

琉球大学学術リポジトリ

農業機械設計の観点における土の塑性構成式に関する一考察(農業工学科)

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学農学部 公開日: 2008-02-14 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 上野, 正実, 泉, 裕巳, 國府田, 佳弘, 秋永, 孝義, Ueno, Masami, Izumi, Hiromi, Kohda, Yoshihiro, Akinaga, Takayoshi メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/4060

農業機械設計の観点における土の塑性構成式 に関する一考察

上野正実*・泉裕巳*・國府田佳弘*・秋永孝義*

Masami UENO, Hiromi IZUMI, Yoshihiro KOHDA, Takayoshi AKINAGA:
A consideration of the plastic constitutive equation for soils from the point
of view of agricultural machinery design

柔函

I 緒 言

農業機械の設計においては機械の作用と土の変形抵抗の関係を究明することが基本的な問題の1つであることは周知の通りである。

土の変形はほとんどが塑性変形であり、本問題では境界条件が極めて複雑なために理論解析は困難とされていたが、塑性理論の進展と有限要素法などコンピュータに直結した解析手法の開発によって、本問題を数値解析する突破口が開けつつある。

その例として平面ひずみ問題に対して、主応力表示の塑性構成式を用いた有限要素法の活用例を示しておいた⁵⁾。しかるに、農業機械と土に関連する力学的境界値問題の多くは2次元問題とはみなしえないので、このプログラムで解析しうる問題は限定されている。3次元弾塑性変形解析を実行しうる有限要素プログラムの開発が望まれているが、基礎となる土の弾塑性構成関係は十分に整備されていないので、本研究では特に塑性構成式に関する考察を行ってみた。

土の構成関係は土質工学の分野で活発に研究され、近年では塑性構成式の研究が重点的に行われており、ひずみ硬化やひずみ軟化現象の表現、あるいは限界間ゲキ状態(critical void state, 以下csと略記する)の解釈などに関する有意義な成果があげられている¹⁾³⁾。また、弾性状態から塑性状態への滑らかな移行過程すなわち弾塑性過渡状態の表現も可能になった²⁾。さらに塑性変形の進展に伴う異方性の発達あるいはバウシング効果などを表現しうる構成関係の研究が開始されている。新しい動向としてはTruesdellの提案した亜弾性体の概念に基づく構成関係の研究が注目を引くところである⁴⁾。

土の塑性論では関連流れ則をめぐる議論のように基本仮定の採否に関する見解の不統一も若干見られる¹⁾が、硬・軟化、異方性、バウシング効果などは降伏面の形状およびその変化の様式によって説明しうると思われる。しかしながら、6個の独立な応力とひずみの関係を与えうる具体的な降伏面などは未だに適切なものは得られていない。また、有限要素法などの数値解析の隆盛にも係わらず、使用する構成式の適用性に関する系統的な研究は見当らない。塑性論は今後とも土の変形現象を解析する有効な手段であるので、このような不備な点を整備・拡充してゆく必要があると思われる。

本文では一般の塑性構成関係を展開するために、中間主応力の効果を考慮に入れ、不変量で表示した土の降伏面を提案する。これに基づいて塑性体積ひずみを硬化測度とし、また弾塑性過渡状態を考慮し

* 琉球大学農学部農業工学科

た等方硬化体とみなした土の弾塑性構成関係を具体的に展開した。

II 土の降伏面に関する従来の研究

数理塑性論は塑性変形に関するいくつかの基本仮定に基づいて展開されている。中でも材料の塑性変形開始の応力状態を規定する降伏面の存在および塑性ひずみ増分の方向を与える垂直条件式 (normality condition) が重要である。前者は σ_{ij} を応力, ϵ_{ij}^P を塑性ひずみとして次式で与えられる。

