

## 互いに直交に近い面上の歪楕円を用いる 直交平均歪解析法の実用性

**Practicity of the orthogonal average technique on strain  
analysis using strain ellipses on the mutually subperpendicular planes**

林 大五郎\*  
Daigoro Hayashi\*

**Abstract:** I have proposed three techniques for three dimensional strain analysis, that is, the orthogonal average method, the oblique average method and the least square method (Hayashi; 1994, 1995). The orthogonal average method is the simplest technique in terms of its easiest computer coding and simplicity to prepare input data. In spite of the convenience of the orthogonal average method, there is a difficulty to cut three exactly mutually perpendicular sections from oriented rock samples. The orthogonal average method cannot be used properly unless strain ellipses are obtained from three orthogonal sections. We can calculate the mutually perpendicular planes from any subperpendicular planes of rock samples. Using the newly constructed orthogonal coordinate system and composing the strain ellipses described on the system, the strain ellipsoid can be estimated. I call the technique as "practical average method". The practical average method is useful and the difference between the estimated strain ellipsoids which are calculated by the practical average method and by the least square method is conveniently small, if the difference between the original oblique axes and the newly constructed orthogonal axes are less than  $10^\circ$  and c value is less than 0.1 in the case of strain analysis on the Kayo sandstone (Hayashi; 1988, 1989).

**Key words:** *three dimensional strain analysis, orthogonal average method, oblique average method, least square method, practical average method*

### はじめに

歪楕円から歪楕円体を合成する3次元歪解析法を分類すると最小2乗法と平均法に分けられる(林; 1994, 1995). 平均法にはさらにマーカー

を測る面が直交するときとしないときとで, 直交平均法と斜交平均法とがある(林; 1994, 1995). この3つの歪解析法のうちプログラムと入力データの作成のもっとも容易なのは直交平均法である.

1995年10月30日受付, 1996年3月2日受理.

\*琉球大学理学部物質地球科学教室

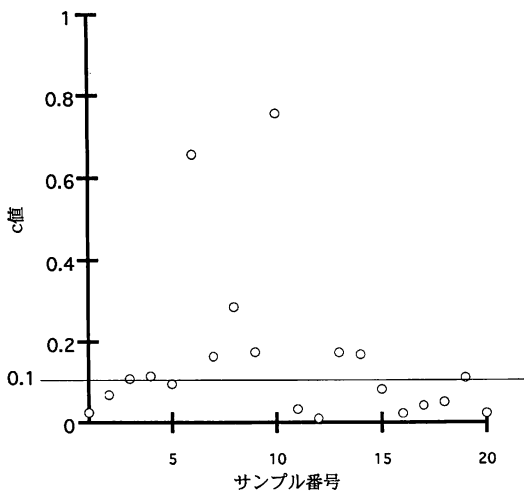
Department of Physics and Earth Sciences, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 903-01, Japan

野外から採集してきた定方位サンプルを室内で正確に直交する3面に切断することはむづかしく、 $10^\circ$ 内外の直角からのくい違いを生づるのが普通である。このため厳密には最小2乗法か斜交平均法を使わねばならない。しかし簡便のため直交平均法を用いることがある (Ramsay, 1967; Roberts and Siddans, 1971; Shimamoto and Ikeda, 1976 ; 林, 1989 ; Hayashi and Baba, 1993)。ここでは、直交平均法を用いる際に、直交平均法にどのような改良をし、どの程度の直交からのずれまで許されるのか、を検討する。

### 直交平均法の欠点

直交平均法の欠点は林(1995)が「直交平均法の問題点」として詳しく述べているので、ここでは要点を記す。

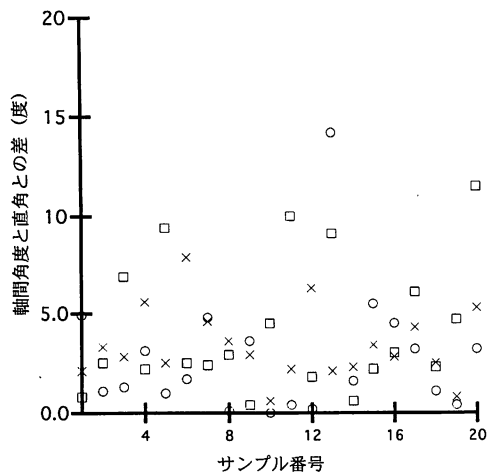
天然の歪解析の例として沖縄島<sup>くんちやん</sup>国頭層群<sup>かよう</sup>嘉陽層の砂岩から採取した定方位サンプル20個 (林; 1988, 1989, 1995)について検討する。第1図からc値(林, 1995)が0.1以下のサンプルが13個ある。c値が0に近いことは3面上の歪楕円として計算された楕円がこれらの合成楕円体とよく適合することを示しており、これらが



第1図 サンプルごとのc値.

