析は初期条件と最終期（終点）条件を任意に設定した分析となり、よって最適収支動学分析も任意となるので、無限期間分析とは本質的に異なる最適収支動学分析となることが示されている。

また自国と外国からなる国際マクロ経済の最適動学システムについて、利子率と資本及び対外債務の関係、二国モデルの２期間分析と無限期間分析の関係、二国モデルとN国モデルの関係の各観点からまとめられている。

キーワード：国際マクロ経済学、国際収支、経常収支、貿易収支、財政収支、為替レート、対外債務、国債、資本、二国モデル、N国モデル、開放マクロ経済、動学的最適化、パレート最適、無限期間、有限期間、２期間、異時点間貿易

１．はじめに

徳島（2006）において、筆者の一連の開放マクロ経済における、経常収支、貿易収支、財政収支の最適動学分析がまとめられた。そこでは対外債務と資本の最適動学に着目したモデルと、実質為替レートと対外債務のそれに着目したものによる、無限期間の分析が展開された。そしてそれらの分析をふまえた上で、「おわりに：研究の総括」において、無限期間モデルと有限期間モデルの根本的違いについて言及したが、不十分なものであった。そこで本論文ではその根本的違いについて、具体的にモデルを用いて証明する。無限期間分析では、横断面の条件（transversality condition）が成立するが、有限期間分析ではそれが成立しないため、同じ最適動学システムにおいても、選択されるべき経路が異なることが示される。また、これまでの分析のまとめとして、国際マクロ経済の最適動学システムについて総括する。

論文の構成は、第２節で政府部門を含んだ対外債務と資本のモデルを用いて、無限期間分析と有限期間分析における最適収支動学の違いを示し、第３節で実質為替レートと対外債務のモデルを用いて、その違いを示す。第４節では、国際マクロ経済の最適動学システムについて、利子率と資本及び対外債務の関係、二国モデルの２期間分析と無限期間分析の関係、二国モデルとN国モデルの関係の各観点からまとめる。最後に第5節でまとめとする。

２．対外債務と資本のモデル

徳島（2005、2006第８章）で展開された二国モデルの分析を、政府部門を含んだものに拡張し、財政収支の最適動学も含めて、無限期間モデルと有限期間モデルの最適収支動学を分析する。但し国際マクロ経済の最適動学システムを明らかにする目的から、投資の調整費用が存在しないケースについて分析する。投資の調整費用が存在するケースでも、最適収支動学は同様である。

2.1 政府部門を含んだ無限期間モデル

対称的な自国と外国を想定するので、自国モデルのみ示す。外国の変数は上付き添え字のアスタリスク（＊）で区別する。社会的最適（パレート最適）の見地からの動学的最適化分析を想定し、中央計画当局が第０期（今期）における民間非銀行部門の代表的家計の厚生を、制約条件の下で最大化することを仮定する。代表的家計の瞬時的効用関数は、時間に関して加法分離的であり、

(2.1)　$u_t = u(c_t, g_t)$

とする。c_t は消費、g_t は政府支出であり、下付き添え字の t は時間である。この関数は非負で強い凹関数とし、

$$0 < u_1, u_2 \quad , u_{11}, u_{22} < 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} > 0 \quad , u_{12} = u_{21} = 0$$

を仮定する。右下の数字は、左から何番目の独立変数による偏導関数かを示している。以下同様とする。また、

$$\lim_{c \to 0} u_1 = \lim_{g \to 0} u_2 = +\infty \quad , \lim_{c \to +\infty} u_1 = \lim_{g \to +\infty} u_2 = 0$$

も仮定する。代表的家計の厚生は、それの消費と政府支出の効用の総現在価値となり、

$$(2.2)\quad \int_0^\infty u(c_t,g_t)e^{-\theta t}dt$$

となる。θは時間選好率あるいは主観的割引率であり、θ^wを共通の時間選好率とすると、

$$(2.3)\quad 0<\theta=\theta^*=\theta^w<1$$

の、所与の値をとると仮定する。生産関数はy_tを国内純生産（NDP）として、

$$(2.4)\quad y_t=f(\kappa_t,g_t,A)$$

とする。κ_tは資本ストック、Aは生産性レベルを示す所与のパラメターであり、

$$0<f_1,f_2,f_3\quad ,f_{11},f_{22},f_{33}<0\quad ,0<f_{12}=f_{21},f_{13}=f_{31},f_{23}=f_{32}$$

$$\lim_{\kappa\to 0} f_1=+\infty\quad ,\ \lim_{\kappa\to+\infty} f_1=0$$

を仮定する。制約条件は、対外取引はすべて対外債務で決済し、国債は居住者のみ保有すると仮定して、対外債務ストックF_t、資本ストックκ_t、国債ストックB_tの各々と、フローの変数の関係を示す式であり、

$$(2.5)\quad \dot{F}_t=c_t+i_t+g_t+r_t^*F_t-f(\kappa_t,g_t,A)$$

$$(2.6)\quad \dot{\kappa}_t=i_t$$

$$(2.7)\quad \dot{B}_t=g_t+r_tB_t-\tau_t$$

とする。i_tは純投資、r_t^*は外国利子率、r_tは自国利子率、τ_tは税収である。各変数は一人当たりのものであり、人口成長は仮定せず、今期（第０期）の人口を１とする。

