情報地質　第6巻　第1号　13 - 29頁，1995年
Geoinformatics, Vol.6, No.1, p.13 - 29, 1995

論　説

# 地質構造解析における歪楕円体の適合度 $c$ 値の提唱

林　大五郎*

# Proposed Consistency $c$-value for Strain Ellipsoids in Geological Structure Analysis

Daigoro HAYASHI*

**Abstract:** I have performed the three dimensional strain analysis of the Kayo Formation, Kunchan Group around Ban-zaki, middle north of Okinawa-jima by means of the "least square method" and "average method". The least square method was called the "strain analysis technique 3" and the average method was called the "strain analysis technique 2" in my paper (Hayashi, 1994). The results of both methods are fairly different. The "$c$-value" is introduced to explain the difference. The difference between the strain ellipsoid calculated using the least square method and associated strain ellipses decreases as the $c$-value decreases, though the difference between the strain ellipsoid calculated using the average method and associated strain ellipses does not necessarily decrease. Therefore, the strain ellipsoid obtained by the least square method is expected to approach a true strain ellipsoid as the $c$-value decreases, though the strain ellipsoid obtained by the average method is not expected to approach a true strain ellipsoid.

**Key Words**: Least square method, Average method, Three dimensional strain analysis, Consistency of strain, $c$-value

## 1．はじめに

変形理論には微小変形理論と有限変形理論とがある．工学であつかうような小さな歪（$10^{-5}$～$10^{-3}$）には前者を用いるが，地質学であつかう大きな歪（$10^{-1}$～$10^{2}$）には後者を用いる．地質学的歪は，たとえば，地層中の化石が長時間の変形により，変形前の長さの2倍に引き伸ばされて生じる．このようにして生じた歪は，もし変形前の化石の形がわかっていれば歪比（歪楕円の長軸と短軸の比）として得ることが可能である．もし形のみならず大きさもわかっているのならば，歪値（歪楕円の長軸長と短軸長）として計算できる．歪を求める際に用いた化石を歪マーカーと言うが，化石はどの岩体にも普遍的に見いだされるとは限らない．これに対して，堆積岩中の砕屑粒子や火成岩中の鉱物粒子は普遍的に存在する．歪マーカーの大きさが小さいとそれらを含む岩石を定方位サンプルとして採集し，実験室に持ち帰り，岩石薄片を作成し，顕微鏡観察をすることにより歪比を計算できる．平行でない3面以上の面上での歪楕円を合成することから歪楕円体を得ることができる．ここでは天然のデータから歪楕円体を計算する際に生じた問題を論ずる．

林（1994）は非平行断面上の歪楕円を使い最小2乗法を用いた3次元歪解析法を紹介したが，その方法を実際の野外データに適用してはいなかった．今回，林（1988, 1989, 1992）がおこなった沖縄島中北部バン崎周辺の国頭（くんちゃん）層群嘉陽（かよう）層の歪解析を，新しく開発した最小2乗法を用いる方法で再度実行した．両者の結果にはかなりのくい違いが認められたが，この原因は歪楕円体の適合性の悪さにあると思われる．

今まで行われてきた3次元歪解析の多くは，面構造を $XY$ 面，線構造を $X$ 方向と仮定して，歪楕円体の主歪面である $XY$ 面，$YZ$ 面，$ZX$ 面を決めていた．この仮定にもとづく歪解析では，歪楕円が主歪面上にあるため歪楕円体をあらためて構成することなく，3次元主歪が求められる．このため歪楕円体の適合性は問題とはならなかった．

この主歪面の仮定は岩石変形実験の結果や野外での小構造の観察などから支持されている（Siddans, 1972）とはいえ，厳密なあつかいとはいえない．とくに砂岩中の砕屑粒子や火成岩中の鉱物の斑晶をマーカーとして歪楕円体を求める場合には，これらのマーカーが歪場を反映している

* 琉球大学理学部海洋学教室 Department of Marine Sciences, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 903-01, Japan

という保証はない．このため，得られた結果は，歪楕円と歪楕円体の適合性を加味して再検討されるべきである．

ここでは，3次元歪解析に関する今までの研究を概観したあと，平均法と最小2乗法とでおこなった嘉陽層の歪解析結果を，適合度 $c$ 値をパラメータとして比較する．平均法とは林（1994）が歪解析法2とよんだ方法であり，「6とおりの係数*を平均する方法」という意味での略称である．最小2乗法は歪解析法3とよんだ方法であり，「最小2乗法を用いる方法」という意味である．

Wheeler (1986) は3次元歪解析について理論的に次のような重要な指摘をしている．平面上の歪楕円を合成した歪楕円体は，楕円体マーカーの形状マトリックスを直接平均化して求めた歪楕円体（これが真の歪楕円体）とは一致しない．この指摘が真実ならば，平面上の歪楕円を合成して求めた歪楕円体は真の歪楕円体ではないことになる．したがって歪楕円体を求める最良の方法は，3次元の歪に関するデータから直接歪楕円体を得る方法ということになる．このような方法の1つとして Sanderson and Meneilly (1981) の用いた方法がある．彼らの方法は andalusite の伸びの方向から orientation tensor を作り，この固有値，固有ベクトルと固有値比図から歪楕円体を求める．この方法は楕円マーカーを用いずに方位データを使うため，平面上に歪楕円を作ることなく直接に歪楕円体を計算することができる．しかし3次元の方位を測ることは難しいことが多く，実用的とはいえない．

Wheeler の指摘は，今までに開発された平面上の歪楕円を合成して歪楕円体を求めるという3次元歪解析法を，かならずしも無効にするものではない．問題は平面上の歪楕円を合成してできた歪楕円体と Wheeler の意味での真の歪楕円体とがどれだけ異なるかである．両者の違いが微小で測定誤差の範囲にあれば，この指摘は無視できる．しかし今まで，どの程度の違いがあるのかについてのまとまった研究はない．

本論文は以上のような，合成された歪楕円体と Wheeler の意味での真の歪楕円体との誤差についてではなく，「平面上の歪楕円を合成して歪楕円体を求める」という3次元歪解析法の天然への適用の際に生じた，「歪楕円体の適合度」について述べている．歪楕円体の適合性が悪ければ，用いた平面上の歪楕円は歪楕円体のその平面での切断面としての楕円ではない．したがって，どのような「平面上の歪楕円を合成して歪楕円体を求める」という3次元歪解析法を用いても，合成した歪楕円体は真の歪楕円体ではない．

## 2．3次元歪解析理論

歪楕円から歪楕円体を構成する理論は大きく分けて3つある．1つは，3つの直交する主歪面を，$XY$ 面は面構造，$X$ 軸は線構造のように仮定し，これらの面上での歪楕円を求め，その歪比すなわち歪楕円体の歪比とするものである．この理論を使用した研究には，Cloos (1947)，Oertel (1970)，Helm and Siddans (1971)，Roberts and Siddans (1971)，Mukhopadhyay (1973)，Siddans (1977)，Lacassin and van den Driessche (1983)，Lisle (1984) などがある．

2つめは，任意の3つの直交する面上の歪楕円を用いて歪楕円体を構成するものである．この方法は最初 Ramsay (1967) が次のように述べた．任意の3つの直交する面上の歪楕円の方程式が求められているとき，これをこれら3面で切られた歪楕円体の断面としての歪楕円の方程式と比較することにより，歪楕円体の方程式が得られる．ただし係数の比較のしかたには6とおりある．このようにして得られた歪楕円体に内接する球の半径は実数としては3つある．これら3つの場合の内接点の方位が主歪方位となる．これらの計算方法が Ramsay (1967) の p. 142-147に記されている．また，3つの非平行面上での歪楕円がわかっているばあい，任意の3つの直交面を作り，ステレオネットとモール円を使って，非平行面上の歪楕円を直交面上の歪楕円に変換する方法が p. 147-148に記してある．ただし林 (1989) で述べたように，変換後の3直交面での歪比が共通の比とはならないため，共通化せねばならない．

この方法では，係数の比較のしかたで6とおりの歪楕円体が得られる．このことは Roberts and Siddans (1971) で明確に述べられ，FORTRAN でコード化されプログラム PASE とよばれている．ここでこれを「直交面を用いて6とおりの係数を平均する方法」という意味で直交平均法とよぶ．Shimamoto and Ikeda (1976) で直交平均法はマトリックスを用いて記された．林 (1994) は直交平均法を歪解析法1とよんだ．

Shimamoto and Ikeda (1976) は，Ramsay (1967)，Dunnet (1969)，Elliott (1970)，Dunnet and Siddans (1971)，Matthews *et al.* (1974) らの歪楕円を求める方法は歪楕円体の主歪面でしか有効でない，したがって歪楕円体の任意の3つの直交面での断面としての歪楕円を求めることができるのは自分たちの方法だけであると述べた．Siddans (1980) はこの主張を数値シミュレーションを使って否定し，

---

* 林 (1994) では3とおりの係数を平均すると記しているが誤りである．たとえば，林 (1994) の p. 152の (3) SI法の (a) のとき $c_{13}=A_1h_3=A_2h_3$ で $A_1=A_2$ のはずであるが実際は異なるので，$c_{13}=(A_1h_3+A_2h_3)/2$ で2つの係数を平均している．これが (b) と (c) の場合にも生ずるので，結局6とおりの係数を平均することになる．計算プログラムでは正しく6とおりの平均がとられているので，この誤りは計算結果には影響していない．

Dunnet (1969), Matthews *et al.* (1974), Shimamoto and Ikeda (1976) の方法はいずれも十分な精度の歪楕円を求めうることを示した.

Ragan (1987) はある面上の 3 方向の 2 次の伸びがわかっているとき, その面上の歪楕円を計算する方法を開発した. 図式解法は Ramsay (1967) ですでに示されており, 計算による解法も Sanderson (1977) にある. Ragan の考案した方法は理論的に単純でエレガントである. この方法は林 (1988) や林 (1994) の歪解析法 2 の中で, 3 つの非平行面上の歪楕円を, 任意の 3 つの直交する面上の歪楕円に変換するさいに使われた.

3 つめは, 6 つの独立して得られる歪楕円体を平均するというやり方ではなく, 別の方法で歪楕円体を計算する方法である. Oertel (1978), Miller and Oertel (1979), Owens (1984), 林 (1994) は最小 2 乗法を使う方法によって歪楕円体を求めた. Milton (1980) と Gendzwill and Stauffer (1981) は歪楕円体上の 6 点の座標を与えることにより, 歪楕円体を表す方程式の 6 つの係数を決めた. De Paor (1990) の開発した歪楕円体を計算する方法は, 3 つ以上の斜交面上での歪楕円のスケーリングをして closure error を最小にする. スケーリングは Milton (1980) や De Paor (1986) の方法で行うことができるが, パソコン (Mac) を使ってグラフィカルに行えるようにした. つぎに小刻みに面をセットしてその面上の歪楕円を計算してゆき, 最大の伸びと最小の伸びの面を見つけて, 歪楕円体の主値と主方向を決める. 精度はこれら主方向が直交するかどうかで見る. 林 (1994) は 3 つの斜交面上の歪楕円を用いて, 歪楕円のスケーリングの後, 歪楕円体上の 6 点を使つて歪楕円体を求め, さらに最小 2 乗法を使って精度を高めた歪楕円体を求めた.