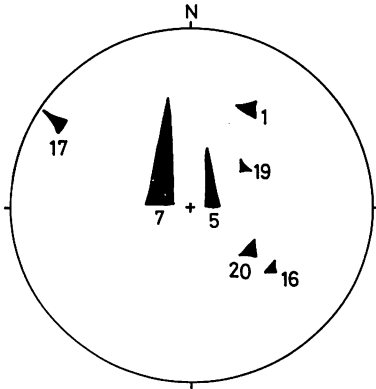
歪楕円, 歪楕円体であることを示唆する。しかしマーカーとした石英粒子には波動消光以外の変形は見られず、石英粒の平均形態楕円(体)を歪楕円(体)とみなすことは妥当ではないかもしれない。

これらのサンプルから切り出された3面間の角度は、第2図に示されるように直交していない。サンプル13番のx軸とy軸の間の角度 $104.2^\circ$ のように $14.2^\circ$ も直角からずれているものもある。このような斜交する3面上の歪楕円から直交平均法によって合成された歪楕円体の主歪軸は、シュミットネット上で一点として表わされず第3図に示されるようにある範囲を持つ。また主歪軸X, Y, Zは互いに直交していない。直交平均法を使うには、直交する3面での歪楕円を用いなければならないにもかかわらず、斜交する面での歪楕円を用いたことがその原因である。このように、直交平均法の欠点は、採集してきた定方位サンプルを厳密に直交する3面で切断しなければならないことにある。



第2図 嘉陽層の砂岩サンプルの斜交xyz系での各軸間角度の直角からの差.

- : x軸とy軸の軸間角度の直角からの差
- : y軸とz軸の軸間角度の直角からの差
- × : z軸とx軸の軸間角度の直角からの差



第3図 斜交する3面上の歪楕円から合成された歪楕円体のZ軸の分布(シュミットネット下半球投影). この図に示されていない点はサンプル16や19よりもばらつきは小さい.

### 実用平均法

斜交する3面に近い直交する3面を作れば、斜交するとはいっても直交からわずかな違いしかないので、この新たに作った直交面で、もとの斜交面の近似になるだろう。斜交する3面で測定したマーカー楕円を、新直交面で測られたと仮定して歪楕円体を求める方法を、実用平均法とよぶ。斜交するxyz系に近い直交系をつくるには、たとえば次のような方法がある。

(1)x軸を固定して、xy面に垂直なz'軸を作る。つぎにz'x面に垂直なy'軸を作る。以下に記すようにして、このようなx'y'z'系を右手系であるように作ることができる。

$$z' = \frac{x \times y}{|x \times y|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|x|^2 |y|^2 - (x \cdot y)^2}}$$

でxy面に垂直なz'軸を作る。

$$y' = \frac{z' \times x}{|z' \times x|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|z'|^2 |x|^2 - (z' \cdot x)^2}}$$

でz'x面に垂直なy'軸を作る。

(2)y軸を固定して、yz面に垂直なx'軸を作る。つぎにx'y面に垂直なz'軸を作る。以下に記すようにして、このようなx'y'z'系を右手系であるように作ることができる。

$$x' = \frac{y \times z}{|y \times z|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|y|^2 |z|^2 - (y \cdot z)^2}}$$

でyz面に垂直なx'軸を作る。

$$z' = \frac{x' \times y}{|x' \times y|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|x'|^2 |y|^2 - (x' \cdot y)^2}}$$

でx'y面に垂直なz'軸を作る。

(3)z軸を固定して、zx面に垂直なy'軸を作る。つぎにy'z面に垂直なx'軸を作る。以下に記すようにして、このようなx'y'z'系を右手系であるように作ることができる。

$$y' = \frac{z \times x}{|z \times x|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|z|^2 |x|^2 - (z \cdot x)^2}}$$