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P) = 0 \quad (1)$$

さらに、後者は

$$d\epsilon_{ij}^P = \Lambda \partial \phi / \partial \sigma_{ij} \quad (2)$$

と表わされる。ここに ϕ は塑性ポテンシャルを意味し、 Λ は正值のスカラー係数である。垂直条件式と密接な関係のある関連流れ則、すなわさ降伏面と塑性ポテンシャル面の一致

$$f = \phi \quad (3)$$

も重要な仮定として用いられている。

ところで、応力空間において降伏面はいたるところ凸面であることが垂直条件式と塑性仕事の増分値が正となる条件より帰結される¹⁾

土の降伏面の研究では、まず、応力空間におけるその形状が問題となる。応力空間は6次元空間であるが、不変量や主応力を用いて降伏面を3次元的に表示することが可能である。これは次例のように種々の形式的表現が考えられる¹⁾

$$f(I_1, I_2, I_3, g(\epsilon_{ij}^P)) = 0 \quad (4.a)$$

$$f(P, J_2, J_3, g(\epsilon_{ij}^P)) = 0 \quad (4.b)$$

$$f(P, r, \sin 3\theta, g(\epsilon_{ij}^P)) = 0 \quad (4.c)$$

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, g(\epsilon_{ij}^P)) = 0 \quad (4.d)$$

ここに I_1, I_2, I_3 は応力の1次、2次および3次不変量で固有行列式

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (5)$$

の根と係数の関係より次式で与えられる。

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (6.a)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} \quad (6.b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (6.c)$$

また、 P は平均応力で

$$P = I_1 / 3 \quad (7)$$

J_2 および J_3 はそれぞれ偏差応力 S_{ij} ($= \sigma_{ij} - P\delta_{ij}$, δ_{ij} : クロネッカのデルタ) の2次および3次の不変量

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (8.a)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (8.b)$$

で、 r および $\sin 3\theta$ は

$$r = (2J_2)^{\frac{1}{2}} \quad (9.a)$$

$$\sin 3\theta = -\sqrt{6} (t/r)^3 \quad (9.b)$$

$$t = (3J_3)^{\frac{1}{3}} \quad (9.c)$$

で与えられる。さらに、 σ_I , σ_{II} および σ_{III} はそれぞれ最大、中間および最小主応力 ($\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) を表わす。関数 g は硬化様式を与える塑性ひずみの関数である。降伏面は式(4)の型式の他に応力の項と塑性ひずみの項に分離した型式の表現を使用することもある。

$$f = \bar{f}(\sigma_{ij}) - F(\epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (10)$$

ここは \bar{f} は応力関数、 F は硬化関数と称する。

実際問題ではこれらの形式的な関数を具体的な関数形に発展させることが重要である。例えば金属材料の降伏面としては次のMises則およびTresca則が使用されている。

$$\text{Miese: } r - F(\epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (11)$$

$$\text{Tresca: } \sigma_I - \sigma_{III} - F(\epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (12)$$

これらは応力空間内で円柱ならびに正六角柱の形状を呈し、金属の塑性変形は平均応力には全く依存しないことを表わしている。一方、土の降伏面は平均応力や3次不変量などにも依存することが知られており、その数学的表現はかなり複雑になると思われる。以下に土の降伏面を表現する関数としてこれまでに提案されたものをいくつかあげてみる。

① Coulomb・Mohr:

$$a. \quad f = \frac{1}{\sin\phi} \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \sin\phi \right) - C \cdot \cot\phi \quad (13.a)$$

$$b. \quad f = (3\sqrt{3}r^3 \cos^2\phi \cos 3\theta)^2 - \sin^2\phi \{ 4\sin^2\phi (\sqrt{6}T)^3 - 3(3 + \sin^2\phi)\sqrt{6}T + (9 - \sin^2\phi)\sin 3\theta \}^2 \quad (13.b)$$

$$c. \quad f = r - \sqrt{6}T / (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\phi \sin 3\theta) \quad (13.c)$$

② Burland¹⁾: $\bar{f} = -P \{ 1 + (\eta/M)^2 \}$ (14)

③ Roscoe¹⁾: $\bar{f} = -P \exp(\eta/M)$ (15)