自国における動学的最適化分析は、以下のようにまとめられる。

$$\max\int_0^\infty u(c_t,g_t)e^{-\theta t}dt$$

$$\begin{aligned} s.t.\ &\dot{F}_t=c_t+i_t+g_t+r_t^*F_t-f(\kappa_t,g_t,A)\\ &\dot{\kappa}_t=i_t\\ &\dot{B}_t=g_t+r_tB_t-\tau_t\\ &0<\theta<1,A,F_0,\kappa_0,B_0,\tau_0,\ given\\ &c_t,g_t\,\kappa_t,B_t,\tau_t,\geq\ 0\quad for\ all\ t \end{aligned}$$

制御変数は、c_t,i_t,g_tであり、状態変数はF_t,κ_t,B_tである。また二国モデルの経常収支を分析するには、

$$(2.8)\quad F_t+F_t^*=0$$

の条件が必要である。以下の分析では特に必要を認めない限り、下付きの添え字tは省略する。

自国のハミルトニアンは、$-\lambda,\beta,\gamma$を共役変数とすると、

$$H=u(c,g)-\lambda\{c+i+g+r^*F-f(\kappa,g,A)\}+\beta i+\gamma(g+rB-\tau)$$

である。最適のための条件は、

$$(2.9)\quad \frac{\partial H}{\partial c}=u_1-\lambda=0\qquad \therefore u_1=\lambda$$

$$(2.10)\quad \frac{\partial H}{\partial i}=-\lambda+\beta=0\qquad \therefore \lambda=\beta$$

(2.11) $\dfrac{\partial H}{\partial g}=u_2-\lambda+\lambda f_2+\gamma=0 \quad \therefore u_2=\lambda-\lambda f_2-\gamma$

(2.12) $\dot{\lambda}=\lambda\theta+\dfrac{\partial H}{\partial F}=\lambda\theta-\lambda r^*=\lambda(\theta-r^*)$

(2.13) $\dot{\beta}=\beta\theta-\dfrac{\partial H}{\partial \kappa}=\beta\theta-\lambda f_1$

(2.14) $\dot{\gamma}=\gamma\theta-\dfrac{\partial H}{\partial B}=\gamma\theta-\gamma r=\gamma(\theta-r)$

(2.15) $\lim_{t\to+\infty}(-\lambda F)e^{-\theta t}=0$ [1)]

(2.16) $\lim_{t\to+\infty}\beta\ \kappa e^{-\theta t}=0$

(2.17) $\lim_{t\to+\infty}\gamma Be^{-\theta t}=0$

(2.18) $u_1=u_2$

となる。(2.9)、(2.11)、(2.18) より、

$$u_1=u_2\Leftrightarrow f_2=-\frac{\gamma}{\lambda}$$

となり、 $0<\lambda$ より、

$$f_2\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}0\Leftrightarrow\gamma\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}0$$

であり、$0\leq\gamma$ なので、

(2.19) $f_2=\gamma=0$

となる。よってBの横断面の条件である (2.17) は常に成立する。徳島 (2004a,2006第7章) の分析同様に、国債の潜在価格がゼロとなり国債が発行されないため、

(2.20) $g=\tau,\ B_0=0$

となり、財政収支均衡が最適収支動学となる。無限期間において、税支払同様の無価値の国債購入を続ける合理性はないのである。自国の最適動学システムは、(2.10)、(2.12)、(2.13) より、

(2.21) $\dot{\lambda}=\dot{\beta}=\lambda(\theta-r^*)=\beta(\theta-f_1) \qquad \therefore r^*=f_1$

となり、外国のそれは、

(2.22) $\dot{\lambda}^*=\dot{\beta}^*=\lambda^*(\theta^*-r)=\beta^*(\theta^*-f_1^*) \qquad \therefore r=f_1^*$

となるので、(2.3) も考慮すると、徳島 (2005,2006第８章) 同様の鞍点の動学システムとなる。財政収支均衡なので、最適経常・貿易収支動学も同様となる。但し徳島 (2004a,2006第７章) の分析同様に、$g=\tau$ は一定でなく、κ,g,τ の定常均衡値を κ_e,g_e,τ_eとすると、(2.19) を満足するように、

(ⅰ) $\kappa_e<\kappa\ (i<0)$ のとき $g_e=\tau_e<g=\tau \qquad \therefore g=\tau\downarrow$

(ⅱ) $\kappa_e=\kappa\ (i=0)$ のとき $g_e=\tau_e=g=\tau \qquad \therefore g=\tau=const.$

（iii）　$\kappa<\kappa_e(0<i)$のとき　　$g=\tau<g_e=\tau_e$　　　$\therefore g=\tau\uparrow$

となる。↓は減少、↑は増加を意味する。以下同様である。κとFは定常均衡値のκ_eとF_eへ収束し[2]、$0<\lambda=\beta$も収束することより、Fの（2.15）とκの（2.16）の横断面の条件が成立する。

