小国開放経済の内生的成長モデル（バロー・モデル）における、財政収支、経常収支、そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化

「小国開放経済の内生的成長モデル（バロー・モデル）における、財政収支、経常収支、そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」

徳　島　　　武

1．はじめに

近年発展してきた国際マクロ経済学の動学的最適化モデルにおける財政収支均衡の仮定に疑問を呈し、社会的に最適な財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析を通じて、その仮定の最適性を吟味する分析が徳島（1996）によってなされた。その論文においてその仮定の最適条件による裏付けが示されたが、そこで用いられているモデルは新古典派成長モデルであった。最近の新しい成長モデル、すなわち内生的成長モデルの発展を考慮すると、同様の趣旨の分析がそのモデルにおいてもなされるべきであろう。そこで本論文では、内生的成長モデルの中でも政府支出の効果を分析したバロー（Barro (1990), Barro and Sala-i-Martin (1990)）のモデルを用いて、社会的に最適な財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析を行い、財政収支均衡の仮定を吟味する。

我々はBlanchard and Fischer (1989) で用いられているモデルに政府部門を導入し、生産関数をバロー・モデルのそれとして、分析を行う。第2節ではモデルについて説明し、第3節では投資の調整費用が存在しないケースを分析し、第4節ではそれが存在するケースを分析し、第5節では結論をまとめることにする。

2．モデル

中央計画当局が第0期における代表的家計の厚生を、制約条件の下で最大

化することを仮定する。代表的家計の瞬時的効用関数を

$$u_t = u(c_t, g_t) \tag{2. 1}$$

とする。c_tは消費であり、g_tは政府支出である[1)]。右下の添字 t は時間を示している。この効用関数は非負であり、強い凹関数であって、

$$0 < u_1, u_2 \qquad u_{11}, u_{22} < 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} > 0, \quad u_{12} = u_{21}$$

を仮定する[2)]。無限期間モデルを仮定すると代表的家計の厚生は、それの消費と政府支出の効用の総現在価値となり、

$$\int_o^{\infty} u(c_t, g_t)e^{-\theta t}dt \tag{2. 2}$$

となる。θは時間選好率あるいは主観的割引率であり、所与の正の値をとると仮定する。制約条件は、対外債務ストック、資本ストック、そして政府債務（＝国債）ストックの各々とフロー変数の関係を示す式であり、

$$\dot{F}_t = c_t + i_t + g_t + \theta F_t - Ak_t^{1-\alpha}g_t^{\alpha} \tag{2. 3}$$

$$\dot{k}_t = i_t \tag{2. 4}$$

$$\dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_t \tag{2. 5}$$

である。F_tは対外債務ストック、k_tは資本ストック、B_tは政府債務ストックであり、対外取引は対外債務ですべて決済され、政府債務はすべて国内で取引される。i_tは純投資であり、τ_tは一括税であって所与と仮定する。

$Ak_t^{1-\alpha}g_t^{\alpha}$ は生産関数であり、国民所得に相当し、Aはその国の技術レベルを示すパラメターであって所与であり、αは0より大きく1より小さい所与の値をとる。小国の仮定より自国利子率と外国利子率は所与で等しく、またθと等しいと仮定する。

我々の解くべき動学的最適化の問題は、以下のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^{\infty} u(c_t, g_t)e^{-\theta t}dt \\
&s.t. \quad \dot{F}_t = c_t + i_t + g_t + \theta F_t - Ak_t^{1-\alpha}g_t^{\alpha} \\
&\qquad \dot{k}_t = i_t \\
&\qquad \dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_t \\
&\qquad F_o,\ k_o,\ B_o \text{ given},\ \tau_t = \tau_o = \text{const.} \\
&\qquad c_t, i_t, g_t, F_t, k_t, \tau_t \geqq 0 \quad \text{for all t}
\end{aligned}
$$

制御変数は c_t、i_t、g_t であり、状態変数は F_t、k_t、B_tである。各々の変数は一人当りのものであるが、人口成長はないものと仮定し、現時点（0時点）での人口を1とする。また以下の分析では特に必要を認めない限り、右下の添字 t は省略する。