④ Rowe¹⁾ (stress-dilatancy 式より誘導):

$$\bar{f} = -\sigma_{III} R^{k-1} \quad (16)$$

⑤ 橋口¹⁾:

$$a. \quad \bar{f} = (K^2 - 1)\sigma_I \sigma_{III} / (\sigma_{III} - K^2\sigma_I) \quad (17)$$

$$b. \quad \bar{f} = -P \left\{ 1 + \frac{2 \left\{ (n-1) \frac{M}{r_c} - n \right\}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M} \right)^{1.5} + \frac{3 - \frac{M}{r_c}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M} \right)^n \right\} \quad (18)$$

$$c. \quad f = r - \frac{2\sqrt{6}T \sin\phi}{(\Omega - \pi \sin 3\theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

⑥ 松岡¹⁾ (空間モービライズド面より誘導):

$$f = 48 \tan^2\phi P^3 - 6(3 + 4 \tan^2\phi) P r^2 - \sqrt{\frac{2}{3}} (9 + 8 \tan^2\phi) \sin 3\theta r^3 \quad (20)$$

⑦ 佐武¹⁾: $f = r - \frac{2\sqrt{6}T \sin\phi}{3 - \sin\phi \sin 3\theta}$ (21)

$$\textcircled{8} \text{ Geniev } 1) : f = r - \frac{2\sqrt{6} T \sin \phi (3 + \sin \phi \sin 3\theta)}{9 - \sin^2 \phi} \quad (22)$$

ここに

$$\eta = -r/P \quad (23)$$

$$R = \sigma_{\parallel} / \sigma_{\perp} \quad (24)$$

$$T = C \cot \phi - P = P_a - P \quad (25)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \{ (3 + \sin \phi)^4 + (3 - \sin \phi)^4 \} \quad (26)$$

$$\pi = \frac{1}{2} \{ (3 + \sin \phi)^4 - (3 - \sin \phi)^4 \} \quad (27)$$

また ϕ , C , M , K , n および r_c は材料定数である。

III 具体的な降伏面の一般表示

2節で述べた土の具体的な降伏面の関数形は中間主応力あるいは3次不変量を入れてなかったり、平均応力軸方向における曲面形状が実測値とかけはなれているものが多い。特に、 (P, r) 面、 $(\sigma_{\perp}, \sigma_{\parallel})$ 面あるいは (r, θ) 面における2次元的な表現に止っているものが多い。

土の降伏面として具備すべき条件は従来の研究成果より以下のようにまとめることができよう。

①平均応力一定面すなわち (r, θ) 面においては六角形を示すCoulomb・Mohr面の頂点を通りその中間が凸状に滑らかにカーブした形状となる。

② θ 一定面すなわち (P, r) 面では P 軸と2点で交わり外側に滑らかに膨んだ形状を呈する。過圧密状態ではCoulomb・Mohr面を示す六角錐面よりわずかに膨み、正規圧密状態では円形もしくは楕円形に近い形状となる。また降伏面上には $\partial f / \partial P = 0$ となる領域つまり c_s が存在する。なお P 軸との交点を P_a および P_y とすると

$$P_a \geq 0 \quad (28)$$

$$P_y < 0 \quad (\text{降伏圧力}) \quad (29)$$

となる。

③凸面条件を満足する。

以上の他に望ましい降伏面の条件として、なんらかの物理的な解釈が可能であり、できる限り単純な関数であることなどがあげられる。ただし①～③の条件を同時に満足する関数はある程度の複雑さは免れないと思われる。