2.2 政府部門を含んだ有限期間モデル

2.1 で展開された同様の分析を、有限期間モデルにおいて展開する。最終期をTとすると、自国における動学的最適化分析は、以下のようにまとめられる。

$$\max\int_0^T u(c_t,g_t)e^{-\theta t}dt$$

$$s.t.\ \dot{F}_t=c_t+i_t+g_t+r_t^*F_t-f(\kappa_t,g_t,A)$$

$$\dot{\kappa}_t=i_t$$

$$\dot{B}_t=g_t+r_tB_t-\tau_t$$

$$0<\theta<1, A, F_0, \kappa_0, B_0, \tau_0,\ given$$

$$c_t, g_t\, \kappa_t, B_t, \tau_t, \geq 0 \quad for\ all\ t$$

自国のハミルトニアンは、$-\lambda,\beta,\gamma$を共役変数とすると、

$$H=u(c,g)-\lambda\{c+i+g+r^*F-f(\kappa,g,A)\}+\beta i+\gamma(g+rB-\tau)$$

である。最適のための条件は、

(2.23)　$\dfrac{\partial H}{\partial c}=u_1-\lambda=0 \qquad \therefore u_1=\lambda$

(2.24)　$\dfrac{\partial H}{\partial i}=-\lambda+\beta=0 \qquad \therefore \lambda=\beta$

(2.25)　$\dfrac{\partial H}{\partial g}=u_2-\lambda+\lambda f_2+\gamma=0 \quad \therefore u_2=\lambda-\lambda f_2-\gamma$

(2.26)　$\dot{\lambda}=\lambda\theta+\dfrac{\partial H}{\partial F}=\lambda\theta-\lambda r^*=\lambda(\theta-r^*)$

(2.27)　$\dot{\beta}=\beta\theta-\dfrac{\partial H}{\partial \kappa}=\beta\theta-\lambda f_1$

(2.28)　$\dot{\gamma}=\gamma\theta-\dfrac{\partial H}{\partial B}=\gamma\theta-\gamma r=\gamma(\theta-r)$

(2.29)　$-\lambda_T=0$ [3]

(2.30)　$\beta_T\kappa_T=0$ [4]

(2.31)　$\gamma_T B_T=0$ [5]

(2.32)　$u_1=u_2$

となる。無限期間モデル同様の鞍点の動学システムとなることは自明である。また（2.19）の条件も同様に成立し、Bの横断面の条件（2.31）は常に成立する。しかし、$0<\lambda=\beta, 0<$

κ_T[6)]より、Fの（2.29）とκの（2.30）の横断面の条件が同時に成立することはないので、Bの（2.31）も含めて横断面の条件を用いることはできず、

$$\kappa_0, F_0, \kappa_T, F_T \quad given$$

とし、B_0とB_Tはそれらに応じて決まり、財政収支については必ずしも

$$B_0 = 0, g_t = \tau_t$$

とはならない。g_tは（2.19）より決まり、τ_tは他の変数より決まる。

有限期間分析は初期条件と最終期（終点）条件を任意に設定した分析となり、従って最適収支動学も任意となるので、無限期間モデル分析とは本質的に異なる最適収支動学分析となるのである。

3．実質為替レートと対外債務のモデル

徳島（2005b、2006第12章）で展開された二国（大国）モデルの分析について、無限期間モデルと有限期間モデルの最適収支動学を比較する。2と同様に、横断面の条件が成立するか否かが違いを生むことになる。

3.1 大国の無限期間モデル

長期における所与の実質国民所得を仮定した、自国と外国の両国が対称的な大国である二国モデルを想定する。この大国モデルでは、自国（外国）が実質利子率 $r(r^*)$ を決定でき、第0期（今期）における代表的家計の厚生を制約条件の下で最大化する、完全予見の分権化された経済を仮定している。従って、求められる最適条件は社会的最適条件と一致する。まず自国の大国モデルから示す。

代表的家計の瞬時的効用関数は、cを自国財支出、mを外国財支出（輸入）とすると、

(3.1)　$w(c,m) = u(c) + v(m); u_{cc}, v_{mm} < 0 < u_c, v_m$

となる。右下の添え字はそれによる偏導関数を示している。このモデルは実質消費だけでなく、実質投資と実質政府支出もcとmに含まれている。また、

$$\lim_{c\to 0} u_c = \lim_{m\to 0} v_m = +\infty \;, \lim_{c\to +\infty} u_c = \lim_{m\to +\infty} v_m = 0$$

を仮定する。無限期間モデルによる代表的家計の厚生は、それのcとmの効用の割引現在価値となり、

(3.2)　$\int_0^\infty [u(c) + v(m)] e^{-\rho t} dt$

となる。時間をtで示す。但し必要なければ省略する。ρは時間選好率であり、所与の正の値($0 < \rho < 1$)をとると仮定する。制約条件は、実質対外債務ストックDと経常収支の関係を示す式であり、

(3.3)　$\dot{D} = c + \pi m - y + rD$

となる。但しこのDには政府部門の対外債務も含まれている。yが長期における所与の実質完全雇用国民所得であり、πが自国通貨建実質為替レート（外国財価格÷自国財価格）である。自国における動学的最適化分析は、

$$\max \int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)] e^{-\rho t} dt$$

$$s.t.\dot{D}_t = c_t + \pi_t m_t - y + r(D_t)D_t$$

$$y, D_0, \pi_0, 0 < \rho < 1 \quad given$$

$$y_t, c_t, \pi_t, m_t, r(D_t) \geq 0 \quad for\ all\ t$$

となる。Dのシャドー・プライスをϕとおくと、ハミルトニアンは、

(3.4)　$H = u(c) + v(m) + \phi(c + \pi m - y + rD)$

となり、最適のための必要条件は、

(3.5)　$\dfrac{\partial H}{\partial c} = u_c + \phi = 0$

(3.6)　$\dfrac{\partial H}{\partial m} = v_m + \phi\pi = 0$

(3.7)　$\dot{\phi} = \rho\phi - \dfrac{\partial H}{\partial D} = \phi(\rho - r)$

(3.8)　$\lim_{t \to +\infty} \phi D e^{-\rho t} = 0$ [7]