でzx面に垂直なy'軸を作る。

$$x' = \frac{y' \times z}{|y' \times z|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{|y'|^2 |z|^2 - (y' \cdot z)^2}}$$

でy'z面に垂直なx'軸を作る。

これら3直交系x'y'z'系, x'yz'系, x'y'z系各軸のベクトル平均からなる軸をx'', y'', z''軸とすると、3直交系の平均としての直交系x''y''z''系をうる<sup>1</sup>。これは斜交xyz系に最も近い直交

<sup>1</sup>3直交系の各軸のベクトル平均の方向が直交系をなすことの数学的証明はしていない。ここでの20個のサンプルの計算例では計算機の精度内で厳密に直交している。

系といえるだろう。今後この直交 $x''y''z''$ 系を簡単のため、直交 $xyz$ 系とよぶ。

この方法を天然の歪のサンプル(嘉陽層の砂岩)に適用し、 $xy'z'$ 系、 $x'y'z'$ 系、 $x''y''z''$ 系、直交 $xyz$ 系の各軸の方位を計算した。これら4座標系で斜交 $xyz$ 系を基準として各軸間の差を第4図に示す。第4図aでは $xy'z'$ 系の $x$ 軸が、第4図bでは $x'y'z'$ 系の $y$ 軸が、第4図cでは $x''y''z''$ 系の $z$ 軸が斜交 $xyz$ 系の $x$ 軸、 $y$ 軸、 $z$ 軸とそれぞれ定義により一致している。このため各図で3本の折れ線しか見ることが出来ない。第4図から直交 $xyz$ 系(太実線)が4座標系のうちの間にあることがわかり、直交 $xyz$ 系が、他の3つの直交系よりも斜交 $xyz$ 系を最もよく近似する直交系と言える。

**実用平均法での計算**

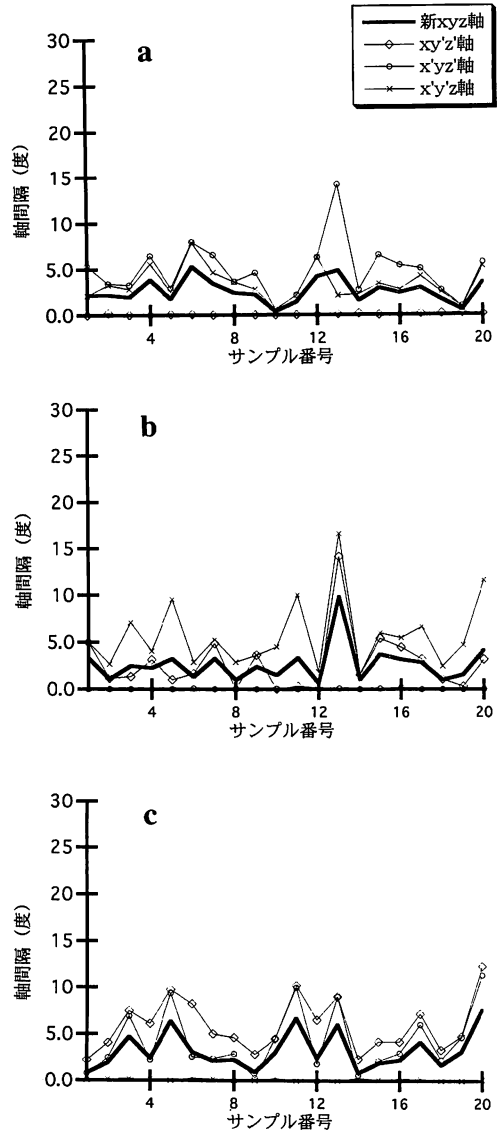
(1)直交に近く切った $A, B, C$ 面(斜交 $A, B, C$ 面とよぶ)上で歪楕円を求める。このとき、 $A$ 面と $C$ 面の交線が $x$ 軸、 $A$ 面と $B$ 面の交線が $y$ 軸、 $B$ 面と $C$ 面の交線が $z$ 軸となるように $A, B, C$ 面を決めておく。この $x, y, z$ 軸からなる系が斜交 $xyz$ 系である。