著者らは以上の条件を考慮に入れて、円筒座標系 (P, r, θ) で表示した次の分離型式の降伏面を提案する。

$$(A) f = \bar{f}(P, \eta, \sin 3\theta) - F(\epsilon_{ij}; P) = 0 \quad (30. a)$$

$$\bar{f} = -Pq(\eta, \sin 3\theta) \quad (30. b)$$

$$q = 1 + \frac{2 \left\{ (n-1) \frac{\bar{M}}{r_c} - n \right\}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{1.5} + \frac{3 - \frac{\bar{M}}{r_c}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^n \quad (30. c)$$

$$(B) f = \eta F(\epsilon_{ij}; P)^{-m} - M_0 (\bar{P} + 1)^m = 0 \quad (31. a)$$

$$\bar{P} = P/F \quad (31. b)$$

ここに、 m および n は材料定数であり、 \bar{M} 、 M_0 および r_c は $\sin 3\theta$ あるいは θ の関数である。

降伏面(A)は橋口の提案した降伏面 b (18)を次のように拡張したものである。式(18)において材料定数 M の値は cs における $\eta(=-r/P)$ 値を意味しているが、 θ の変化に応じてこの M 値もしくは r_c の値を変化させれば降伏面形状はそれに伴って変化する。これを (P, r) 面、 (r, θ) 面で考えれば、 M 値が大となれば降伏面は r 軸方向に大きくなり、逆に M 値が小となれば降伏面は r 軸方向に小さくなる。そこで M を θ あるいは $\sin 3\theta$ の関数として

$$\bar{M} = \bar{M}(\theta) = \bar{M}(\sin 3\theta) \tag{32}$$

で表わしてみた。すなわち \bar{M} は各々の θ 値に対して cs における η 値を表わす関数である。

関数 \bar{M} の具体形として本報では次の2つの関数を用いた。

$$\textcircled{a} \quad \bar{M} = \left\{ \frac{(2\sqrt{6} \sin \phi)^k}{(\Omega - \pi \sin 3\theta)^k} \right\}^\ell \tag{33}$$

$$\textcircled{b} \quad \bar{M} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \phi \sin 3\theta} \right)^\ell \tag{34}$$

式(33)は式(19)を、式(34)は式(13, c)を

$$\bar{M} = -r/T(P_0 = 0) = -r/P \tag{35}$$

と変形した関数である。ここに Ω および π はそれぞれ式(33)および(34)で与えられ、 ϕ 、 K 、 ℓ は材料定数を表わす。

BurlandあるいはRoscoeの降伏面(14)や(15)において M 値を同様に式(33)あるいは(34)の関数 \bar{M} に置換すれば、これらの降伏面の一般表示形が得られる。これらの一般表示形は比較的簡潔であるが、過圧密状態における曲面の膨みが過大であることと、曲面形状のとりうる自由度が小さいのが欠点である。

さて、以上に提案した降伏面は関数 M_0 、 r_c および材料定数の与え方によって多様な形状をとりうる。以下にそれらの例を降伏面(A)に限定して述べておく。

(A) $\ell = 0$, $r_c = \text{const.}$, $M_0 = (\bar{M})^{\frac{1}{\ell}}$ の場合： M_0 のみが $\sin 3\theta$ の関数となり、 r_c は cs における P 値すなわち P_{0c} を意味する。したがって、図1(a)に示すように cs は降伏面のサイズの $1/2$ の P 値で表わ