である。これよりxを実質輸出とおいてπの増加関数とすると、最適動学システムは、

$$\dot{\pi} = -\frac{u_c}{x_\pi u_{cc}}(\rho - r(D)); 0 < r_D, r_{DD}$$

$$\dot{D} = c + \pi m - y + r(D)D$$

$$= A(\pi) - y + R(D)$$

$$;A = c + \pi m,\ A_\pi < 0, R(D) = r(D)D$$

の鞍点の動学システムとなり、定常均衡値（π_e, D_e）へ収束する経路が最適経路として選択され、それに応じて最適経常・貿易収支動学が決まる。(3.8) のDの横断面の条件は満足されている。

次に外国の大国モデルを示す。自国と外国では通貨単位が異なる点に注意し、外国の変数を上付き添え字のアスタリスク（*）で区別すると、外国における動学的最適化分析は、

$$\max \int_0^\infty [u^*(c_t^*) + v^*(m_t^*)] e^{-\rho^* t} dt$$

$$s.t.\dot{D}_t^* = c_t^* + \frac{m_t^*}{\pi_t} - y^* + r^*(D_t^*)D_t^*$$

$$y^*, D_0^*, D_0, \pi_0, 0 < \rho^* < 1 \quad given$$

$$y^*, c_t^*, \pi_t, m_t^*, r^*(D_t^*) \geq 0 \quad for\ all\ t$$

となる。D^*のシャドー・プライスをϕ^*とおくと、ハミルトニアンは、

(3.9) $$H^*=u^*(c^*)+v^*(m^*)+\phi^*(c^*+\frac{m^*}{\pi}-y^*+r^*D^*)$$

となり、最適のための必要条件は、

(3.10) $$\frac{\partial H^*}{\partial c^*}=u^*_{c^*}+\phi^*=0$$

(3.11) $$\frac{\partial H^*}{\partial m^*}=v^*_{m^*}+\frac{\phi^*}{\pi}=0$$

(3.12) $$\dot{\phi}^*=\rho^*\phi^*-\frac{\partial H^*}{\partial D^*}=\phi^*(\rho^*-r^*)$$

(3.13) $$\lim_{t\to+\infty}\phi^*D^*e^{-\rho^*t}=0$$ [8)]

である。これよりx^*を実質輸出とおいてπの減少関数とすると、最適動学システムは、

$$\dot{\pi}=-\frac{u^*_{c^*}}{x^*_\pi u^*_{c^*c^*}}(\rho^*-r^*(D^*))\ ;0<r^*_{D^*},r^*_{D^*D^*}$$

$$\begin{aligned}\dot{D}^*&=c^*+\frac{m^*}{\pi}-y^*+r^*(D^*)D^*\\&=A^*(\pi)-y^*+R^*(D^*)\\&;A^*=c^*+\frac{m^*}{\pi},\ 0<A^*_\pi,R^*(D^*)=r^*(D^*)D^*\end{aligned}$$

の鞍点の動学システムとなり、定常均衡値(π_e,D^*_e)へ収束する経路が最適経路として選択され、それに応じて最適経常・貿易収支動学が決まる。(3.13) のD^*の横断面の条件は満足されている。

最後に、二国モデルの条件は、ρ^wを所与で両国共通の時間選好率とし、$CB(CB^*)$を自国（外国）の経常収支として、

$$\rho=\rho^*=\rho^w\quad ,D+\pi D^*=0\quad ,CB+\pi CB^*=0$$

であるので、これらの条件の下で、両国の最適経常・貿易収支動学が決まることを付け加えておく。徳島（2005b、2006第12章）で、それらの動学が具体的に図示されている。

3.2 大国の有限期間モデル

3.1 で展開された同様の分析を、有限期間モデルにおいて展開する。最終期をTとすると、自国における動学的最適化分析は、以下のようにまとめられる。

$$\max\int_0^T[u(c_t)+v(m_t)]e^{-\rho t}dt$$

$$s.t.\dot{D}_t=c_t+\pi_t m_t-y+r(D_t)D_t$$

$$y,D_0,\pi_0,0<\rho<1\quad given$$

$$y,c_t,\pi_t,m_t,r(D_t)\geq 0\quad for\ all\ t$$

自国のハミルトニアンは、Dのシャドー・プライスをϕとおくと、

$$H=u(c)+v(m)+\phi(c+\pi m-y+rD)$$

となり、最適のための必要条件は、

$$(3.14)\quad \frac{\partial H}{\partial c}=u_c+\phi=0 \qquad \therefore u_c=-\phi$$

$$(3.15)\quad \frac{\partial H}{\partial m}=v_m+\phi\pi=0 \qquad \therefore v_m=-\phi\pi$$

$$(3.16)\quad \dot{\phi}=\rho\phi-\frac{\partial H}{\partial D}=\phi(\rho-r)$$

$$(3.17)\quad \phi_T=0$$

である。(3.14)、(3.15)、(3.16)より、無限期間モデル同様の鞍点の動学システムとなることは自明である。しかし（3.14)、(3.15）より、

$$0<u_c=-\phi \quad ,v_m=-\phi\pi$$

なので、ϕは常に負となるため、Dの横断面の条件である（3.17）は成立しない。よって(3.17）でなく、

$$D_0,D_T \quad given$$

とすべきである。外国における動学的最適化分析でも、同様の結論が得られるのは自明である。よって２のモデルと同様に、有限期間分析は初期条件と最終期（終点）条件を任意に設定した分析となり、従って最適収支動学も任意となるので、無限期間モデル分析とは本質的に異なる最適収支動学分析となるのである。