(2)斜交 $xyz$ 系から直交 $xyz$ 系を先に述べた方法で求める。

(3)斜交 $A, B, C$ 面上の歪楕円を直交 $A, B, C$ 面(直交 $xyz$ 系での3面 $xy, yz, zx$ 面)上の歪楕円とみなして歪楕円体を求める。直交 $xyz$ 系は歪楕円体を $SEU$ 系(空間座標系； $S$ は水平南向き、 $E$ は水平東向き、 $U$ は垂直上向き)に座標変換する際に使用される。

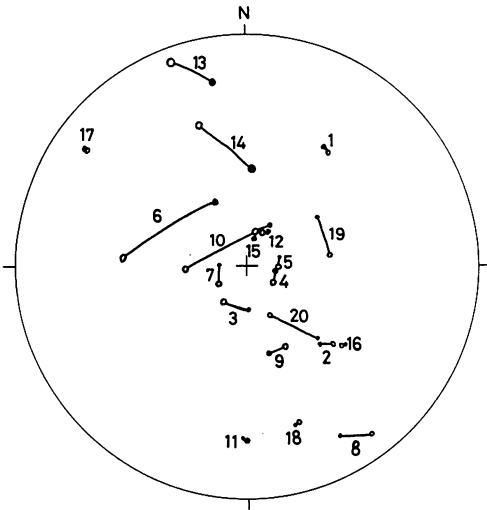
**主歪軸方位の最小2乗法解との比較**

第5図に実用平均法と最小2乗法<sup>2</sup>でえられた主歪 $Z$ 軸をシュミットネットの下半球に投影した。黒丸が実用平均法から求めた $Z$ 軸、白丸が最小2乗法による $Z$ 軸である。主歪軸 $X, Y, Z$ ごとの両者の差をサンプルごとに第6図

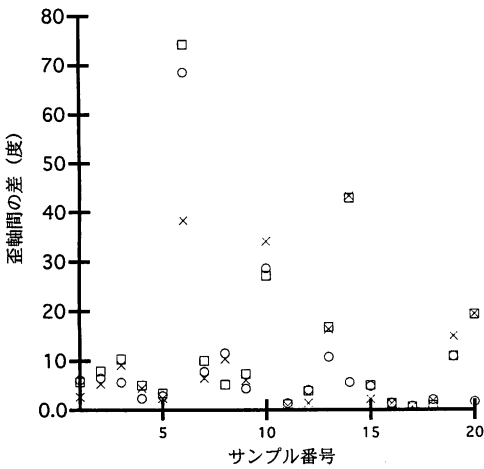


第4図 斜交 $xyz$ 系を基準とした各軸間の角度の差(度)。  
 a: 斜交 $xyz$ 系の $x$ 軸方位と各座標系の $x$ 軸との角度の差。斜交 $xyz$ 系と $xy'z'$ 系の $x$ 軸は横軸に重なる。  
 b: 斜交 $xyz$ 系の $y$ 軸方位と各座標系の $y$ 軸との角度の差。斜交 $xyz$ 系と $x'y'z'$ 系の $y$ 軸は横軸に重なる。  
 c: 斜交 $xyz$ 系の $z$ 軸方位と各座標系の $z$ 軸との角度の差。斜交 $xyz$ 系と $x''y''z''$ 系の $z$ 軸は横軸に重なる。

<sup>2</sup>最小2乗法では常に斜交 $xyz$ 系を用いる。



第5図 実用平均法と最小2乗法で得られた主歪Z軸のシュミットネット下半球投影図。  
●実用平均法によるZ軸 ○最小2乗法によるZ軸



第6図 実用平均法と最小2乗法で求めた主歪軸間の角度の差(度)。  
○: X軸について □: Y軸について ×: Z軸について

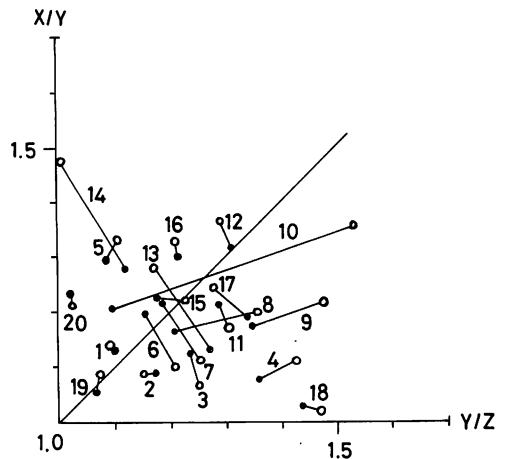
にしめす。14個のサンプルでは差は $10^\circ$ 以下で、6個のサンプルでは $10^\circ$ 以上で最大 $70^\circ$ 以上異なっているものがある。