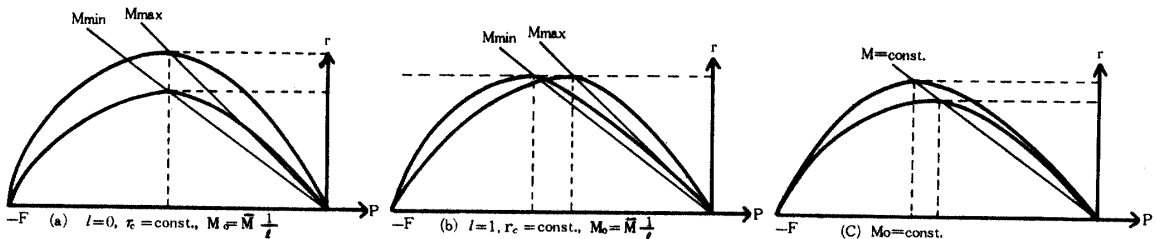


Fig. 1 Three variations of the yield surface shape in (P, r) plane

れてその時の r 値が関数 M_0 に応じて変化する。この降伏面を (r, θ) 面に投影すると M_0 の描く曲線に一致する。

(B) $\ell = 1$, $r_c = \text{const.}$, $M_0 = (M)^{\frac{1}{\ell}}$ の場合： r_c は cs における r 値すなわち r_{0c} を意味するがこの値は一定であるため図1(b)に示すような形状となる。したがって θ の変化に応じて cs における P 値および M_0 の値は異なる。降伏面を (r, θ) 面に投影すると円になる。

なお r_c を $\sin 3\theta$ の関数とすれば自由度はかなり大きくなるが凸面条件を満たさない場合のあることも考えられ実際的ではない。

(C) $M_0 = \text{const.}$ の場合： cs における η 値は一定であるので図1(C)に示したような降伏面となる。 cs における r 値を示す r_c は $\sin 3\theta$ の関数である。降伏面の (r, θ) 面への投影図は(A)と同様に M_0 の描く曲線に一致する。