４．国際マクロ経済の最適動学システム

徳島（2006）にまとめられた研究は、開放経済における経常・貿易・財政収支の最適動学を明らにすることが目的であったが、その副産物として、自国と外国からなる国際マクロ経済の最適動学システムも明らかにすることができた。以下三つの点から、この研究成果をまとめる。

4.1　利子率と資本及び対外債務の関係

２と３より

$$r^*=f_1>0,f_{11}<0 \quad ,r=f_1^*>0,f_{11}^*<0$$

$$r=r(D)>0<r_D,r_{DD} \quad ,r^*=r^*(D^*)>0<r^*_{D^*},r^*_{D^*D^*}$$

となり、これより

$$(4.1)\quad \kappa\uparrow(\downarrow)\Leftrightarrow D\uparrow(\downarrow)\Leftrightarrow\kappa^*\downarrow(\uparrow)\Leftrightarrow r\uparrow(\downarrow)\Leftrightarrow D^*\downarrow(\uparrow)\Leftrightarrow r^*\downarrow(\uparrow)$$

の関係が確認できる。これは経常収支赤字国の対外債務増加すなわち資本の流入が、経常収支黒字国の資本流出による国内資本の減少を招き、資本の限界生産力の上昇（赤字国では下落。）をもたらし、赤字国の利子率の上昇（黒字国では下落。）をもたらすという関係である[9]。自国（外国）の経常収支を$CB(CB^*)$とすると、図１で$CB^*<0<CB$のケース、図２で$CB<0<CB^*$のケースが示されている[10]。図の横軸の左（右）側が自国（外国）の資本の起点$0(0^*)$であり、右（左）へ行くにつれて国内の資本が増加し、対外債務が増加する。図