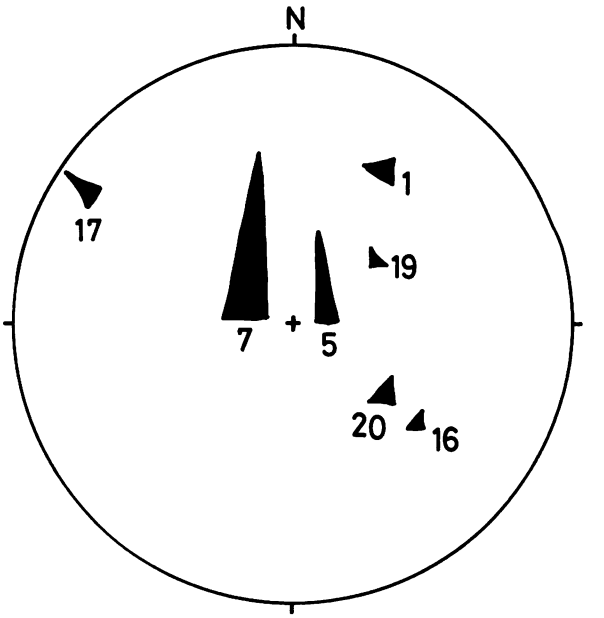
## 3. 直交平均法の問題点

林 (1989) の第 7 図 c に主歪 $Z$ 軸がシュミットネットの下半球に投影されているが, これを正確に示すと, 第 1 図のようにある範囲を持っている. ここに示されたようにくい違いの範囲がかなり広いばあいもあり, 方向を比較するうえで無視できない. これは, 主歪軸の $S, E, U$ 方向 (空間座標系 ; $S$ は水平南向き, $E$ は水平東向き, $U$ は垂直上向き) のオイラー角 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ が一点で交わらない, すなわち

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (1)$$

なる条件 (単位ベクトル) が満足されていないためである.

直交平均法では, 直交する 3 面の交線を軸とした正の $xyz$ 座標系での歪楕円体の形状マトリックスから固有値, 固有ベクトルを求める. 固有ベクトルを $xyz$ 系から $SEU$ 系へ座標変換することにより $SEU$ 系での主歪軸 $X, Y, Z$ 軸の方向 (オイラー角) を求める.




第 1 図　直交平均法によって得られた主歪 Z 軸のシュミットネット下半球投影図. この図に示されていない投影点の範囲は, サンプル16や19よりもばらつきは小さい.

ここで, $xyz$ 系から $SEU$ 系への座標変換は,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{かつ} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} S \\ E \\ U \end{bmatrix} \qquad (2)$$

であるとき, $xyz$ 系と $SEU$ 系が直交系でなくても

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = BR \begin{bmatrix} S \\ E \\ U \end{bmatrix}$$

が成立するため, この座標変換自体からは誤差は生じない. しかし $X, Y, Z$ 軸をあらわす固有ベクトルは $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が直交系であるとして求められている. ところが $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は斜交系である. すなわち $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ なる関係は厳密には成り立たない. くい違いはここから生ずる.

このように $SEU$ 系に座標変換された $X, Y, Z$ 軸方向の固有ベクトルは単位ベクトルではなくなり, 直交していたはずの $XYZ$ 系は $SEU$ 系では斜交している. この原因は

直交平均法が要求している3つの直交面の条件が破られたためである．したがって最小2乗法と直交平均法とを使った歪解析結果の比較を厳密に行うことはできない．このため，ここでは最小2乗法と平均法による歪解析結果の比較をおこなう．

## 4．最小2乗法と平均法による歪解析の比較

### 解析サンプル

以前行った沖縄島中北部バン崎周辺の国頭層群嘉陽層の歪解析（林，1988，1989，1992）に供した細粒～中粒砂岩を使用した．これらの砂岩の円磨度は悪いか普通ぐらいで，淘汰度はよくない．鉱物組成は，石英，斜長石，カリ長石，微斜長石，白雲母，黒雲母，緑泥石，不透明鉱物，岩石片からなる．石英粒はしばしば波動消光を示すが，それ以外に変形組織と思われるものは見られない．黒雲母はほとんど緑泥化しておりまれにしか見られない．サンプル数は20個であり，歪楕円を求めた切断面の方位を第1表に示す．以前の論文（林，1988，1989，1992）ではサンプル11，13，15，17は使っていない．11と12，13と14，15と16，17と18は同一地点から対で採集した褶曲の軸部と翼部からのサンプルである．以前の論文では地質構造との関連を調べる目的があったため，周辺の地質構造と一致する翼部からのサンプルだけを使用した．今回の歪楕円体を求める計算では軸部のサンプルでも差しつかえないので，これらをすべて使用した．ただし平均法を用いるとき，サンプル6はRagan法での変換に際して$zx$面での主相反2次の伸び$\lambda_1'$がマイナスとなった．これは$zx$面での3つの伸び歪は楕円ではない2次曲線をあらわしており，平均法では歪楕円体を求めることはできない．このためサンプル6は以後の考察から省かれることがある．

第1表　解析サンプルの歪楕円を求めた面の方位．

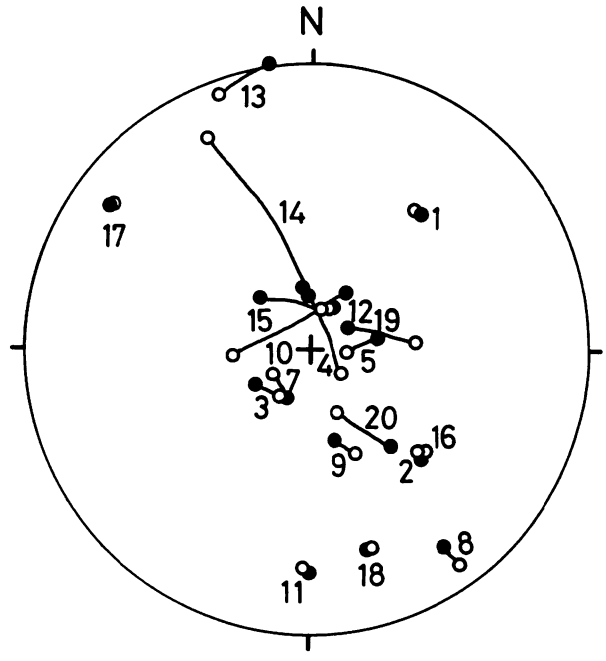
| 標本番号 | 走向傾斜 | | |
|---|---|---|---|
| | A面 | B面 | C面 |
| 1 | N65W 5N | N79E88S | N 6W88S |
| 2 | N34W88S | N53E30N | N52E59S |
| 3 | N35E83S | N58W90 | N39E14N |
| 4 | N78W86N | N32E 5N | N10E82S |
| 5 | N 5W84N | E W71S | N45E24N |
| 6 | N55E74S | N48E24N | N34W85N |
| 7 | N34W82N | N59E38S | N46E48N |
| 8 | N 5E37S | N53W64S | N53E60N |
| 9 | N56E49S | N50E44N | N39W84N |
| 10 | N36W86N | N54E82N | N50E 8S |
| 11 | N67E46S | N20W90 | N70E34N |
| 12 | N58E17N | N10W90 | N80E76S |
| 13 | N22W87S | N62E26S | N59E50N |
| 14 | N68E56S | N36E36N | N31W76N |
| 15 | N23W80N | N36W14S | N63E82N |
| 16 | N58W83N | N40E58S | N13E30N |
| 17 | N80E18S | N40E72N | N51W84N |
| 18 | N28W90 | N59E55N | N58E34S |
| 19 | N66E53S | N30E42N | N42W75N |
| 20 | N16W85N | N76E49N | N63E44S |

### 主歪軸方位の比較

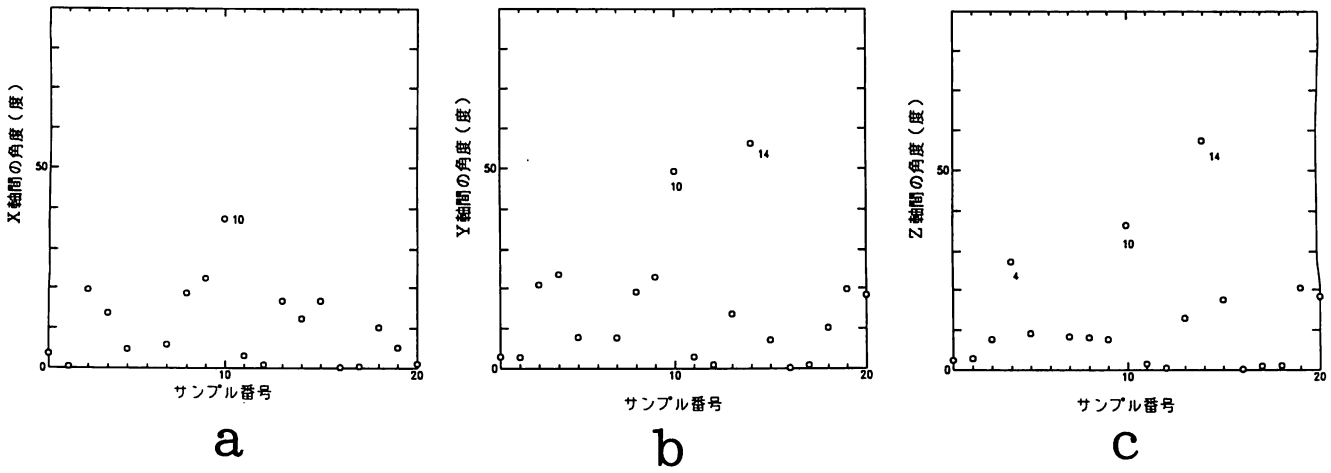
最小2乗法と平均法で得られた主歪$Z$軸をシュミットネットの下半球に投影し，これを第2図に示す．白丸が最小2乗法で得られた$Z$軸を，黒丸が平均法で得られた$Z$軸をあらわす．サンプルによって異なるが，差が60°近いものもある．主歪$X$, $Y$, $Z$軸ごとの差をサンプルごとに第3図に示す．2個の例外（サンプル10，14）を除くと差は30°以下である．

### フリン図での主歪比の比較

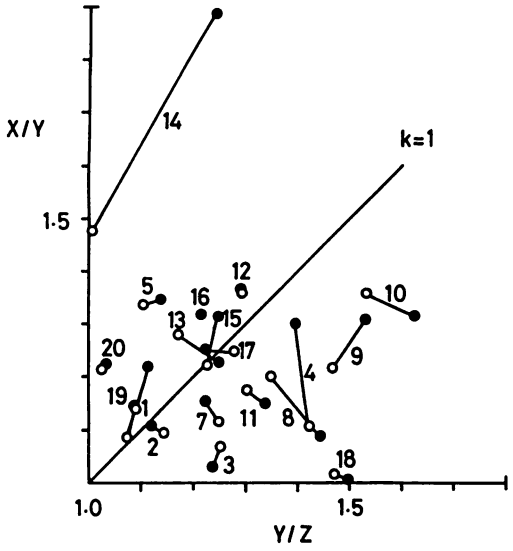
最小2乗法と平均法から得られた主歪比のフリン図での比較を第4図に示す．白丸が最小2乗法で得られた主歪比を，黒丸が平均法で得られた主歪比をあらわす．またサンプルごとの主歪比のフリン図での距離の差を第5図に示す．1個の例外（サンプル14）を除くと差は0.2以下である．prolateとoblateの領域が変わるものは2個（サンプル13，17）だが，距離の差はわずかである．