材料定数 n の値を大きくすると降伏面は過圧密状態において Coulomb・Mohr の六角錐面により接近して、実測値に近い状態になる。

降伏面(A.)に対して、式(33)および(34)を適用した例を図2および3に示しておく。同図よりわかるよう

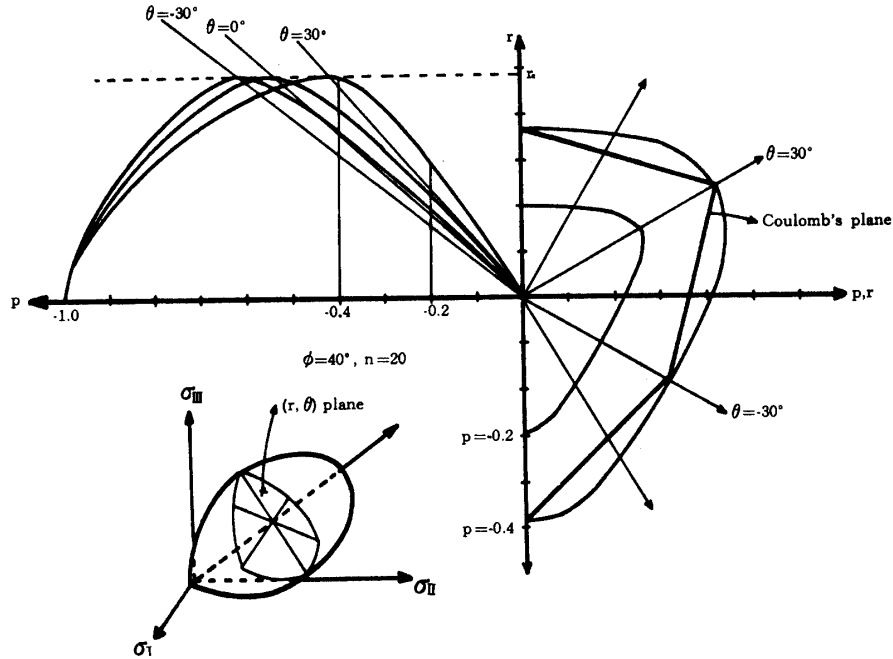


Fig. 2 The shape of yield surface based on eq. (33) in (p,r) and (r, θ) plane

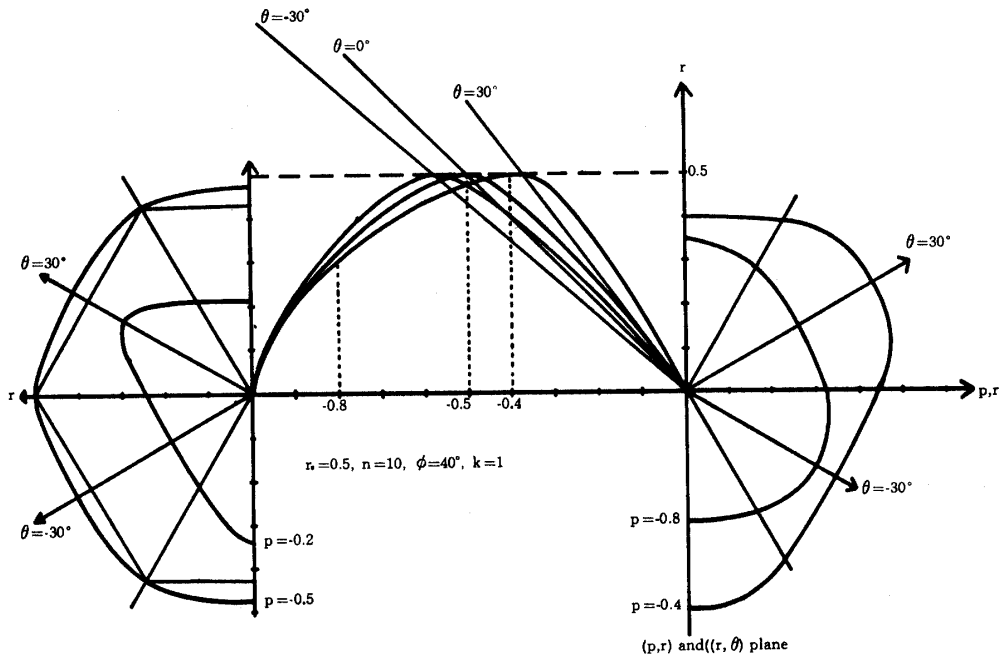


Fig. 3 The shape of yield surface based on eq. (34) in (p,r) and (r, θ) plane
 に上記の条件(B)の場合には (r, θ) 面における降伏面形状はP値によって大きく変化しており、従来の降伏面のようなP軸に対する相似形は保たない。

図2および3に示した降伏面の凸面条件は数値計算によって確認した。

IV 塑性構成式

前節で提案した降伏面(A)および式(3)に基づいて、土を等方硬化塑性体と仮定した場合の塑性構成式を導く。硬化測度としては塑性体積ひずみ ϵ_v^p を用い、硬化関数には次式を採用した。²⁾

$$F(\epsilon_{ij}^p) = F_0 \exp(-\epsilon_v^p / \alpha) \quad (35)$$

ここに F_0 は F の初期値で α は材料定数である。

弾塑性過渡状態²⁾における変形挙動を表現するために次の塑性ポテンシャル Ψ を用いた。

$$\Psi = \bar{f} - F \leq 0 \quad (36)$$

ここに不等号は下降伏状態を表わし、等号は降伏状態を意味する。この場合に \bar{f} は現時点での応力状態によって定まる負荷面と称する曲面で降伏面に対応する。

$$\partial \Psi / \partial \sigma_{ij} = \partial \bar{f} / \partial \sigma_{ij} \quad (37)$$

より、塑性ひずみ増分は次式で与えられる。

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{d\bar{f}}{G} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{k}{dF} \frac{d\bar{f}}{d\epsilon_v^p} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (38)$$

ここに、 K および H はパラメータ $F(=f/F)$ の関数で、下降伏状態における塑性ひずみ増分の大きさを制御する機能をもつ。具体的な関数形としては

$$K = \{ (1 - \kappa) F^\lambda + \kappa \} F \quad (39)$$

$$H = c | \ln F |^\delta \quad (40)$$

などが考えられる。²⁾ここに c 、 λ 、 δ 、および κ は材料定数である。

円筒座標系では次式が成立する。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \sin 3\theta} \frac{\partial \sin 3\theta}{\partial \sigma_{ij}} \quad (41)$$

ここに

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} / 3 \quad (42)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij} / P^2 \eta - \eta \delta_{ij} / 3P \quad (43)$$

$$\frac{\partial \sin 3\theta}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{3}{r^2} \{ r \sin 3\theta \cdot S_{ij} + \sqrt{6} (S_{ik} S_{kj} - \frac{\sqrt{2}}{3} r \delta_{ij}) \} \quad (44)$$