### 主歪値の最小2乗法解との比較

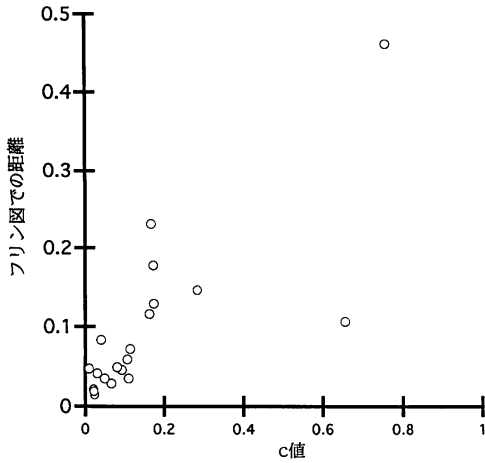
実用平均法と最小2乗法からえられた主歪値を第7図のフリント図にしめす。黒丸は実用平均法の、白丸は最小2乗法の値である。prolateとoblateの領域が変わるものは6個ある。歪楕円体のd値(フリント図の原点から歪点までの距離; Ramsay and Huber, 1983)は第7図から分かるように0.5以下で、歪の程度は弱い。変形構造が石英の波動消光のほか見られないことは、このことが原因であろう。

### 最小2乗法解との差とc値との相関

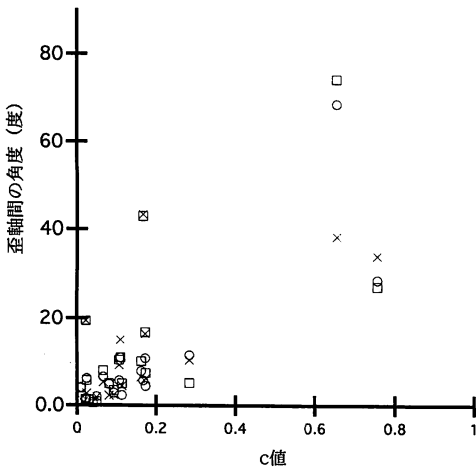
実用平均法と最小2乗法の主歪値のフリント図上での距離とc値には第8図に示すように正の相関があり、また実用平均法と最小2乗法の主歪軸の角度の差とc値にも第9図に示すように正の相関がある。すなわち、c値が小さい場合に実用平均法と最小2乗法の解は一致する傾向をしめす。しかしこの傾向からはずれる点も各図に数個あり、明瞭とはいえない。c値が0.1以下であれば、フリント図での両者の違いは0.05以下となり、各主軸間の差は $10^\circ$ 以下となる。