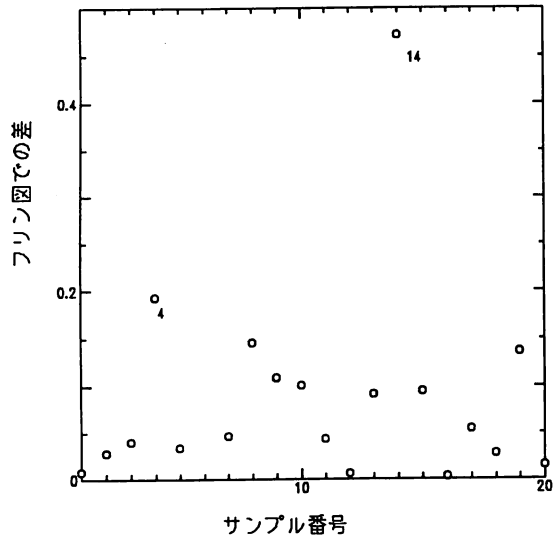

第2図　最小2乗法と平均法で得られた主歪Z軸の比較（シュミットネット下半球投影）．　白丸は最小2乗法で得られた主歪$Z$軸．黒丸は平均法で得られた主歪$Z$軸．同じサンプルを大円でつないで示す．サンプル6はない．




第３図　サンプル別の各主歪軸の最小２乗法と平均法との差（度）．　サンプル６はない．
a：$X$ 軸について．サンプル10以外は30° 以下の差．
b：$Y$ 軸について．サンプル10と14以外は30° 以下の差．
c：$Z$ 軸について．サンプル10と14以外は30° 以下の差．




第４図　フリン図．　白丸は最小２乗法で得られた主歪比．黒丸は平均法で得られた主歪比．同じサンプルを線でつないで示す．




第５図　サンプル別のフリン図上での主歪比の距離の差．14番を除くサンプルでは差は0.2以下．

## 5．歪楕円体の適合度 $c$ 値

最小２乗法と平均法で求めた歪楕円体のくい違いの原因として，適合性の悪い歪楕円を用いて歪楕円体を無理に合成していることが考えられる．

歪楕円から歪楕円体を合成するとき，歪楕円がその面での歪楕円体の断面形とかならずしも一致しないためくい違う．このくい違いの程度を表すために，Roberts and Siddans (1971) は "internal consistency" を計算した．Gendzwill and Stauffer (1981) は "誤差 $e$" で，Owens (1984) は "$\rho$ 値" により，De Paor (1990) は "closure error" を計算して適合性をあらわした．このようにあるパラメータを使って数値として適合性を見るばかりでなく，Helm and Siddans (1971) や Siddans (1980) が行ったように，フリン図やシュミットネット上でこれらのくい違いを検討する方法もある．

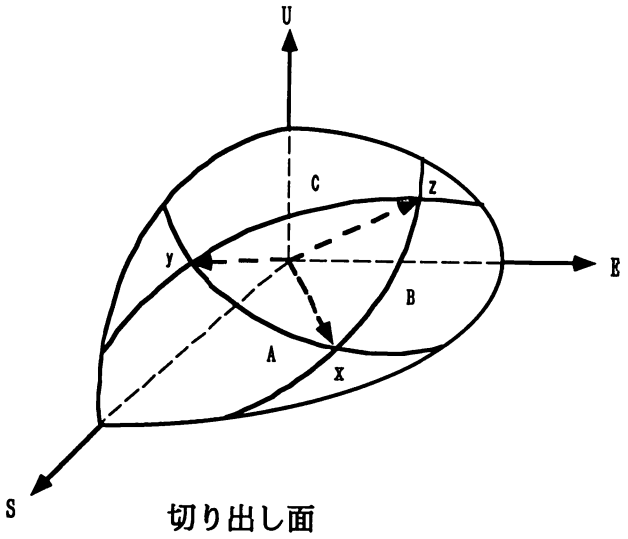
最初に適合性をあらわすパラメータとして GS 法で定義された誤差 $e$ を使う．誤差は第６，７図*から

$$e = \left[\frac{p}{q}\right]^2 - r^2 = \frac{l_A^2}{l_B^2}\frac{l_C'^2}{l_A'^2} - \frac{l_C''^2}{l_B''^2} \qquad (3)$$

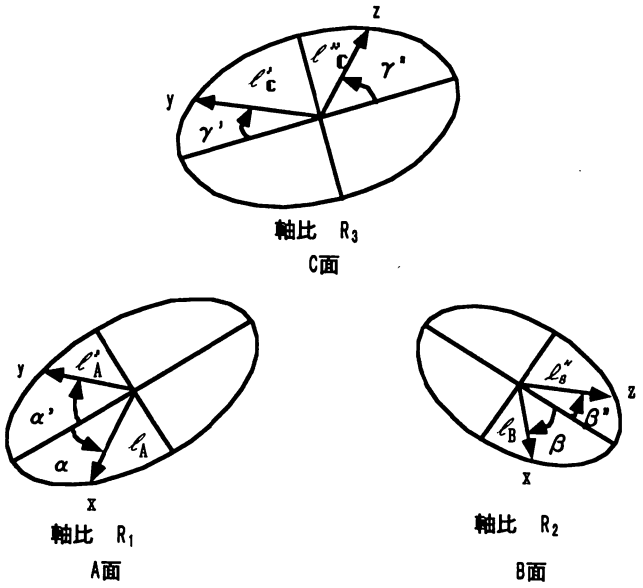
で表される（林，1994，153-154を参照）．

誤差 $e$ は無次元であり，このままで適合化指数として使え

* この図に示した $xyz$ 系は左手系である．$A$, $B$, $C$ 面をシュミットネットに下半球投影すると，これら３面の交線としての $x$, $y$, $z$ 軸からなる $xyz$ 系は右手系となる．ただしそのときの $x$, $y$, $z$ 軸の向きはこの図の $x$, $y$, $z$ 軸の向きとは反対になる．下半球に描いた図を示したほうが厳密であるが，図が複雑になり，理解しずらくなるため，上半球に描いた図を示してある．




第 6 図　歪楕円体と$A$, $B$, $C$面と$x$, $y$, $z$軸.



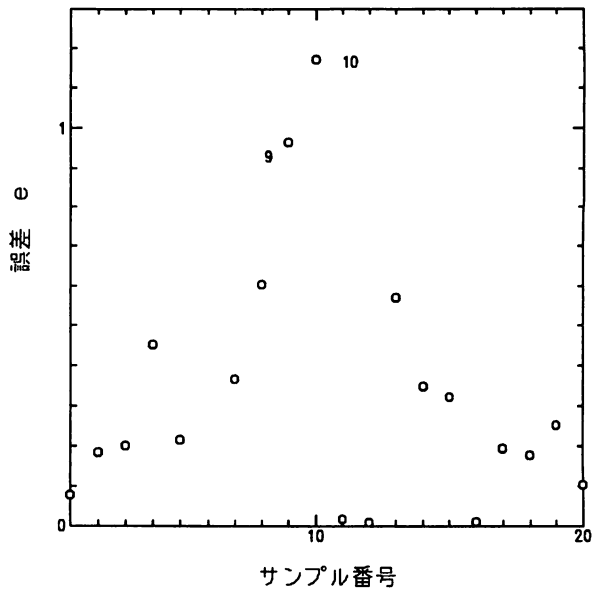

第 7 図　歪楕円体の$A$, $B$, $C$面.　$A$ 面：$x$, $y$軸の$A$面上の歪楕円の$X$軸からの角度と長さ.
$B$面：$z$, $x$軸の$B$面上の歪楕円の$X$軸からの角度と長さ.
$C$面：$y$, $z$軸の$C$面上の歪楕円の$X$軸からの角度と長さ.

る．第 8 図にサンプルごとの誤差 $e$ を示す．

誤差 $e$ と主歪 $X$, $Y$, $Z$ 軸との差の相関をそれぞれ第 9 図 $a$, $b$, $c$ に，誤差 $e$ とフリン図上での主歪比の距離の差との相関を第 9 図 d に示す．これらの図からかなりのばらつきはあるが，誤差 $e$ が大きくなると最小 2 乗法と平均法との差が大きくなる傾向がある．

このように GS 法での誤差 $e$ は断面楕円と楕円体との適合度を表すが，この物理的意味が明確ではないので，よりはっきりとした物理的意味をもちかつ適合度を表すパラメータ $c$ 値(適合値；consistent value) を導入する．

第 6，7 図で，$B$ 面の $A$ 面に対する歪楕円の倍率を $p$ とすると，$x$ 軸方向に関して $l_A = pl_B$ が成立する．$C$ 面の




第 8 図　サンプルごとの誤差 $e$

$A$ 面に対する歪楕円の倍率を $q$ とすると，$y$ 軸方向に関して $l'_A = ql'_C$ が成立する．B 面の C 面に対する歪楕円の倍率を $r$ とすると，$z$ 軸方向に関して $l''_C = rl''_B$ が成立する．さて，$B$ 面上の $z$ 軸方向の歪楕円の長さ $l''_B$ を $A$ 面での歪楕円の長さに直すと $pl''_B$ である．$C$ 面上の $z$ 軸方向の歪楕円の長さ $l''_C$ を $A$ 面での歪楕円の長さに直すと $ql''_C$ である．これらは $z$ 軸方向の歪楕円体の長さであるから $pl''_B = ql''_C$ すなわち $l''_C = \frac{p}{q} l''_B$ が成立している．すなわち $A$, $B$, $C$ 面上の歪楕円が歪楕円体の断面形であれば $r = \frac{p}{q}$ が成立する．しかし実際にはこの関係は成立しないため，p, q から決まる $l''_C$ と $r$ から決まる $l''_C$ とは異なる．