3．投資の調整費用が存在しないケース

このケースにおけるハミルトニアンは、$-\lambda$、β、γを共役変数とすると

$$
\begin{aligned}
H = & u(c, g) - \lambda(c + i + g + \theta F - Ak^{1-\alpha}g^{\alpha}) \\
& + \beta i + \gamma(g + \theta B - \tau)
\end{aligned}
$$

である。最適のための条件は

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad \therefore u_1 = \lambda \qquad (3.\ 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \qquad \therefore \lambda = \beta \qquad (3.\ 2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial g}=0 \qquad \therefore u_2=\lambda\left\{1-\alpha A\left(\frac{k}{g}\right)^{1-\alpha}\right\}-\gamma \tag{3.3}$$

$$\dot{\lambda}=\lambda\theta+\frac{\partial H}{\partial F}=0 \qquad \therefore \lambda=\text{const.} \tag{3.4}$$

$$\dot{\beta}=\beta\theta-\frac{\partial H}{\partial k}=\beta\left\{\theta-(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}\right\} \tag{3.5}$$

$$\dot{\gamma}=\gamma\theta-\frac{\partial H}{\partial B}=0 \qquad \therefore \gamma=\text{const.} \tag{3.6}$$

$$\lim_{t\to\infty}(-\lambda F)e^{-\theta t}=0 \tag{3.7}$$

$$\lim_{t\to\infty}\beta k e^{-\theta t}=0 \tag{3.8}$$

$$\lim_{t\to\infty}\gamma B e^{-\theta t}=0 \tag{3.9}$$

となる。λ が一定の値となるので c は一定の値となり、また λ と β が等しいことより

$$\dot{\beta}=\beta\left\{\theta-(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}\right\}=0$$

となり

$$\theta=(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}$$

となるので、$\frac{g}{k}$ は一定の値となり、γ も一定の値となるので、（3．3）式より g も一定の値となる。すると k の値も一定となり、i はゼロとなる。以上の結果をまとめると

$$c, g, \lambda, \beta, \gamma, k=\text{const.} \qquad i=0$$

となる。これより財政収支と経常収支及び貿易収支の動学分析が可能となる。
財政収支を BB_t、経常収支を CA_t、貿易収支を TB_tとすると

$$BB_t = \dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_o$$
$$CA_t = -\dot{F}_t = Ak_t^{1-\alpha} g_t^{\alpha} - c_t - i_t - g_t - \theta F_t$$
$$TB_t = Ak_t^{1-\alpha} g_t^{\alpha} - c_t - i_t - g_t$$

となる。財政収支の式より

$$\dot{B}_t = g_t + \theta B_t - \tau_o$$

として両辺を積分すると

$$B_o = \int_o^{\infty} (\tau_o - g_t) e^{-\theta t} dt \qquad (3.\ 10)$$

が求められる。g_tが一定であるので、$g_t < \tau_o$ のとき累積財政黒字が無限大となり、$\tau_o < g_t$ のとき累積財政赤字が無限大となる。よって（３．10）式と横断面の条件より、

$$\tau_o = g_t = g_o = \text{const.}\ ,\quad B_o = 0$$

となり、今期（０期）以前から一貫して財政収支が均衡している状態が社会的に最適となる。次に経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。経常収支の式より

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

として両辺を積分すると

$$F_o = \int_o^\infty TB_t e^{-\theta t} dt \qquad (3.\ 11)$$

が求められる。k_t、g_t、c_t が一定で i_t がゼロであるので、$0 < TB_t$ のとき累積貿易黒字が無限大となり、$TB_t < 0$ のとき累積貿易赤字が無限大となる。よって（３．11）式と横断面の条件より、

$$TB_t = TB_o = 0\ , \quad F_o = 0$$

となり、今期（０期）以前から一貫して経常収支も貿易収支も均衡している状態が、社会的に最適となる。

４．投資の調整費用が存在するケース

このケースにおけるハミルトニアンは、$-\lambda$、λq、γ を共役変数とすると

$$H = u(c, g) - \lambda\left\{c + i[1+\phi] + g + \theta F - Ak^{1-\alpha}g^{\alpha}\right\} + \lambda q i + \gamma(g + \theta B - \tau)$$