第7図 実用平均法と最小2乗法から求められた主歪値のフリント図。  
●実用平均法による主歪点 ○最小2乗法による主歪点



第8図 実用平均法と最小2乗法での主歪値のフリント図上での距離とc値との相関図。

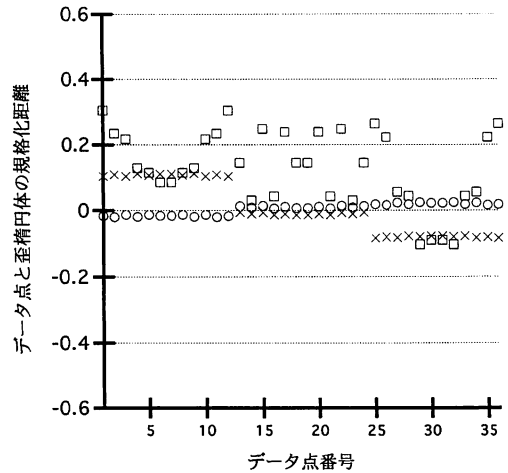


第9図 実用平均法と最小2乗法での主歪軸の角度の差とc値との相関図。

○：X軸について □：Y軸について ×：Z軸について

### 歪楕円体とデータ点との比較<sup>3</sup>

斜交A, B, C面での歪楕円の周囲を30°ずつ12等分した点をデータ点と呼ぶ。一つのサンプルでは3面をあわせて36点となる。林(1995)の方法を用いて、歪楕円体の中心から36個のデータ点までの距離 $Tl$ と、データ点と同方位の実用平均法によって得た歪楕円体上の点の距離 $EI$ を計算し、この差を $GI(=Tl-EI)$ とする。中心から歪楕円体上の点までの距離 $EI$ でこの差 $GI$ を除して無次元化した量を $Nl$ とし、これを「データ点と歪楕円体の規格化距離」と呼ぶ。第10図では縦軸にデータ点と歪楕円体の規格化距離をとり、横軸にデータ点番号をとる。この図に、実用平均法でえた楕円体表面上の点を縦軸ゼロの点での水平な点線でしめし、これを基準としてデータ点36個を○, □, ×の記号でし



第10図 データ点と実用平均法で計算された歪楕円体表面上の点の規格化距離。

○, □, ×の記号がデータ点。ゼロの点での水平な点線が実用平均法で計算された歪楕円体上の点。

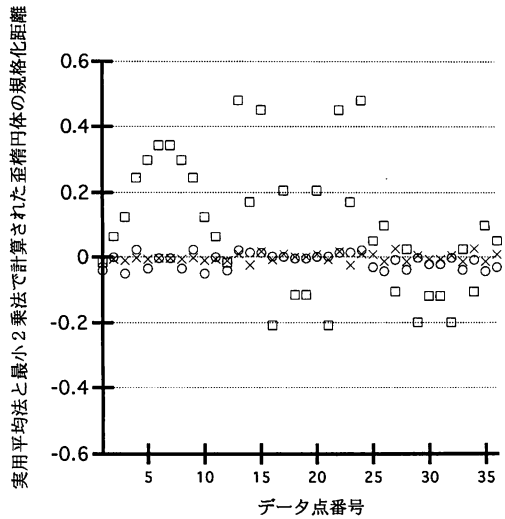
○：サンプル1のデータ点 □：サンプル10のデータ点 ×：サンプル16のデータ点

<sup>3</sup>歪楕円体での比較には①斜交A, B, C面上の12×3ケのデータ点を使う②直交A, B, C面上の12×3ケのデータ点を使う、という2つの場合がある。これらのc値は異なる。直交系の面を使うのが実用平均法の仮定なので、以下直交系の面を使う。いずれの値を使おうとも、両者の違いは小さい。

めす。○はサンプル1のデータ点で、実用平均法で計算された歪楕円体とデータ点とはほぼ一致している。□はサンプル10のデータ点で、データ点のほうが実用平均法で計算された歪楕円体上の点よりも遠く、またランダムに分布する。×はサンプル16のデータ点で、3つの面でのデータ点は3つの線上の分布を示し、計算された歪楕円体とは一致しない。

### 最小2乗法の歪楕円体との比較

林(1995)の方法を用いて、歪楕円体の中心から36個のデータ点と同方位の実用平均法で得た歪楕円体上の点の距離  $Ea$  と、最小2乗法で得た歪楕円体上の点の距離  $El$  を計算し、この差を  $Eal (=Ea - El)$  とする。  $Eal$  を  $El$  で除して無次元化した量を  $Nal$  とする。  $Nal$  は実用平均法で得た歪楕円体上の点と最小2乗法で得た歪楕円体上の点との距離を規格化した値である。第11図では縦軸に実用平均法と最小2乗法で計算された歪楕円体の規格化距離 ( $Nal$ ) をとり、横軸にデータ点番号をとった。この図に、最小2乗法で計算してえた歪楕円体の表面上の点を縦軸ゼロの点での水平な点線でしめし、これを基準として実用平均法で計算した歪楕円体の表面上の点を○、□、×の記号でしめした。○はサンプル1の点で、実用平均法で計算した歪楕円体は最小2乗法の歪楕円体と良い一致を示す。このサンプルは第10図の○で示されているように、データ点と計算された歪楕円体との形も良い一致を示している。□はサンプル10の点で、実用平均法と最小2乗法で求めた歪楕円体は著しく異なっている。サンプル10は第10図の□で分かるようにデータ点とも非常に異なっている。サンプル1と10の2つの例から、データ点と実用平均法で計算した歪楕円体とが一致するときに、実用平均法の歪楕円体と最小2乗法の歪楕円体とが一致するように見える。×はサンプル16の点で、実用平均法と最小2乗法で求めた歪楕円体は良く一致している。サンプル16のデータ点と実用平均法で求めた歪楕円体とはすでに述べたように一致していないが、3組の