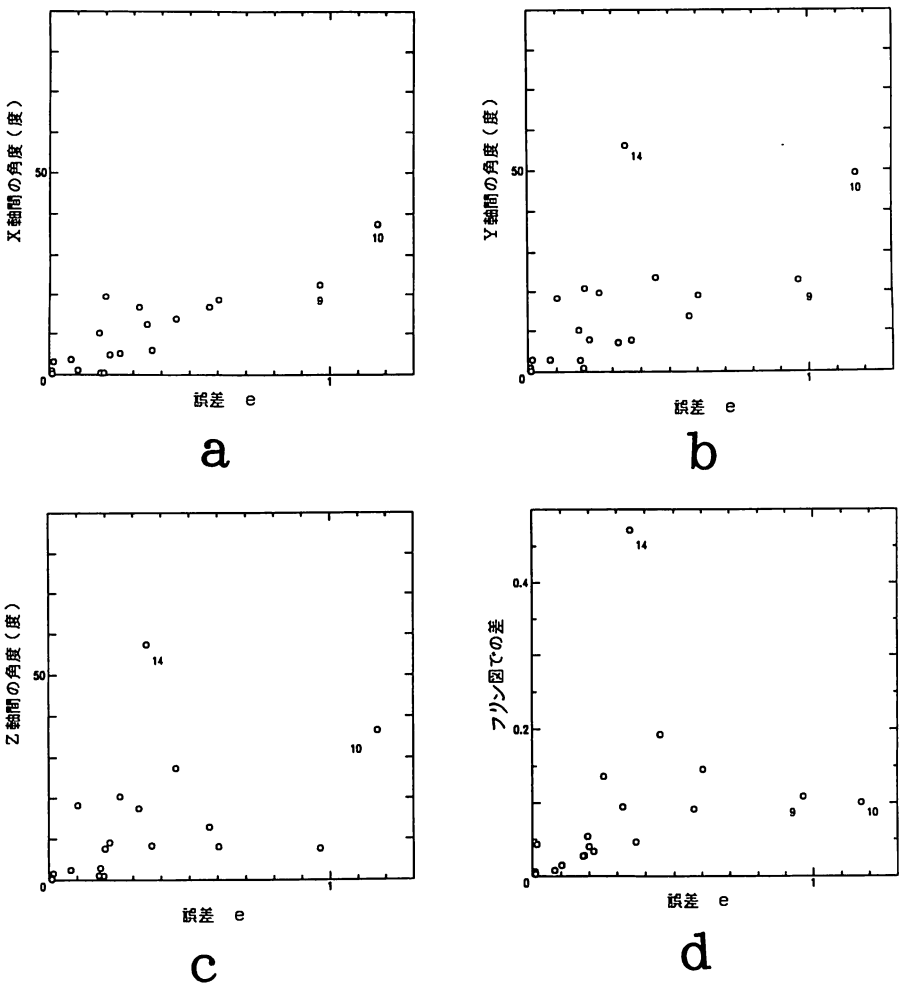
$r$ から決まる長さ $l''_C$ を $l_r$，また $\frac{p}{q}$ から決まる長さ $l''_C$ を $l_{pq}$ と表し，両者の差を無次元化した値の絶対値を

$$c = \frac{l_{pq} - l_r}{l_{pq}} = 1 - \frac{qr}{p} \tag{4}$$

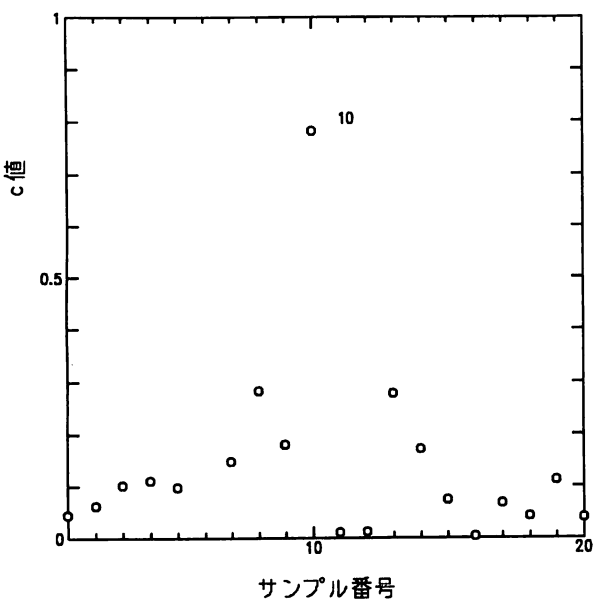
で定義し，これを $c$ 値（$c$-value）と呼ぶ．

$l_{pq}$を変形前の長さ，$l_r$ を変形後の長さと考えると $c$ 値は伸び歪に対応する．$c$ 値は定義から，ゼロの時に適合性は最も良く，ゼロからはずれるにしたがって悪くなる．第10図にサンプルごとの $c$ 値を示す．

このように定義された $c$ 値を使って先の第 9 図を描き直すと第11図のようになる．$c$ 値と主歪軸のシュミットネット下半球投影図上での差と，$c$ 値と主歪値のフリン図上での距離の差の間の相関ははっきりしない．しかし，$c$ 値が小さい場合に最小 2 乗法と平均法の結果は一致する傾向を示す．この傾向は，誤差 $e$ を用いるより $c$ 値を使ったほうが多少はっきりする．$c$ 値と誤差 $e$ との相関を第12図に示す．相関はサンプル 9 を除くとよく成立している．




第９図　誤差 $e$ と各主歪軸間の角度の差の相関図および誤差 $e$ とフリン図上での差の相関図.
横軸は誤差 $e$．縦軸は最小２乗法と平均法で得た各主歪軸間の差（度）.
ａ：$X$ 軸について.　ｂ：$Y$ 軸について.　ｃ：$Z$ 軸について.
ｄ：縦軸は最小２乗法と平均法で得た主歪比のフリン図上での距離の差.




第10図　サンプルごとの $c$ 値

## 6．歪楕円体とデータ点を用いた比較

最小２乗法と平均法から計算された主歪値，主歪軸方位がどの程度の精度を有しているのかは，誤差 $e$ や $c$ 値である程度の推定がつくが，ここではこれらの方法で計算された歪楕円体そのものを考える．$A, B, C$ 面での歪楕円の周囲は第13図に示すように30°ずつ12等分され，３面であわせて36点（以後これらをデータ点と記す）がとられる．第14図において任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ を

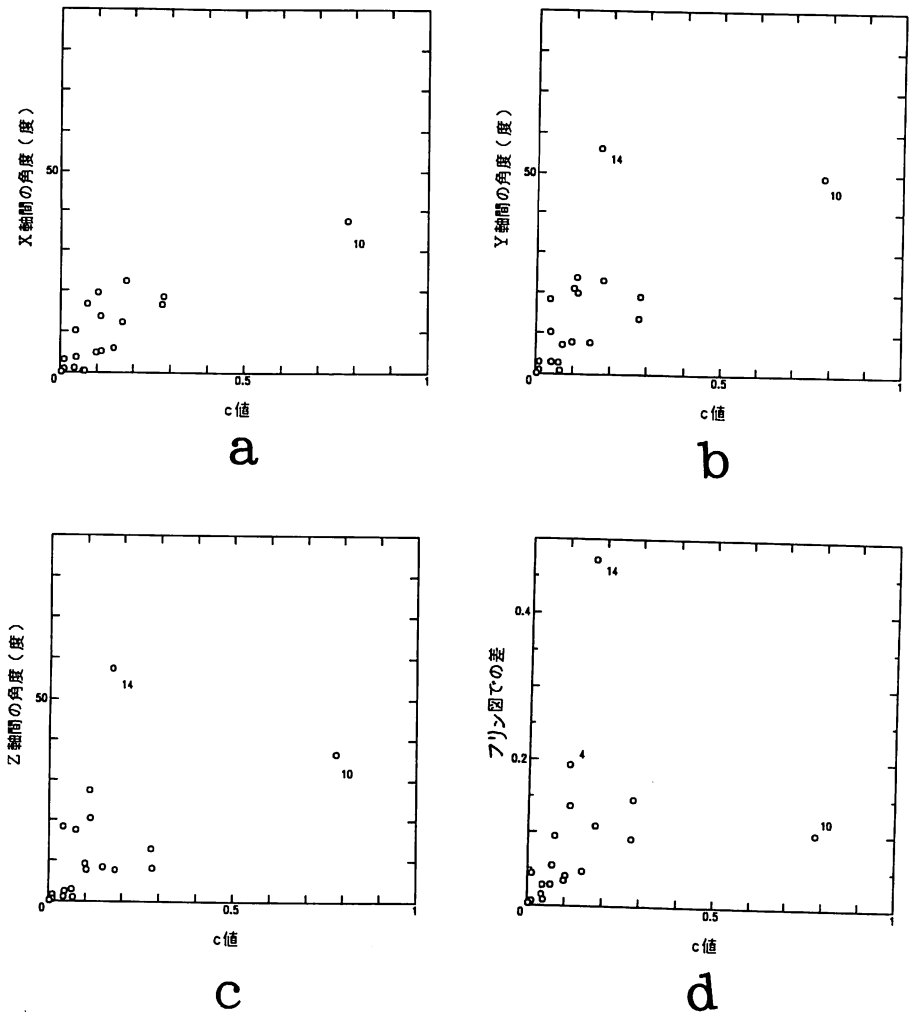
$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

とするとき

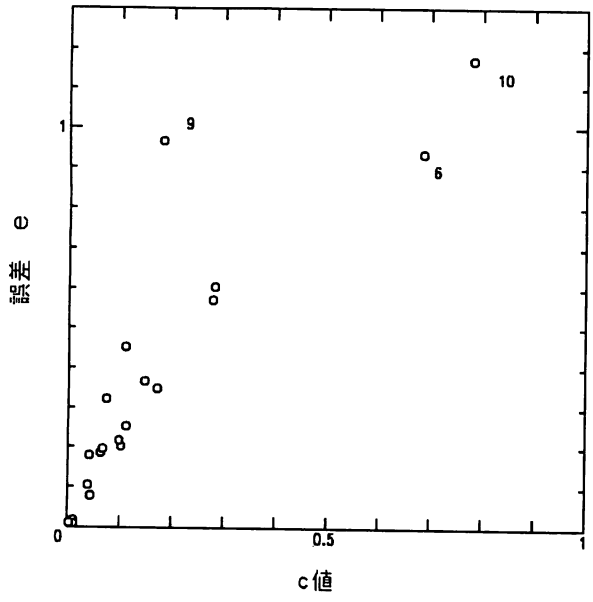
$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{p}|} \tag{7}$$

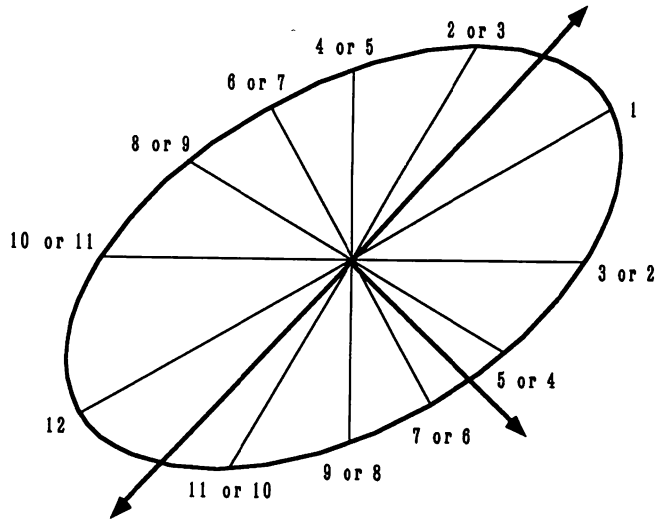
$$\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{p}|} \tag{8}$$



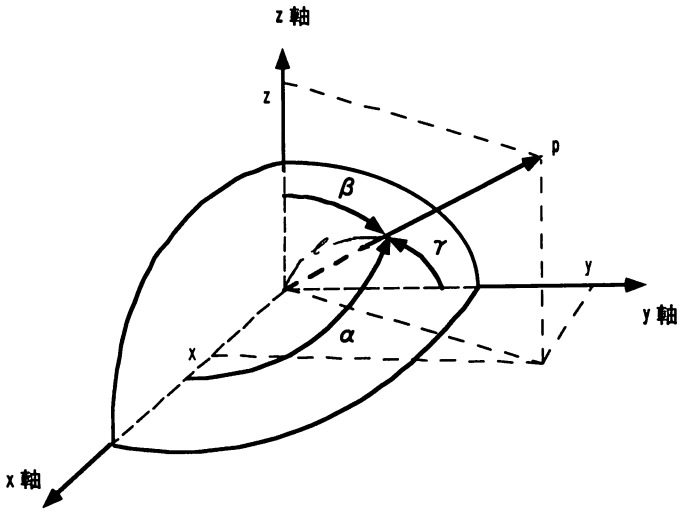

第11図　$c$ 値と各主歪軸間の角度の差の相関図および $c$ 値とフリン図上での距離の差の相関図.
横軸は $c$ 値．縦軸は最小２乗法と平均法で得た各主歪軸間の差（度）.
ａ：$X$ 軸について．　ｂ：$Y$ 軸について．　ｃ：$Z$ 軸について．
ｄ：縦軸は最小２乗法と平均法で得た主歪比のフリン図上での距離の差.