である。ϕは投資の調整費用であり

$$\phi = \phi\left(\frac{i}{k}\right),\ \phi(0) = 0,\ 0 < \phi', \phi''$$

である。最適のための条件は

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad \therefore u_1 = \lambda \qquad (4.\ 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \qquad \therefore q = 1 + \phi + \left(\frac{i}{k}\right)\phi' \qquad (4.\ 2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \qquad \therefore u_2 = \lambda\left\{1-\alpha A\left(\frac{k}{g}\right)^{1-\alpha}\right\}-\gamma \qquad (4.\ 3)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda\theta + \frac{\partial H}{\partial F} = 0 \qquad \therefore \lambda = \text{const.} \qquad (4.\ 4)$$

$$(\dot{\lambda q}) = \lambda q\theta - \frac{\partial H}{\partial k} \qquad (4.\ 5)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma\theta - \frac{\partial H}{\partial B} = 0 \qquad \therefore \gamma = \text{const.} \qquad (4.\ 6)$$

$$\lim_{t\to\infty}(-\lambda F)e^{-\theta t} = 0 \qquad (4.\ 7)$$

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda qk)e^{-\theta t} = 0 \qquad (4.\ 8)$$

$$\lim_{t\to\infty}\gamma Be^{-\theta t} = 0 \qquad (4.\ 9)$$

である。λが一定の値となるため、cは一定の値となる。またλが一定であるので

$$(\dot{\lambda q}) = \lambda\dot{q} = \lambda\left\{q\theta-(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}-\left(\frac{i}{k}\right)^{2}\phi'\right\}$$

となり

$$\dot{q} = q\theta-(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}-\left(\frac{i}{k}\right)^{2}\phi' \qquad (4.\ 10)$$

が求められる。以上より

$c, \lambda, \gamma = \text{const.}$

の結果が得られる。これより財政収支の動学分析が可能となる。前節同様財政収支を定義して、（３．10）式の

$$B_o = \int_o^{\infty} (\tau_o - g_t) e^{-\theta t} dt$$

が求められる。政府支出の限界効用が一定になるかどうかわからないので、前節同様に g_t の値を決めることはできない。しかし（３．10）式と横断面の条件より g_t が一定の値をとり、

$$\tau_o = g_t = g_o = \text{const.} \quad , \quad B_o = 0$$

となり、今期（０期）以前から一貫して全期間において財政収支が均衡している状態が、社会的に最適であることは明らかである。政府支出の限界効用曲線は図４－１に示すように、k の増加により下方シフトし、k の減少により上方シフトして、均衡政府支出 $g^*(=g_o)$ に対する限界効用はその動きに応じて変化する。

次に経常収支及び貿易収支の動学分析を行う。そのためには i、k、q の関係を分析しなければならない[3)]。（４．２）式より

$$q = \Psi\left(\frac{i}{k}\right), \quad \Psi(0) = 1, \quad 0 < \Psi'^{4)} \qquad (4.11)$$

の関数を定義する。この逆関数を $i/k = \varphi(q)$ と定義すると

$$\dot{k} = i = k\varphi(q), \qquad \varphi(1) = 0, \quad 0 < \varphi' \qquad (4.12)$$

となる。またこの式を（４．10）式へ代入して

$$\dot{q} = q\theta - (1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha} - \varphi(q)^2\phi' \qquad (4.10')$$

を得る。i、k、qの関係は（４．12）式と（４．10'）式の連立微分方程式の位相図を描くことにより明らかになる。定常状態（$dk/dt=dq/dt=0$）においては

$$q^*=1\,,\quad \theta=(1-\alpha)A\left(\frac{g^*}{k^*}\right)^{\alpha}$$

となる。g^*が一定なので、kの均衡値であるk^*の値は一意に決まる。この均衡点の近傍の状態を分析する。

$$\dot{k}=k\varphi(q)=F(k,q)=0$$
$$\dot{q}=q\theta-(1-\alpha)A\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}=G(k,q)=0$$