第11図 データ点方位での実用平均法と最小2乗法で計算された歪楕円体の規格化距離。  
○、□、×の記号が実用平均法で求められた歪楕円体上の点。ゼロの点での水平な点線が最小2乗法で得られた歪楕円体上の点。  
○：サンプル1の点 □：サンプル10の点 ×：サンプル16の点

データ点を平均したものが歪楕円体となっていると考えれば、実用平均法と最小2乗法で求めた歪楕円体の一致は理解できる。

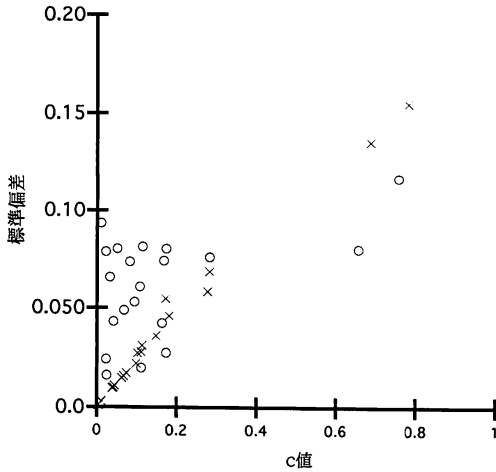
### 標準偏差とc値

第12図にc値を横軸にとり、データ点(36点)と実用平均法で得た歪楕円体上の点(36点)の規格化距離の標準偏差を○印で縦軸にとる。クラスターを作り相関なし。一方、最小2乗法で得た標準偏差を×印で示す。c値との間には相関があり、c値が小さくなればばらつきは小さくなる。

### 平均とc値

第13図にc値を横軸にとり、データ点(36点)と実用平均法で得た歪楕円体上の点(36点)の規格化距離の平均を○印で縦軸にとる。両者には

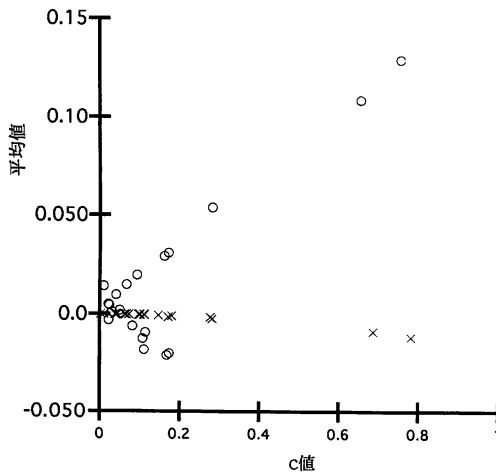
c 値との関係



第12図 データ点(36点)と歪楕円体上の点(36点)の規格化距離の標準偏差と c 値の関係。  
○：実用平均法で得られた標準偏差。  
×：最小 2 乗法で得られた標準偏差。

第12図の×から、c 値が小さくなると最小 2 乗法で計算した歪楕円体の回りのデータ点の標準偏差は小さくなる。したがって c 値が小さくなるときには最小 2 乗法の歪楕円体は真の歪楕円体に近づくことが期待される。このことは林 (1995)ですでに述べられている。いっぽう実用平均法で計算した歪楕円体の回りのデータ点のばらつきは第12図の○で示されるように、c 値が小さくなっても大きい。しかし第13図の○で示されるように、c 値が小さくなると平均の絶対値は小さくなる。これは平均値が振動しながら収束していることを示しており、実用平均法の歪楕円体も真の歪楕円体に近づくことが期待される。林 (1995)は標準偏差にのみ注目して、これが c 値の減少時に減少しないため、平均法の歪楕円体は真の歪楕円体に近づくとは思われない、としている。c 値の減少時に平均値が減ることのほうが本質的であるため、平均法の時も真の歪が得られることが期待される。ただし最小 2 乗法のとときに比べて、c 値の変動に敏感であり、c 値がゼロに近いときに限られる。

ま と め



第13図 データ点(36点)と歪楕円体上の点(36点)の規格化距離の平均と c 値の関係。  
○：実用平均法で得られた平均。  
×：最小 2 乗法で得られた平均。