第12図　$c$ 値と誤差 $e$ との相関図.
９番を除くサンプルでの相関はよい.




第13図　$A$, $B$, $C$ 面上の歪楕円周上の12点.
歪楕円の長軸から30°ずつ12等分される．長い矢印は走向，短い矢印は傾斜をあらわす.




第14図　*xyz* 系における楕円体.
任意のベクトル$\boldsymbol{p}$のオイラー角は$\alpha$，$\beta$，$\gamma$．座標は $(x, y, z)$．原点から $\boldsymbol{p}$ の方向の楕円体面上の点までの距離は $l$.

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{p}|} \tag{9}$$

が成立し，楕円体

$$(x\ y\ z)\begin{bmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ sym & & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=1 \quad \text{すなわち}$$

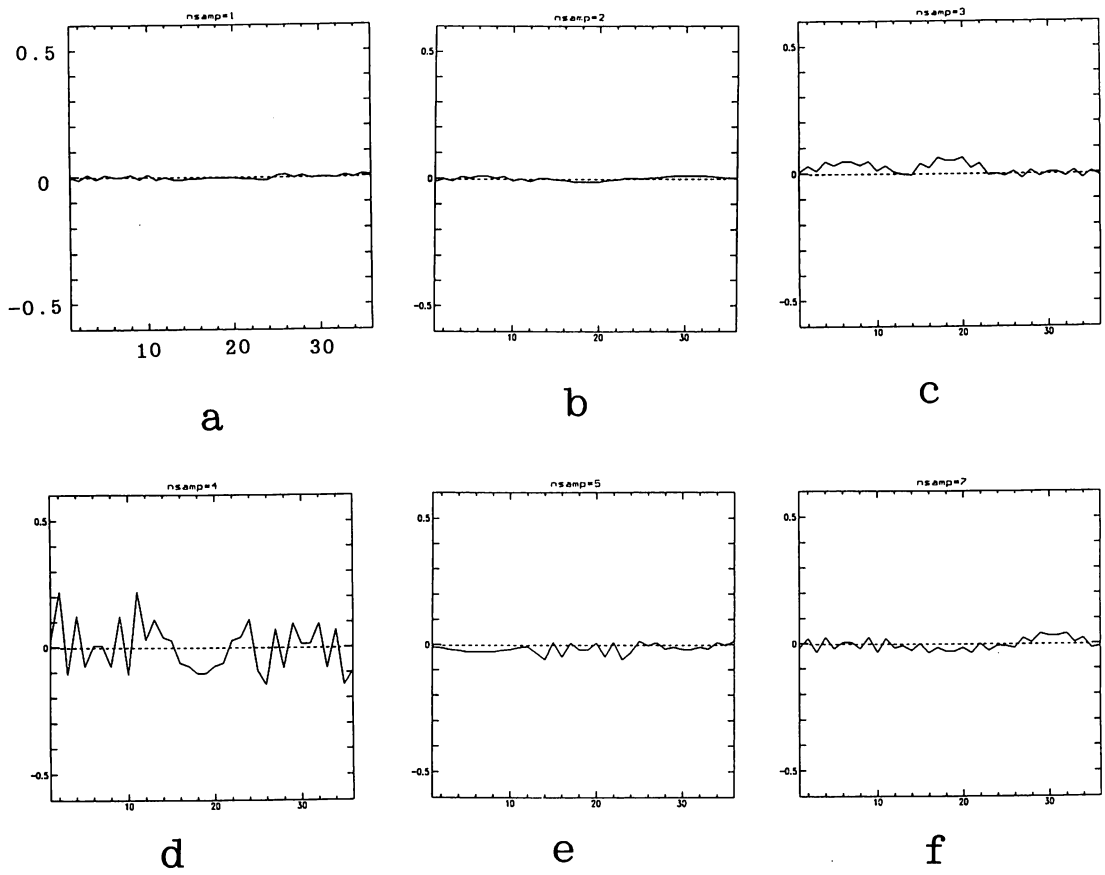
$$ax^2+2bxy+2czx+dy^2+2eyz+hz^2=1 \tag{10}$$

上の $\boldsymbol{p}$ ベクトルの交点と楕円体の中心との距離を $l$ とすると，

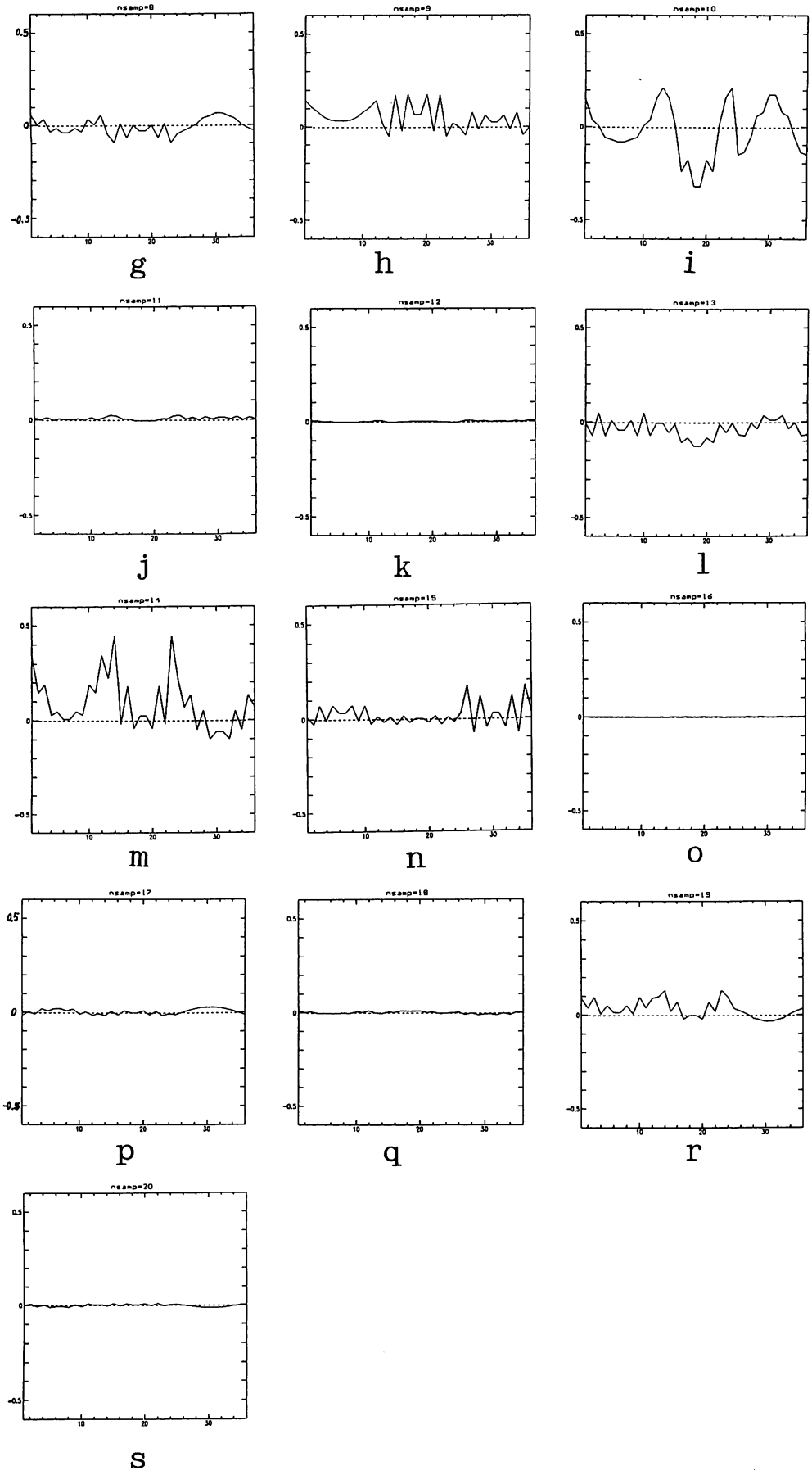
$x=l\cos\alpha$；　$y=l\cos\beta$；　$z=l\cos\gamma$ であるから，

$$l^2\,(a\cos^2\alpha+2b\cos\alpha\cos\beta+2c\cos\gamma\cos\alpha+d\cos^2\beta$$
$$+\,2e\cos\beta\cos\gamma+h\cos^2\gamma)=1 \tag{11}$$

が成立する．この式を用いると，歪楕円体の中心からデータ点までの距離や，データ点と同じ方向の歪楕円体上の点の距離を計算することができる．




第15図　データ点での最小２乗法と平均法で得た歪楕円体の差.
*SEU* 系の原点と平均法で得た歪楕円体表面上のデータ点と同一方向の点との間の距離を *Ea* とし，最小２乗法で得た歪楕円体についての同様な距離を *El* とするとき，*Nal* を(*Ea*-*El*)/*El* とする．データ点番号を横軸にとり，縦軸に *Nal* をとる．サンプル１，２，３... 20の順にａ，ｂ，ｃ... ｓを付けた．サンプル６はないので図の数は19である．


nsamp=8
g
nsamp=9
h
nsamp=10
i
nsamp=11
j
nsamp=12
k
nsamp=13
l
nsamp=14
m
nsamp=15
n
nsamp=16
o
nsamp=17
p
nsamp=18
q
nsamp=19
r
nsamp=20
s