では、

$$\theta=\theta^{*}=\theta^{w}=r=r^{*}\quad , \; CB=CB^{*}=0$$

の定常均衡への調整過程が、矢印で図示されている。

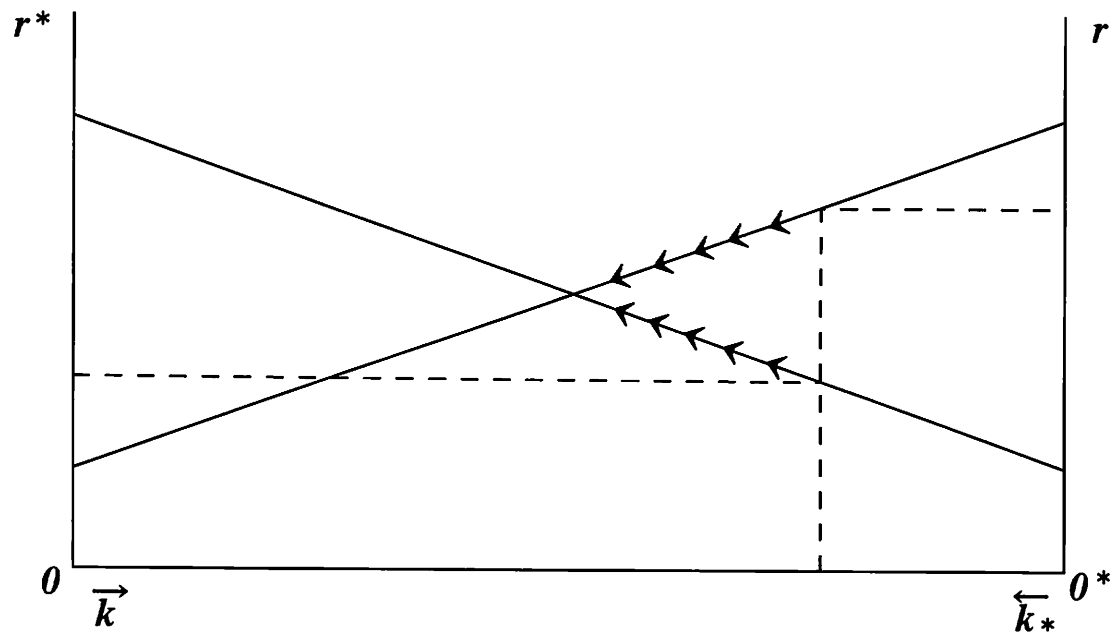

図１

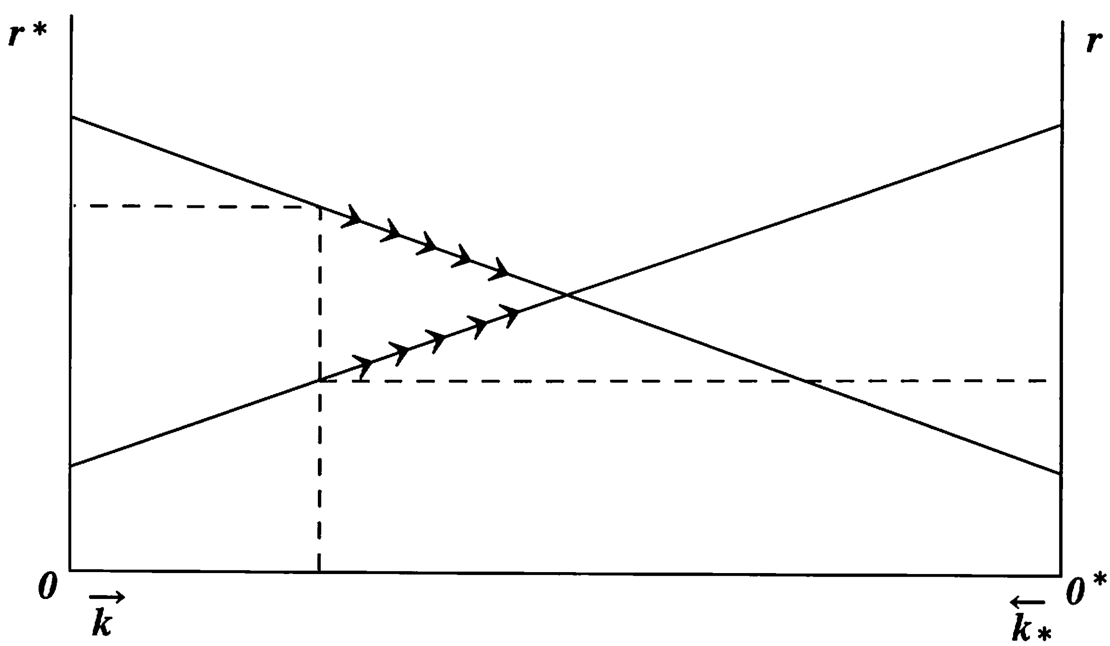

図２

4.2 二国モデルの２期間分析と無限期間分析の関係

第０期を前期（定常均衡から離れる期間）、第１期を今期（定常均衡へ戻る期間）とし、右下の添え字で区別する。Yを国民所得、Aをアブソープション、CBを経常収支、rを利子率、ρを時間選好率とし、UをAの効用関数として、$U''<0<U'$を仮定し、外国の変数をアスタリスク（＊）で区別すると、自国の動学的最適化分析は、

$$\max U(A_0)+\frac{U(A_1)}{1+\rho} \quad ; \ U''<0<U'$$
$$s.t.\ Y_0=A_0+CB_0, Y_1=A_1+CB_1, (1+r_1^*)CB_0+CB_1=0$$
$$Y_0, A_0, Y_1, A_1 \geq 0$$

となり、これより、

$$(4.2) \qquad \rho\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}r_1^* \Leftrightarrow A_0\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}A_1 \Leftrightarrow CB_0\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}0\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}CB_1$$

となる。外国の動学的最適化分析は、

$$\max U^*(A_0^*)+\frac{U^*(A_1^*)}{1+\rho^*} \quad ; \ U^{*\prime\prime}<0<U^{*\prime}$$
$$s.t.\ Y_0^*=A_0^*+CB_0^*, Y_1^*=A_1^*+CB_1^*, (1+r_1)CB_0^*+CB_1^*=0$$
$$Y_0^*, A_0^*, Y_1^*, A_1^* \geq 0$$

となり、これより、

$$(4.3) \qquad \rho^*\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}r_1 \Leftrightarrow A_0^*\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}A_1^* \Leftrightarrow CB_0^*\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}0\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}CB_1^*$$

となる。（4.2）と（4.3）をまとめると、

$$r_1^*<\rho=\rho^*<r_1 \Leftrightarrow CB_0<0<CB_1, CB_0^*>0>CB_1^*$$
$$(4.4) \qquad r_1<\rho=\rho^*<r_1^* \Leftrightarrow CB_0>0>CB_1, CB_0^*<0<CB_1^*$$
$$r_1=\rho=\rho^*=r_1^* \Leftrightarrow CB_0=0=CB_1, CB_0^*=0=CB_1^*$$

となることから、２期間分析を前期と今期の異時点間貿易と考えると、無限期間分析は今期を無限期間とする分析であり、前期の経常赤（黒）字で定常均衡値を上（下）回る対外債務を、今期の経常黒（赤）字で、定常均衡値まで減少（増加）させる最適動学の分析である。

4.3 二国モデルとN国モデルの関係

徳島（1996a）で展開された分析を再掲し、最適収支動学分析におけるその意味を考える。共通の通貨単位を持つN国モデルを仮定する。

CA_i：i国の経常収支

CA_i^j：i国のj国に対する経常収支

CA_j^i：j国のi国に対する経常収支

と定義する。二国モデルにおいて両国の経常収支の合計がゼロになることより、

(4.5)　$CA_i^j = -CA_j^i (i \neq j)$

の関係が成立するので、i国の経常収支はN国モデルにおいて、

(4.6)　$CA_i = \sum_{j=1}^{N} CA_i^j = -\sum_{j=1}^{N} CA_j^i \quad (i \neq j)$

となる。それゆえN国の経常収支の合計は、

$$\sum_{i=1}^{N} CA_i = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} CA_j^i \quad (i \neq j)$$

$$= -(CA_2^1 + CA_3^1 + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_N^1)$$

$$-(CA_1^2 + CA_3^2 + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_N^2)$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$-(CA_1^N + CA_2^N + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_{N-1}^N)$$