とおくと

$$\left.\frac{dq}{dk}\right|_{\dot{q}=0}=-\frac{F_k}{F_q}=-\frac{\varphi(q)}{k\varphi'(q)}=-\frac{\varphi(1)}{k^*\varphi'(1)}=0$$

$$\left.\frac{dq}{dk}\right|_{\dot{k}=0}=-\frac{G_k}{G_q}=-\frac{1}{\theta}\left\{(1-\alpha)A\alpha g^{*\alpha}k^{*-(\alpha+1)}\right\}<0$$

となるので、図４－２のように位相図が描かれ、均衡点が鞍点になることがわかる。右下の添字はその変数による偏導関数であることを示している。また代数的にも線形近似の式が

$$\begin{bmatrix}\dot{k}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k^*\varphi'(1)\\ (1-\alpha)A\alpha g^{*\alpha}k^{*-(\alpha+1)} & \theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k-k^*\\ q-1\end{bmatrix}$$

となり、係数行列式を$\varDelta$とおくと

$$\Delta = -\varphi'(1)\ (1-\alpha)A\alpha\left(\frac{g^*}{k^*}\right)^{\alpha} < 0$$

となることから鞍点が証明される。最適条件より k、q は安定経路上を移動し、k の値が均衡値より小さい場合には、k が増加して q が減少して i が正、大きい場合には k が減少して q が増加して i が負となる。経常収支と貿易収支は

$$CA_t = -\dot{F}_t = Ak_t^{1-\alpha}g_t^{\alpha} - c_t - i_t[1+\phi] - g_t - \theta F_t$$

$$TB_t = Ak_t^{1-\alpha}g_t^{\alpha} - c_t - i_t[1+\phi] - g_t$$

と定義され、前節同様

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

とおくと、（3．11）式の

$$F_o = \int_o^{\infty} TB_t e^{-\theta t}dt$$

が求められる。この式は対外債務の初期値によって、貿易収支の動学が制約されることを意味している。i が正のケースに限定すると、貿易収支の動学は図4－3のようになる。$Ak^{1-\alpha}g^{\alpha} - i[1+\phi]$ の値は、時間の経過とともに k の値が増加してゆくと、$Ak^{1-\alpha}g^{\alpha}$ の値が大きくなり、ϕ の値が小さくなるので増加し[5]、$c+g$ の値は一定なので、社会的に最適な貿易収支は最初は赤字その後黒字となる。（3．11）式より、累積貿易黒字の大きさは対外債務の初期値により制約される。我々のモデルでは経常収支の動学は分析できない。