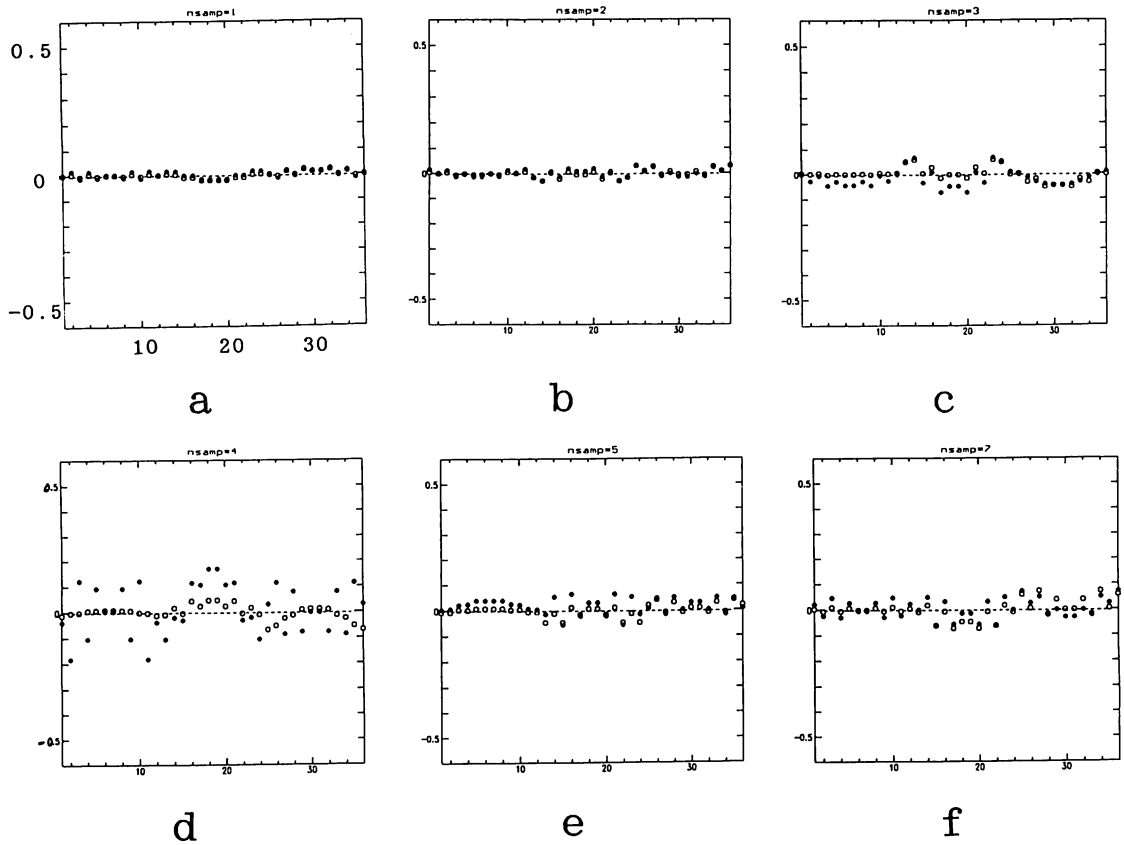
第15図の 2

**最小２乗法と平均法で求めた歪楕円体の比較**

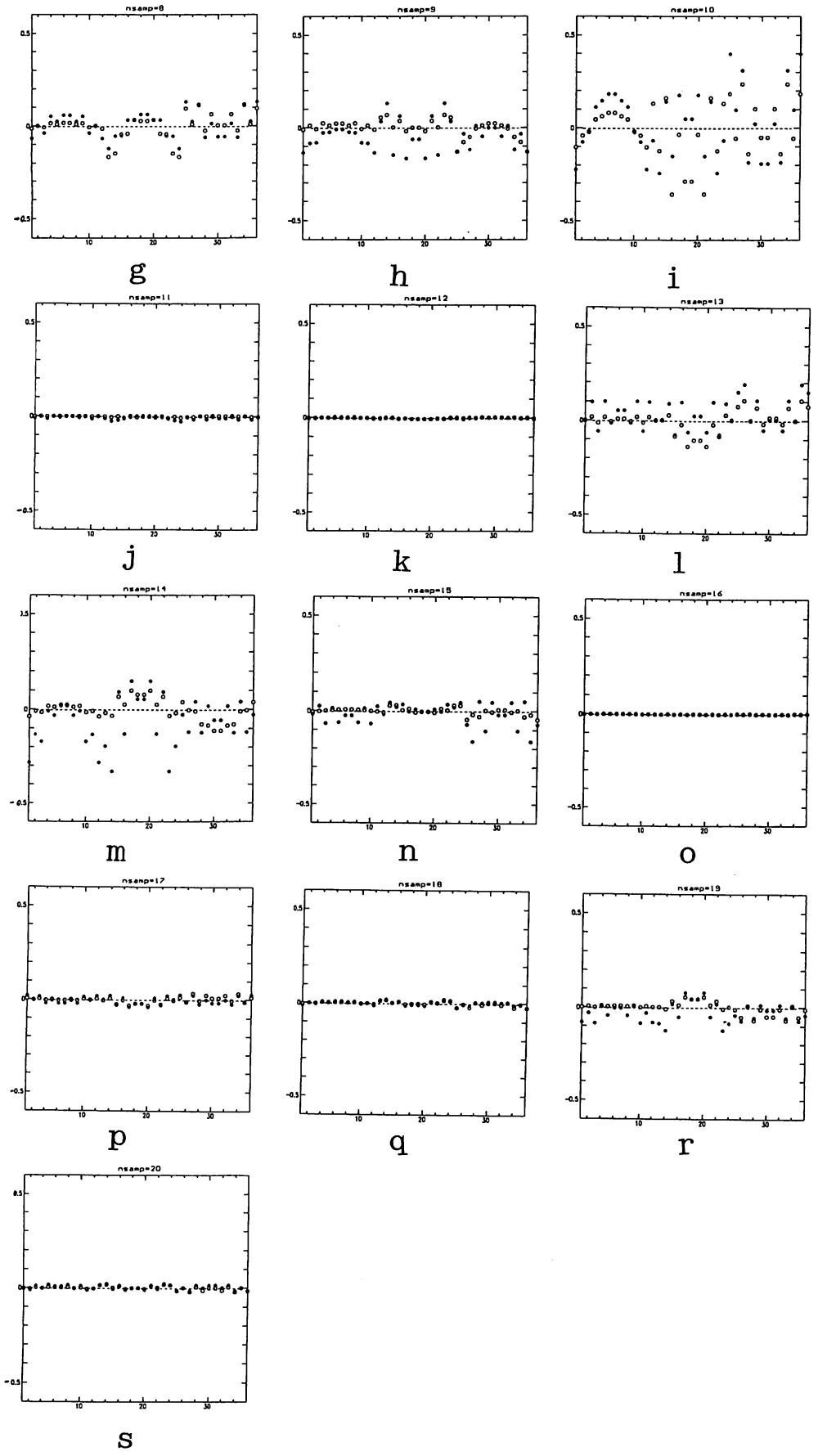
上述の式を用いて，歪楕円体の中心から36個のデータ点と同じ方向の最小２乗法で得た歪楕円体上の点の距離 *El* と，平均法で得た歪楕円体上の点の距離 *Ea* を計算し，この差を *Eal* (= *Ea* − *El*) とする．*Eal* を *El* で除して無次元化した量を *Nal* とする．*Nal* は最小２乗法で得た歪楕円体上の点と平均法で得た歪楕円体上の点との差を無次元化した値であり，以下両方法での歪楕円体の差と記す．データ点番号を横軸に，両方法での歪楕円体の差 (*Nal*) を縦軸にとり第15図に示す．*Nal* = 0 の点線が最小２乗法で得た歪楕円体面上のデータ点方向の点を示す．すなわち最小２乗法で得た歪楕円体である．実線が両方法での歪楕円体の差 (*Nal*) である．実線が点線に近づくほど両方法で得た歪楕円体の違いはなくなる．図の *a*, *b*, *c*..., *s* はサンプル１，２，３...，20に対応する．サンプル６は示していないためサンプル数は19個である．データ点番号１～12は *A* 面上の，13～24は *B* 面上の，25～36は *C* 面上の歪楕円上の点であるため，これらをひと塊としてデータ点は分布している．

**最小２乗法と平均法の歪楕円体とデータ点の比較**

上述の式を用いて，歪楕円体の中心から36個のデータ点までの距離 *Tl* と，データ点と同じ方向の歪楕円体上の点の距離 *El* を計算し，この差を *Gl* (= *Tl* − *El*) とする．中心から歪楕円体上の点までの距離 *El* でこの差 *Gl* を除して無次元化した量を *Nl* とし，これを以下データ点と歪楕円体との差と記す．*Nl* をサンプルごとに第16図に示す．水平な点線 *Nl* = 0 は白丸のデータ点を考えるときには最小２乗法で得た歪楕円体面を意味する．黒丸のデータ点を見るときには点線 *Nl*=0 は平均法での歪楕円体面をあらわす．この図はこれら２図を重ね合わせたものであり，この図から白丸と黒丸のばらつきが比較できる．*Nl* は無次元化されているので絶対量の比較はこの図からはできない．この図から最小２乗法で得た *Nl* (白丸) が平均法で得た *Nl* (黒丸) よりも歪楕円体のまわりのばらつきは小さいことがわかる．




第16図　データ点と歪楕円体表面上の点の差．
歪楕円体表面上のデータ点と同方向の点の原点からの距離を *El* としデータ点の原点からの距離を *Tl* とする．*Nl* を ( *Tl* - *El* ) / *El* であらわす．データ点番号を横軸にとり，縦軸に *Nl* をとる．白丸は最小２乗法で得た歪楕円体についての *Nl*．黒丸は平均法で得た歪楕円体についての *Nl*．白丸を見るときの *Nl* =0の点線は最小２乗法で得た歪楕円体表面の点．黒丸を見るときの *Nl* =0の点線は平均法で得た歪楕円体表面の点．白丸と黒丸は相対的関係を表しているので，絶対量としての比較はできない．サンプル１，２，３... 20の順にａ，ｂ，ｃ... ｓを付けた．サンプル６はないので図の数は19である．