または、

$$\sum_{i=1}^{N} CA_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} CA_i^j \quad (i \neq j)$$

$$= (CA_2^1 + CA_3^1 + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_N^1)$$

$$+(CA_1^2 + CA_3^2 + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_N^2)$$

$$+(CA_1^3 + CA_2^3 + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_N^3)$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$+(CA_1^N + CA_2^N + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + CA_{N-1}^N)$$

となる。CA_i^jが存在すれば、CA_j^iも存在し、また（4.5）より、

$$\sum_{i=1}^{N} CA_i = 0$$

となることが証明される。すなわち、二国モデルにおいて両国の経常収支の合計がゼロになるという条件が、N国モデルにおいて経常収支の合計がゼロになるという条件の、十分条件になっているのである。つまり二国モデルにおいてシステム全体の貯蓄と投資が等しい、すなわち資本の制約が満足されていて、そのシステムが閉じていれば、N国モデルにおいてもそのシステムが閉じているのである。このことは、二国モデルにおける定常均衡（経常収支均衡）へ至る最適収支動学の存在が証明されれば、N国モデルにおけるそれの存在も証明されることを意味している。すなわち二国モデルにおける最適動学システムの存在が証明されれば、N国モデルにおいてそれが存在することが証明されたことになるのである。

5．おわりに

本論文において、横断面の条件が成立するか否かによって、無限期間モデルと有限期間モデルの最適収支動学が異なることが証明された。同じ鞍点の動学システムでも、前者は定常均衡へ収束する経路が最適経路となり、後者は初期条件と最終期（終点）条件を任意に設定した経路が最適経路となるのである。また国際マクロ経済の最適動学システムについて、4．1では2と3の最適動学分析の関連を示すことができたし、4．2では2期間分析と無限期間分析の関係を示すことができ、両者のギャップを埋めることができた。4．3では、N国モデルの最適動学システムの分析が、二国モデルのそれで十分であることが証明された。徳島（2006）と本論文をもって、開放マクロ経済の最適収支動学分析は、一応の完成を見たと言える。

注

1）Fの定常均衡値(F_e)は符号の制約（正 or 0 or 負）がつくので、これがFの横断面の条件となる。

2）(2.21)より、$r^*_{+\infty}=f_{1,+\infty}=+\infty\,(\kappa_e=0)$は成立しないので、$0<\kappa_e$となる。

3）F_Tの符号は不定である。

4）$0 \leq \kappa_T$である。

5）$0 \leq B_T$である。

6）(2.21)より、$r^*_T=f_{1,T}=+\infty\,(\kappa_T=0)$は成立しない。よって、$\kappa_T\neq 0$で$0<\kappa_T$となる。

7）Dの定常均衡値(D_e)は符号の制約（正 or 0 or 負）がつくので、これがDの横断面の条件となる。

8）D^*の横断面の条件についても、7）と同様である。

9）経常収支黒字国の資本の限界生産力が、資本の機会費用になっている。

10）(4.1)の（　）のケースは、図1になる。

参考文献

足立英之（1994）『マクロ動学の理論』有斐閣
井堀利宏（1996）『公共経済の理論』有斐閣
岩井克人・伊藤元重編（1994）『現代の経済理論』東京大学出版会
大住圭介（2003）『経済成長分析の方法』九州大学出版会
――――・川畑公久・筒井修二編（2006）『経済成長と動学』勁草書房
大和瀬達二（1987）『経済学におけるダイナミカルシステムの理論』税務経理協会
奥野信宏（1988）『公共経済』東洋経済新報社
奥村隆平（1998）『改訂版　変動相場制の理論』名古屋大学出版会
小野善康（1992）『貨幣経済の動学理論』東京大学出版会
――――（1999）『国際マクロ経済学』岩波書店
河合正弘（1994）『国際金融論』東京大学出版会
齋藤　誠（1996）『新しいマクロ経済学』有斐閣
須田美矢子編（1992）『対外不均衡の経済学』日本経済新聞社
大東一郎（1996）『内生的経済成長の基礎理論』三菱経済研究所