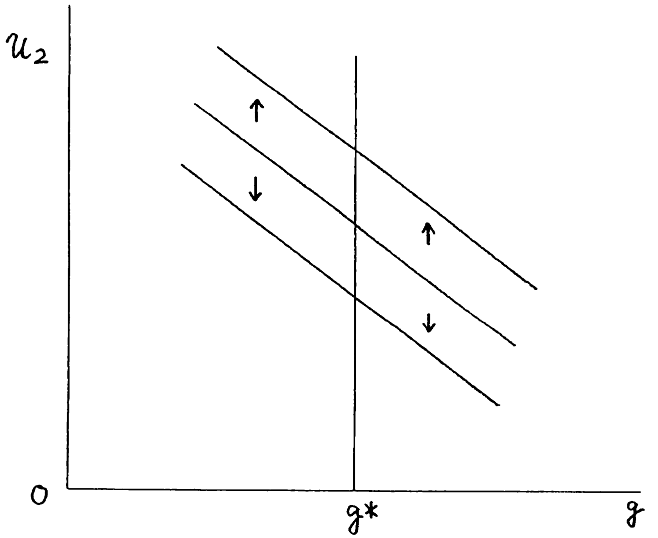

図 4 － 1

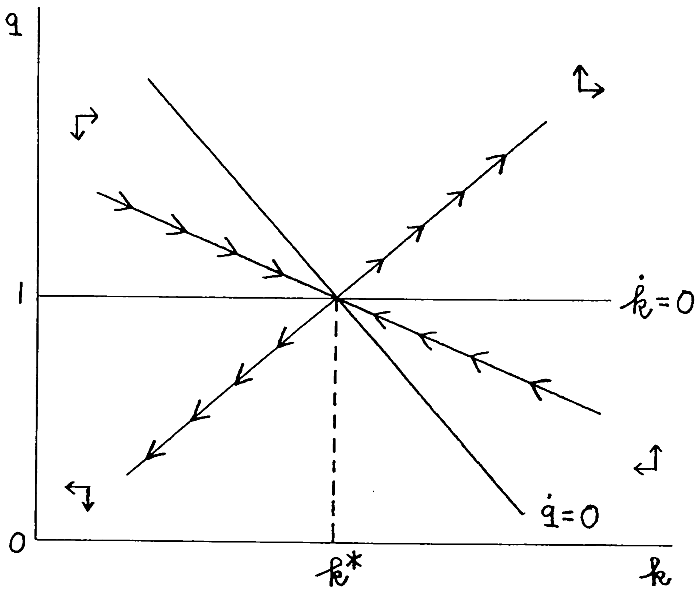

図 4 － 2

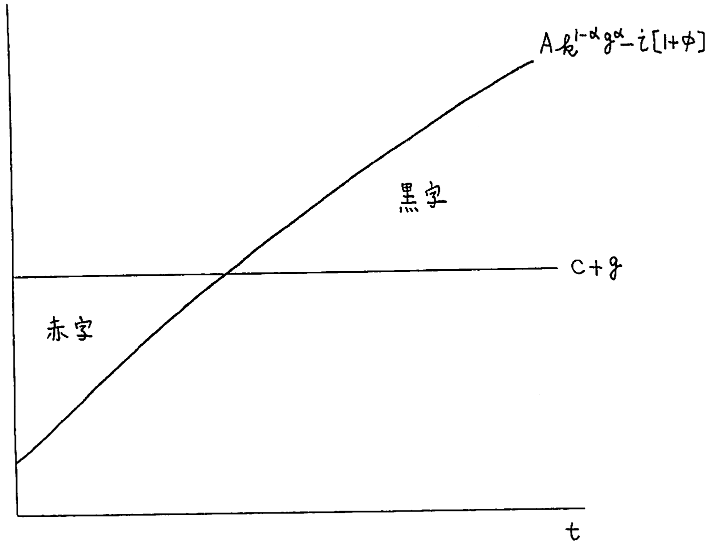

図４－３

5．おわりに

我々のモデルにおける分析結果は以下のようにまとめられる。

（Ⅰ）投資の調整費用が存在しないケース

i）財政収支均衡

ii）経常収支及び貿易収支均衡

（Ⅱ）投資の調整費用が存在するケース

i）財政収支均衡

ii）貿易収支は赤字から黒字へ（純投資正）

内生的成長モデルのバロー・モデルにおいても、新古典派成長モデルのケースと全く同様の結論が得られた。内生的成長モデルにおいても、財政収支均衡の仮定が最適条件に裏付けられていることが証明されたのである。

本論文の目的とは別に、その国の技術レベルを示すパラメターAに関する興味深い結論にも言及しておこう。それは

①収支の動学とAの大小は関係ない。

②Aが大きいほど政府支出の限界効用は小さくなる。

である。①はその国が先進国（Aが大きい国）か発展途上国（Aが小さい国）かということと、その国にとって望ましい経常収支及び貿易収支の動学は何かということとは、関連がないことを示している。②は先進国になるほど政府支出の社会に対する貢献度が低下することを示している。このことは先進国になればなるほど、小さな政府であることが望ましいことを意味している。