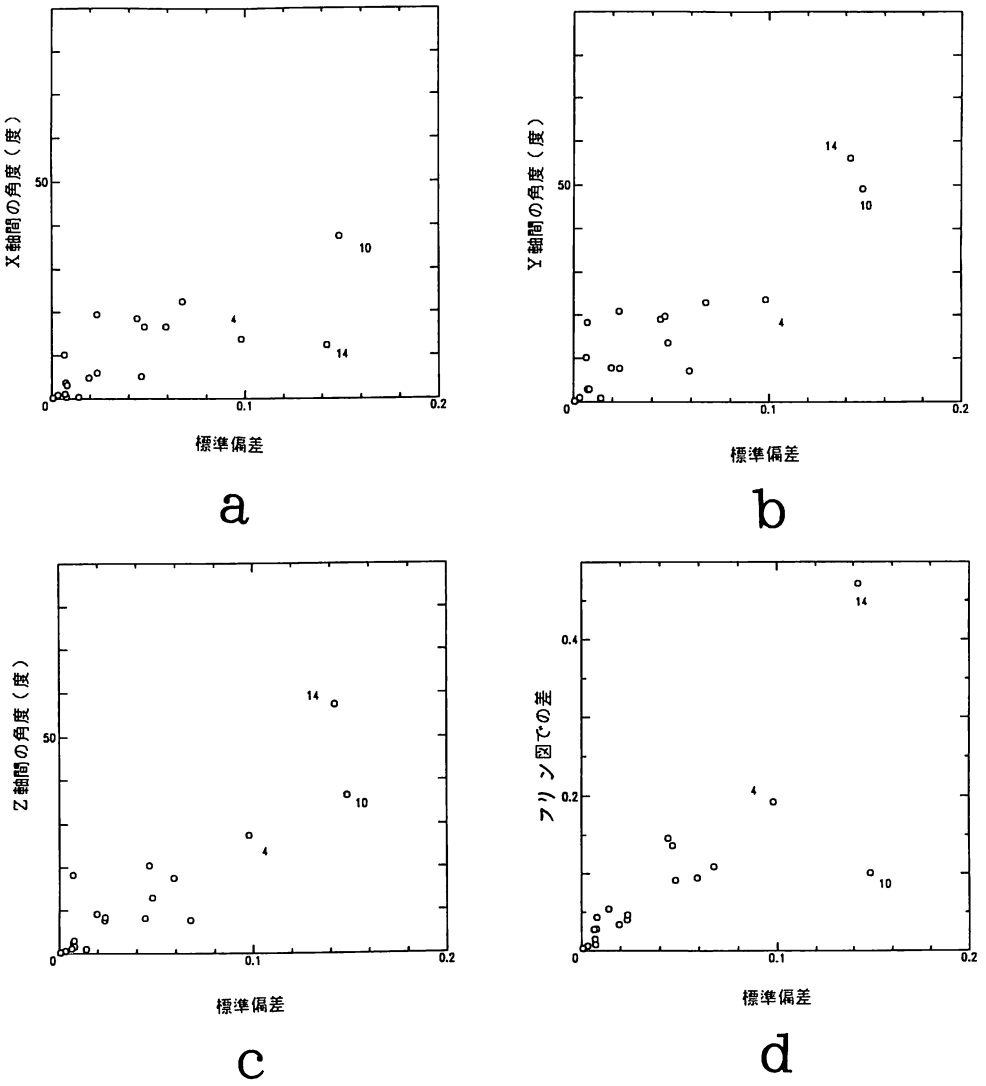

nsamp=8
g
nsamp=9
h
nsamp=10
i
nsamp=11
j
nsamp=12
k
nsamp=13
l
nsamp=14
m
nsamp=15
n
nsamp=16
o
nsamp=17
p
nsamp=18
q
nsamp=19
r
nsamp=20
s

第16図の 2

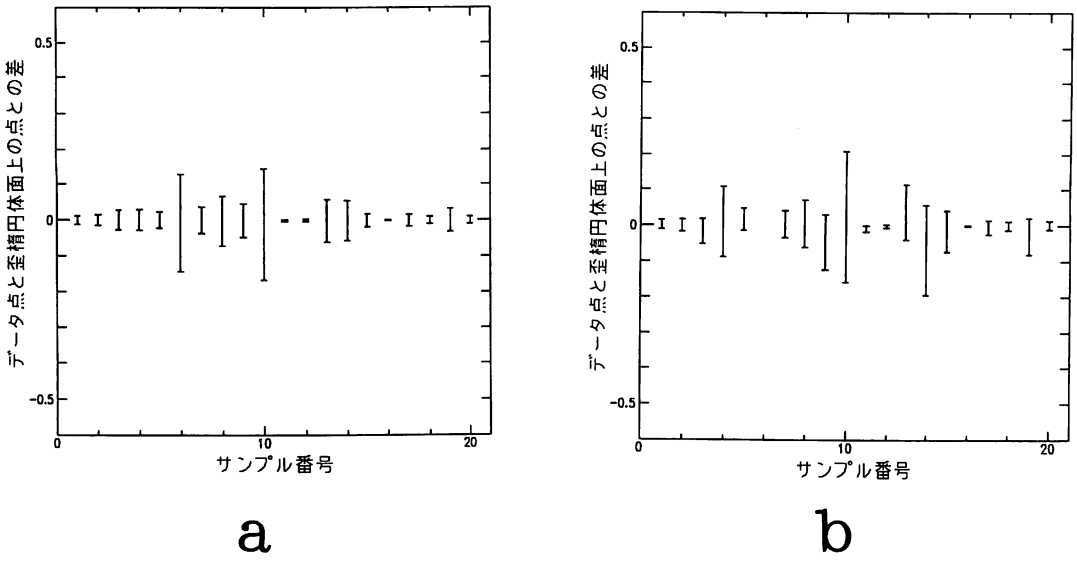
## 7．考　察

最小２乗法と平均法による主歪軸間の角度差と $c$ 値との関係を示す第11図 $a$, $b$, $c$ や，フリン図上での最小２乗法と平均法の主歪比の差と $c$ 値との関係を示す第11図ｄからこれらの間には，はっきりとした相関は認められなかった．第15図から両方法での歪楕円体の差(*Nal*)のばらつきが大きくなるとき主歪軸方位の差やフリン図での差は大きくなる．これをはっきりと示すために，両方法での歪楕円体の差(*Nal*)の標準偏差を計算し，この標準偏差と $X$ 軸間の差の相関を第17図ａに，$Y$ 軸間の差との相関を第17図ｂに，$Z$ 軸間の差との相関を第17図ｃに，フリン図上での差との相関を第17図ｄに作った．これらの図から正の相関関係が認められる．すなわち標準偏差（*Nal* のばらつき）が大きくなると主歪軸間角度の差やフリン図上の距離の差も大きくなる．これは主歪軸間角度の差などを考察することと，歪楕円体を直接考察することとが同等であることを意味する．しかし，これらのことからは最小２乗法と平均法とのどちらの方法がより真に近い歪を計算しているのかはわからない．

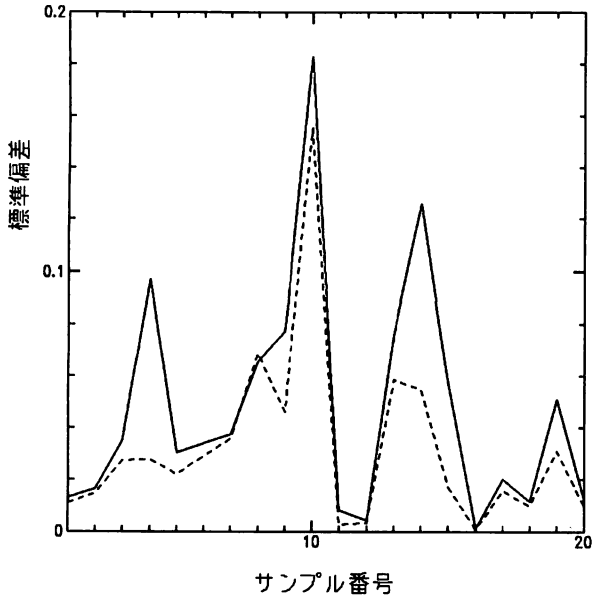
データ点の歪楕円体からのばらつきは $c$ 値と相関があるように見えるが，第16図からかならずしも $c$ 値が小さいときにばらつかず，$c$ 値が大きいとばらつくわけではないように見える．たとえば，サンプル４と５は $c$ 値はほとんど等しいが，第16図からサンプル４はかなりばらつき，サンプル５はあまりばらつかない．またサンプル９と14の $c$ 値はほとんど同じだが，第16図からサンプル14はかなりばらつき，サンプル９はそれほどばらつかない．最小２乗法で得たデータ点と歪楕円体との差(*Nl*)の標準偏差をサンプルごとに示した第18図ａと，平均法で得たデータ点と歪楕




第17図　*Nal* の標準偏差と各主歪軸間の角度の差の相関図および *Nal* の標準偏差とフリン図上での差の相関図．　横軸は *Nal* の標準偏差，すなわち最小２乗法と平均法で得た歪楕円体上の点の差のばらつき．縦軸は最小２乗法と平均法で得た各主歪軸の間の角度（度）．　ａ：$X$ 軸について．サンプル14を除いて正の相関がある．　ｂ：$Y$ 軸について．正の相関がある．　ｃ：$Z$ 軸について．サンプル14を除いて正の相関がある．　ｄ：縦軸は最小２乗法と平均法で得た主歪比のフリン図上での距離の差．10と14番を除くサンプルは正の相関を示す．




第18図　最小２乗法と平均法で得たデータ点と歪楕円体上の点との差の分布をサンプルごとに示す．
a：最小２乗法で得たデータ点と歪楕円体との差（*Nl*）の標準偏差．サンプルごとに正の標準偏差と負の標準偏差を縦棒で結んである．縦棒の中心が平均値．最小２乗法ではサンプル６についても歪楕円体を計算できるため図に示している．
b：平均法で得たデータ点と歪楕円体との差（*Nl*）の標準偏差．サンプル６はない．

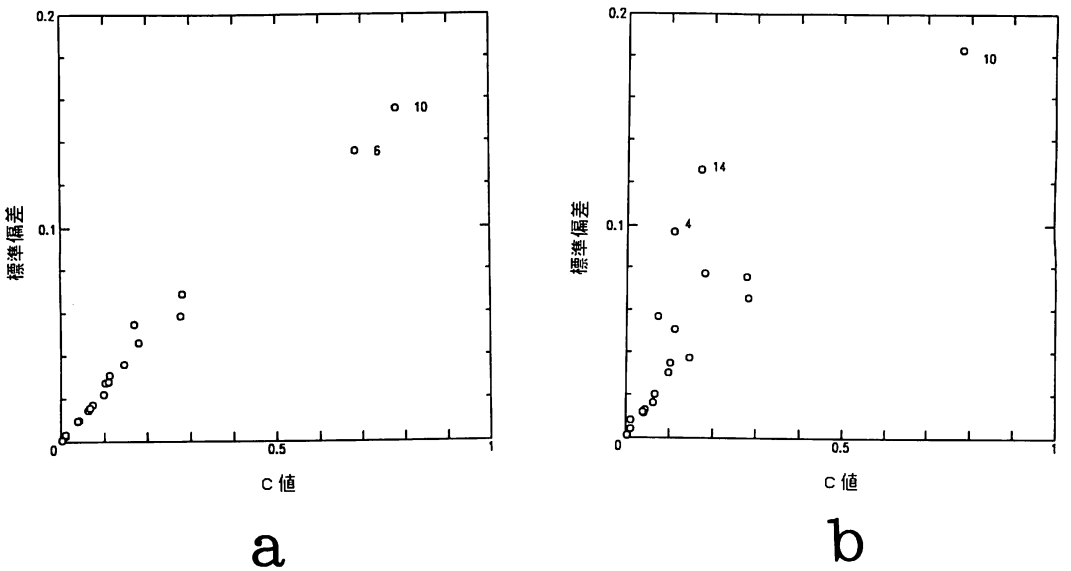



第19図　サンプルごとの *Nl* 値の標準偏差．　点線は最小２乗法による *Nl* の標準偏差．実線は平均法による *Nl* の標準偏差．平均法の方が最小２乗法よりもばらつきが大きい．サンプル６はない．折れ線はサンプル５から７に直接つないでいる．