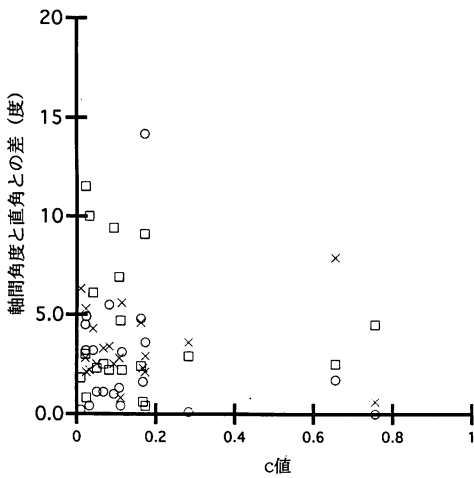
嘉陽層の歪測定用岩石サンプルから直角に近く切り出された 3 面で歪楕円を求め、これを新たに作られた直交 3 面上の歪楕円とみなす。これらの歪楕円を直交平均法で合成した歪楕円体は c 値がゼロに近い場合には真の歪楕円体に近いことが期待される。c 値がゼロに近い場合の直交平均法で合成された歪楕円体とデータ点との差の標準偏差は最小 2 乗法を用いた場合の標準偏差と比べて大きいですが、平均の絶対値はゼロに近いからである。

相関がある。c 値が小さくなると平均の絶対値は小さくなる。最小 2 乗法で得た平均を×印で示す。c 値が小さくなるとゼロに近くなり、歪楕円体と一致してくる。

許される角度のずれの算出はより厳密な検査を必要とするが、ここで用いたデータ(嘉陽層の砂岩)からいえることに限定して述べる。歪測定用岩石サンプルから直角に近く切り出された 3 面の間の角の直角からの違い、すなわち斜交 xyz 系の直交からのずれと c 値との関係を第



14図に示す。この図から相関は認められず、2つの例外を除くと、データは $10^\circ$ 以下のクラスターを作っている。また、実用平均法による主歪値と最小2乗法による主歪値とのフリン図上での違いは $c$ 値が0.1以下であれば、 $0.05$ 以下、各軸間の差は $10^\circ$ 以下となっていた(第8, 9図)。したがって、ここで用いたデータからすると、3面の間の角の直角からの違いが $10^\circ$ 以下であり、かつ $c$ 値が0.1以下のとき、直交平均法は実用になりうると思われる。



第14図 斜交 $xyz$ 系の直交からのずれと $c$ 値との関係。  
 ○： $x$ 軸と $y$ 軸の軸間角度の直角からの差。  
 □： $y$ 軸と $z$ 軸の軸間角度の直角からの差。  
 ×： $z$ 軸と $x$ 軸の軸間角度の直角からの差。

## 文 献

- 林大五郎, 1988, 3次元有限歪解析 — 沖縄島国頭層群嘉陽層について —. 地質雑, **94**, 757-768.
- 林大五郎, 1989, 「3次元有限歪解析 — 沖縄島国頭層群嘉陽層について — 林, 1988」における誤りとその訂正. 地質雑, **95**, 553-558.
- Hayashi, D. and Baba, S., 1993, Strain analysis of Kayo Formation around Teniya-zaki, Okinawa-jima. *Bull. Coll. Sci. Univ. Ryukyus*, no. 56, 165-190.
- 林大五郎, 1994, 非平行断面上の歪楕円を用いた3次元歪解析法. 地質雑, **100**, 150-161.
- 林大五郎, 1995, 地質構造解析における歪楕円体の適合度 $c$ 値の提唱. 情報地質, **6**, 13-29.
- Ramsay, J. G., 1967, *Folding and fracturing of rocks*. McGraw-Hill, 568p.
- Ramsay, J. G. and Huber, M. I., 1983, *The techniques of modern structural geology volume 1: Strain analysis*. Academic Press, 307p.
- Roberts, B. and Siddans, A. W. B., 1971, Fabric studies in the Llwyd Mawr Ignimbrite, Caernarvonshire, North Wales. *Tectonophysics*, **12**, 283-306.
- Shimamoto, T. and Ikeda, Y., 1976, A simple algebraic method for strain estimation from deformed ellipsoidal objects. 1. Basic theory. *Tectonophysics*, **36**, 315-337.