注

1）我々のモデルは合成財のモデルであり、民間部門と政府部門の供給する財は同質である。政府部門の供給する財は公的に供給される民間財であり、競合性と排除性を持つ。

2）$u_1 = \partial u/\partial c_t$, $u_2 = \partial u/\partial g_t$, $u_{12} = \partial^2 u/\partial c_t \partial g_t$, $u_{21} = \partial^2 u/\partial g_t \partial c_t$
$u_{11} = \partial^2 u/\partial c_t^2$, $u_{22} = \partial^2 u/\partial g_t^2$ である。

3）以下の分析方法はBlanchard and Fischer（1989）chap. 2を参照。

4）$\Psi' = \phi' + \phi' + (i/k)\phi'' = 2\phi' + (i/k)\phi''$ となり、$0 < \phi', \phi''$ であるので正となる。

5）$\partial\phi/\partial k = \phi'\partial(i/k)/\partial k = -\phi'(i/k^2) < 0$ である。

<参考文献>

足立英之（1994）『マクロ動学の理論』有斐閣

岩井克人・伊藤元重編（1994）『現代の経済理論』東京大学出版会

小野善康（1992）『貨幣経済の動学理論』東京大学出版会

河合正弘（1994）『国際金融論』東京大学出版会

須田美矢子編（1992）『対外不均衡の経済学』日本経済新聞社

大東一郎（1996）『内生的経済成長の基礎理論』三菱経済研究所

竹中平蔵・小川一夫（1987）『対外不均衡のマクロ分析』東洋経済新報社

津曲正俊（1993）『経済成長理論の新展開』三菱経済研究所

德島　武（1996）「小国開放経済の新古典派成長モデルにおける財政収支、経常収支そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」『琉球大学　経済研究』第52号、313－328

西村清彦（1990）『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会

村田安雄（1990）「経常収支変動の異時点分析－無限期間モデル－」『関西大学　経済論集』第40巻第1号、51－76

————(1994)『現代マクロ経済学（新版）』有斐閣

山口利夫（1994）『最適成長理論とカオス動学の基礎』三菱経済研究所

Barro,R.J.(1974) "Are government bonds net wealth?", *Journal of Political Economy* 82 (6),1095-1117

————(1990) "Government spending in a simple model of endogenous growth",*Journal of Political Economy* 98, S103-125

———and X.,Sala-i-Martin(1990) "Public finance in models of economic growth", *NBER Working Paper* No.3362

———and ——————(1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill

Bazdarich, M.J.(1978) "Optimal growth and stages in the balance of payments", *Journal of International Economics* 4,425-443

Blanchard, O.J, and S.Fischer(1989) *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press

Devereux, M.B. and S.Shi(1991) "Capital accumulation and the current account in a two-country model", *Journal of International Economics* 30,1-25

Frenkel, J.A.and A.Razin(1992) *Fiscal Policies and the World Economy 2nd.ed.*, MIT Press

Hayashi, F.(1982) " Tobin's marginal q and average q : a neoclassical interpretation", *Econometrica* 50(1), 213-224

Kamien,M.I.and N.L.Schwarts(1991) *Dynamic Optimization 2nd. ed.*, North-Holland

Karayalcin,C.(1994) "Adjustment costs in investment, time preferences, and the current acdount", *Journal of International Economics* 37, 81-95

Lucas,R.E.,Jr.(1988) " On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics* 22, July,3-42

Matsuyama,K.(1987) " Current account dynamics in a finite horizon model", *Journal of International Economics* 23,299-313

Petit,M.L.(1990) *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*, Cambridge University Press

Pitchford,J.(1995) *The Current Account and Foreign Debt*, Routledge

Romer,P.(1986) " Increasing returns and long-run growth", *Journal of*

Political Economy 94(5), 1002 -1037

Sala-i-Martin,X.(1990) " Lecture notes on economic growth(II):five prototype models of endogenous growth", *NBER Working Paper* No.3564

Serven,L.(1995) " Capital goods imports,the real exchange rate and the current account", *Journal of International Economics* 39,79-101

van der Ploeg,F.(ed.)(1994) *The Handbook of International Macroeconomics*, Basil Blackwell