円体との差(*Nl*)の標準偏差をサンプルごとに示した第18図ｂとを比べると，平均法の方が標準偏差（ばらつき）が大きいように見える．このことは第19図に示すように，サンプルごとに最小２乗法で得た *Nl* の標準偏差と平均法で得た *Nl* の標準偏差とを同一図上にとればはっきりする．サンプル４と14を除くと，平均法の標準偏差の方が多少大きい．

最小２乗法で得たデータ点と歪楕円体との差(*Nl*)の標準偏差と $c$ 値との相関を示す第20図ａから，最小２乗法でのばらつきは $c$ 値ときれいな正の相関がある．このことから $c$ 値が小さくなれば標準偏差も小さくなって最小２乗法が真の歪を与えると思われる．平均法で得たデータ点と歪楕円体との差(*Nl*)の標準偏差と $c$ 値との相関を示す第20図ｂから，平均法では $c$ 値が小さくなればばらつきは小さくなる傾向があるが，はっきりとした正の相関はないため，平均法では $c$ 値が小さくなっても真の歪を与えることは期待できない．たとえばサンプル４や14に見られるように $c$ 値が小さい場合でもばらつきが大きい．

$c$ 値のしきい値をどこにとるかについての確かな根拠はない．最小２乗法と平均法による主歪軸間の角度差と $c$ 値との関係を示す第11図ａ，ｂ，ｃや，両方法から得られたフリン図上での主歪比の差と $c$ 値との関係を示す第11図ｄでは，$c$ 値が0.3以下でクラスターを作っている．しかしこれは $c$ 値が0.3以下のときに得られた歪が適正であることを意味しない．第15図に示された最小２乗法と平均法で得られた歪楕円体の差と $c$ 値とを見比べると，おそらく0.1が安全な値だろう．これ以下のときに歪解析が意味をもち，これ以上のときには計算された歪楕円体は大きな誤差を含むと考える．




第20図　最小２乗法と平均法で得たデータ点と歪楕円体上の点との差の標準偏差と $c$ 値との相関.
a：最小２乗法で得たデータ点と歪楕円体との差（$Nl$）の標準偏差と $c$ 値との相関図. はっきりとした正の相関がある.
b：平均法で得たデータ点と歪楕円体との差（$Nl$）の標準偏差と $c$ 値との相関図. 相関ははっきりしない.

## 前論文での誤りの訂正

（１）前論文（林, 1994）の154ページの３つの式に逆行列の記号が抜けていた.

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_{11} & \sin^2\theta_{11} & \sin 2\theta_{11} \\ \cos^2\theta_{12} & \sin^2\theta_{12} & \sin 2\theta_{12} \\ \cos^2\theta_{13} & \sin^2\theta_{13} & \sin 2\theta_{13} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda'_{11} \\ \lambda'_{12} \\ \lambda'_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix}_{yz} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_{21} & \sin^2\theta_{21} & \sin 2\theta_{21} \\ \cos^2\theta_{22} & \sin^2\theta_{22} & \sin 2\theta_{22} \\ \cos^2\theta_{23} & \sin^2\theta_{23} & \sin 2\theta_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda'_{21} \\ \lambda'_{22} \\ \lambda'_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix}_{zx} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_{31} & \sin^2\theta_{31} & \sin 2\theta_{31} \\ \cos^2\theta_{32} & \sin^2\theta_{32} & \sin 2\theta_{32} \\ \cos^2\theta_{33} & \sin^2\theta_{33} & \sin 2\theta_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda'_{31} \\ \lambda'_{32} \\ \lambda'_{33} \end{bmatrix}$$

（２）同じページの右の段の下から２行目につぎの文を入れる.

（d と e の間）面 $A$, $B$, $C$ での主相反２次の伸びを GS 法により相対化する.

（３）以下に示すように154ページから155ページの（e）の文章中の $\lambda'$ の添字の順序をいれかえる.

面 $A$ 上で，面 $A$ と面 $xy$, $yz$, $zx$ との３つの交点方向での相反２次の伸びを $\lambda'_{11}$, $\lambda'_{21}$, $\lambda'_{31}$ とすると，これらは面 $A$ での主相反２次の伸び $\lambda'_{1A}$, $\lambda'_{2A}$ を用いて次式により求めることができる.

$$\lambda'_{i1} = \lambda'_{1A}\cos^2\phi_{1i} + \lambda'_{2A}\sin^2\phi_{1i}$$

同様にして，面 $B$ での３つの交点方向での相反２次の伸び $\lambda'_{12}$, $\lambda'_{22}$, $\lambda'_{32}$, は面 $B$ での主相反２次の伸び $\lambda'_{1B}$, $\lambda'_{2B}$ を用いて，また面 $c$ での３つの交点方向での相反２次の伸び $\lambda'_{13}$, $\lambda'_{23}$, $\lambda'_{33}$, は面 $C$ での主相反２次の伸び $\lambda'_{1c}$, $\lambda'_{2c}$ を用いて次式により求めることができる

$$\lambda'_{i2} = \lambda'_{1B}\cos^2\phi_{2i} + \lambda'_{2B}\sin^2\phi_{2i}$$

$$\lambda'_{i3} = \lambda'_{1C}\cos^2\phi_{3i} + \lambda'_{2C}\sin^2\phi_{3i}$$

## 文　献


Cloos, E. (1947) Oolite deformation in the southern mountain fold, Maryland. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **58**, 843-918.

De Paor, D. G. (1986) Orthographic analysis of geological structures – II. Practical applications. *Jour. Struct. Geol.*, **8**, 87-100.

De Paor, D. G. (1990) Determination of the strain ellipsoid from sectional data. *Jour. Struct. Geol.*, **12**, 131-137.

Dunnet, D. (1969) A technique of finite strain analysis using elliptical particles. *Tectonophysics*, **7**, 117-136.

Dunnet, D. and Siddans, A. W. B. (1971) Non-random sedimentary fabrics and their modification by strain. *Tectonophysics*, **12**, 307-325.

Elliott, D. (1970) Determination of finite strain and initial shape from deformed elliptical objects. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **81**, 2221-2236.

Gendzwill, D. J. and Stauffer, M. R. (1981) Analysis of triaxial ellipsoids: their shapes, plane sections and plane projections. *Mathem. Geol.*, **13**, 135-152.

林大五郎(1988) 3 次元有限歪解析 ー沖縄島国頭層群嘉陽層についてー, 地質雑, **94**, 757-768.

林大五郎(1989)「3 次元有限歪解析 ー沖縄島国頭層群嘉陽層についてー 林, 1988」における誤りとその訂正, 地質雑, **95**, 553-558.

林大五郎(1992)変形前のマーカー楕円の性質 ー沖縄島国頭層群嘉陽層の場合ー, 地質雑, **98**, 841-854.

林大五郎(1994)非平行断面上の歪楕円を用いた 3 次元歪解析法, 地質雑, **100**, 150-161.

Helm, D. G. and Siddans, A. W. B. (1971) Deformation of a slaty, lapillar tuff in the English Lake District: Discussion. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **82**, 523-531.

Lacassin, R. and van den Driessche, J. (1983) Finite strain determination of gneiss: application of Fry's method to porphyroid in the southern Massif Central (France). *Jour. Struct. Geol.*, **5**, 245-253.

Lisle, R. J. (1984) Strain discontinuities within the Seve-Koli Nappe Complex, Scandinavian Caledonides. *Jour. Struct. Geol.*, **6**, 101-110.

Matthews, P. E. , Bond, R. A. B. and Van den Berg, J. J. (1974) An algebraic method of strain analysis using elliptical markers. *Tectonophysics*, **24**, 31-67.

Miller, D. M. and Oertel, G. (1979) Strain determination from the measurement of pebble shapes: a modification. *Tectonophysics*, **55**, 11-13.

Milton, N. J. (1980) Determination of the strain ellipsoid from measurements on any three sections. *Tectonophysics*, **64**, 19-27.

Mukhopadhyay, D. (1973) Strain measurements from deformed quartz grains in the slaty rocks from the Ardennes and the northern Eifel. *Tectonophysics*, **16**, 279-296.

Oertel, G. (1970) Deformation of a slaty, lapillar tuff in the Lake District, England. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **81**, 1173-1188.

Oertel, G. (1978) Strain determination from the measurement of pebble shapes. *Tectonophysics*, **50**, 1-7.

Owens, W. H. (1984) The calculation of a best-fit ellipsoid from elliptical sections on arbitrarily orientated planes. *Jour. Struct. Geol.* , **6**, 571-578.

Ragan, D. M. (1987) Strain from three measured stretches. *Jour. Struct. Geol.*, **9**, 897-898.

Ramsay, J. G. (1967) *Folding and fracturing of rocks.* McGraw-Hill, 568p.

Roberts, B. and Siddans, A. W. B. (1971) Fabric studies in the Llwyd Mawr Ignimbrite, Caernarvonshire, North Wales. *Tectonophysics*, **12**, 283-306.

Sanderson, D. J. (1977) The analysis of finite strain using lines with an initial random orientation. *Tectonophysics*, **43**, 199-211.

Sanderson, D. J. and Meneilly, A. W. (1981) Analysis of three-dimensional strain modified uniform distributions: andalusite fabrics from a granite aureole. *Jour. Struct. Geol.*, **3**, 109-116.

Shimamoto, T. and Ikeda, Y. (1976) A simple algebraic method for strain estimation from deformed ellipsoidal objects. 1. Basic theory. *Tectonophysics*, **36**, 315-337.

Siddans, A. W. B. (1972) Slaty cleavage – a review of research since 1815. *Earth Sci. Rev.*, **8**, 205-232.

Siddans, A. W. B. (1977) The development of slaty cleavage in a part of the French Alps. *Tectonophysics*, **39**, 533-557.

Siddans, A. W. B. (1980) Analysis of three-dimensional, homogeneous, finite strain using ellipsoidal objects. *Tectonophysics*, **64**, 1-16.

Wheeler, J. (1986) Average properties of ellipsoidal fabrics: implications for two-and three-dimensional methods of strain analysis. *Tectonophysics*, **126**, 259-270.

**要旨：地質構造解析における歪楕円体の適合度 *c* 値の提唱**

：林　大五郎

沖縄島中北部バン崎周辺の国頭層群嘉陽層の３次元歪解析を最小２乗法と平均法で行った．最小２乗法とは林（1994）の「歪解析法３」のことであり，平均法とは同じく「歪解析法２」のことである．両者の結果はかなりくい違った．これを解明するため歪楕円体の適合性をあらわす *c* 値を導入した．最小２乗法によって得られた歪楕円体は *c* 値が小さくなると歪楕円との差が小さくなった．しかし平均法の場合にはかならずしも小さくならない．このため，最小２乗法から得られた歪楕円体はｃ値が小さくなると真の歪楕円体に近づくことが期待されるが，平均法の場合には期待できない．

**キーワード**　最小２乗法，平均法，３次元歪解析，歪の適合性，*c* 値

（1995年２月14日受付，1995年３月20日受理）