高木信二（1992）『入門 国際金融』日本評論社
竹中平蔵・小川一夫（1987）『対外不均衡のマクロ分析』東洋経済新報社
津曲正俊（1993）『経済成長理論の新展開』三菱経済研究所
徳島　武（1996a）「すべての国の経常収支の合計がゼロになるという命題の証明」『琉球大学經濟研究』第51号、275－277
――――（1996b）「小国開放経済の新古典派成長モデルにおける財政収支、経常収支、そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」『琉球大学經濟研究』第52号、313－328
――――（1997a）「小国開放経済の内生的成長モデル（バロー・モデル）における、財政収支、経常収支、そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」『琉球大学經濟研究』第53号、221—236
――――（1997b）「内生的成長モデル（ローマー＝バロー・モデル）における３収支の動学的最適化分析」『琉球大学經濟研究』第54号、21—37
――――（1998）「資本の限界生産力と最適貿易収支動学」『琉球大学經濟研究』第56号、93—108
――――（1999）「小国開放経済における政府支出の最適構造」『琉球大学經濟研究』第58号、73—86
――――（2000）「大国開放経済における実質為替レート動学」『琉球大学經濟研究』第60号、１—６
――――（2001）「長期における実質為替レートと経常収支の動学」『大阪府立大学経済研究』第46巻、第２号、１—６
――――（2002）「小国開放経済における経常収支と貿易収支の最適動学：生産性と横断面の条件」『琉球大学經濟研究』第63号、179—197
――――（2003）「開放経済における実質為替レートと最適収支動学：経常収支と貿易収支」『琉球大学經濟研究』第66号、１—18
――――（2004a）「小国開放経済の最適収支動学：財政収支と生産性ショック」『琉球大学經濟研究』第67号、13—34
――――（2004b）「大国開放経済における需要ショックと最適動学：実質為替レートと最適収支動学」『大阪府立大学経済研究』第50巻、第１号、175—182
――――（2005a）「開放経済の最適収支動学：二国モデル」『琉球大学經濟研究』第69号、55—69
――――（2005b）「開放経済における実質為替レートと最適収支動学：二国モデル」『琉球大学經濟研究』第70号、45—74
――――（2006）『開放マクロ経済の最適収支動学』徳島　武（自費出版）
西村清彦（1990）『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会
羽森茂之（1996）『消費者行動と日本の資産市場』東洋経済新報社
村田安雄（1990）「経常収支変動の異時点分析－無限期間モデル－」『関西大学経済論集』第40巻、第1号、51－76
――――（1994）『現代マクロ経済学（新版）』有斐閣
――――（1998）『動的経済システムの最適制御』関西大学出版部

山口利夫（1994）『最適成長理論とカオス動学の基礎』三菱経済研究所

Barro,R.J. (1974) "Are government bonds net wealth?",*Journal of Political Economy* 82(6),1095－1117

――――― (1990) "Government spending in a simple model of endogenous growth", *Journal of Political Economy* 98, s103－125

―――――and X.,Sala-i-Martin (1990) "Public finance in models of economic growth", *NBER Working Paper* No.3362

―――――and――――― (1995) *Economic Growth, McGraw-Hill*

Bazdarich,M.J. (1978) "Optimal growth and stages in the balance of payments", *Journal of International Economics* 4,425－443

Blanchard,O.J. and S.Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics,* MIT Press

Devereux,M.B. and S.Shi (1991) "Capital accumulation and the current account in a two-country model", *Journal of International Economics* 30,1－25

Ferguson, B.S. and G.C.Lim (1998) *Introduction to dynamic economic models,* Manchester University Prss

Frenkel.J.A. and A.Razin (1992) *Fiscal Policies and the World Economy second. ed.,* MIT Press

Gandolfo,G. (1996) *Economic Dynamics third ed.,* Springer

――――― (2001) *International Finance and Open-Economy Macroeconomics,* Springer

Hayashi,F. (1982) "Tobin's marginal q and average q：a neoclassical interpretation" *Econometrica* 50 (1),213－224

Ikeda, S. and I.Gombi (1998) "Habits, costly investment, and current account dynamics" *Journal of International Economics* 49,363－384

Kamin,M.I. and N.L. Schwartz (1991) *Dynamic Optimization second ed.,* North-Holland

Karayalcin, C. (1994) "Adjustment costs in investment, time preferences, and the current account" *Journal of International Economics* 37,81－95

Krady,A. and J.Ventura (2000) "Current Accounts in Debtor and Creditor Countries" *The Quarterly Journal of Economics* CXV (463) ,November 1137－1167

Lucas,R.E.,Jr (1988) "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics* 22,July 3－42

Mankiw,N.G. (1997) *Macroeconomics third ed.,* Worth Publishers

Matsuyama,K. (1987) "Current account dynamics in a finite horizon model", *Journal of International Economics* 23,299－313

Obstfeld,M. and K.Rogoff (1995) "The Intertemporal Approach to the Current Account", in G.Grossman and K.Rogoff eds., *Handbook of International Economics Vol.3* (Amesterdam, The Netherlands; Elsevier)

――――― and ――――― (1996) *Foundations of International Macroeconomics,* MIT Press

Petit,M.L. (1990) *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis,* Cambridge University Press

Pitchford,J. (1995) *The Current Account and Foreign Debt,* Routledge

Romer,P. (1986) "Increasing returns and long-run growth", *Journal of Political Economy* 94 (5), 1002−1037

Sala-i-Martin,X. (1990) "Lecture notes on economic growth (Ⅱ) :five prototype models of endogenous growth", *NBER Working Paper* No.3564

Sengupta,J.K. (1998) *New Growth Theory,* Edward Elgar

Serven,L. (1995) "Capital goods imports,the real exchange rate and the current account", *Journal of International Economics* 39,79−101

Turnovsky,S.J. (1995) *Methods of Macroeconomic Dynamics,* MIT Press

———— (1996) "Fiscal policy,growth,and macroeconomic performances in a small open economy", *Journal of International Economics* 40,41−66

———— (1997) *International Macroeconomic Dynamics,* MIT Press

————and W.H.Fisher (1995) "The composition of government expenditure and its consequences for macroeconomic performance", *Journal of Economic Dynamics and Control* 19,747−786

Van der Ploeg, F. (ed.) (1994) *The Handbook of International Macroeconomics,* Basil Blackwell