さらに

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial P} = -q + \eta \frac{\partial q}{\partial \eta} \quad (45)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = -P \quad (46)$$

これらの関係式に式(30.c)および(3)を用いると

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{3 \{ (n-1) \frac{\bar{M}}{r} - n \} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{n-1} + n \left(3 - \frac{\bar{M}}{r} \right) \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{n-1}}{(2n-3)M_0} \quad (47)$$

$$\frac{\partial q}{\partial M} = \frac{1}{(2n-3)r} \left\{ 2(n-1) \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{n-1} - \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^n \right\} - \frac{\partial q}{\partial M_0} \frac{\partial M_0}{\partial M} \quad (48)$$

$$\partial \bar{M} / \partial \sin 3\theta = \pi \bar{M} / 4(\Omega - \pi \sin 3\theta) \quad (49)$$

となる。これらより $\partial \bar{f} / \partial \sigma_{ij}$ を求めて式(38)に用いると塑性構成式が具体的に定まる。

V 3次元変形解析への適用について

以上に得た塑性構成式を実際の3次元変形解析に用いる場合には、土を弾塑性体とみなして次の構成式を定めなければならない。⁵⁾

$$d\sigma_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijmn} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl}}{G + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{tu}}} \right) d\epsilon_{kl} \quad (50)$$

ここに E_{ijkl} は弾性構成テンソル、 $d\epsilon_{ij}$ はひずみ増分で弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和とする。本式に式(41)を用い、さらに弾性構成テンソルを定めれば応力増分とひずみ増分の関係が得られ、有限要素法における剛性方程式が具体的に定まる。

なお、ここで導いた構成式の適用性の検討や変形解析への活用は今後の課題として継続したい。

VI 摘 要

本文では平面状態に限定されていた土の塑性構成式を3次元に拡張するために、降伏面の一般表示に関する検討を行って、例えば次のようないくつかの関数を提案した。

$$\bar{f} = -P \left[1 + \frac{2 \left\{ (n-1) \frac{\bar{M}}{r_c} - n \right\}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{1.5} + \frac{3 - \frac{\bar{M}}{r_c}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^n \right]$$

$$\bar{M} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \phi \sin 3\theta} \right) \ell$$

これらの降伏面を塑性ポテンシャル面とみなして具体的な塑性構成式を導びき、弾塑性変形解析への応用の準備を行った。

最後に、本研究は九州大学農学部橋口公一助教授に負うところが多いことを記しておく。

引用文献

1. 橋口公一：1975・粒状体に関する弾塑性構成式，学位論文，東京工業大学
2. Hashiguchi, K. and M. UENO: 1977・Elasto-plastic constitutive laws of granular materials. In "Constitutive Equation of Soils", Speciality Session of 9th ICSMFE, P.73-82
3. Schofield, A. N. and C. P. Wroth: 1968・Critical Soil Mechanics, McGraw Hill, London
4. Truesdell, C: 1955・Hypo-elasticity, J. Rational Mech. Anal., P.83-133
5. 上野正実他：1980・有限要素法による土壌抵抗の解析，農機誌 42(3)，P.329-334

Summary

A generalized description of the yield surface for soils was investigated and some functions of it were proposed, to extend the plastic constitutive equation restricted in plane condition to three dimensional condition. For example,

$$\bar{f} = -P \left[1 + \frac{2 \left\{ (n-1) \frac{\bar{M}}{r_c} - n \right\}}{2n-3} \cdot \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^{1.5} + \frac{3 \frac{\bar{M}}{r_c}}{2n-3} \left(\frac{\eta}{M_0} \right)^n \right]$$

$$M = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \phi \sin 3\theta} \right) \ell$$

The plastic constitutive equation was derived from these yield surfaces based on the theory of plastic potential surface, and a preparation for the application to elasto-plastic deformation analysis was made.