Sup・minおよびInf・max合成ファジィ関係式の解法

Sup·min および Inf·max 合成ファジィ関係式の解法

譜久村速子* 宮城隼夫**

Solution of Sup·min and Inf·max Composite Fuzzy Relation Equations

Hayako FUKUMURA* Hayao MIYAGI**

Abstract

This paper proposes an algorithm to solve the Sup·min composite and Inf·max composite fuzzy relation equations.Solutions have been expressed with interval values. The method proposed does not lead the redundant sets in the solution sets,introducing a rule of branch bifurcation.

Key Words: Sup·min composite,Inf·max composite,Rule of exclusion.

1. まえがき

ファジィ集合の概念が,L.A.Zadeh 氏により提唱され[1]て以来,ファジィ集合に関する研究は,純粋数学に近いものから,応用理論,応用技術,ハードウェアはもちろん,最近は経営,経済,心理学など人文社会科学の領域でも広く研究されている.

それらの研究の中でも,ファジィ関係式とその解法は,大変興味深い問題である.ファジィ関係式は,「A と B は,とても仲がいい」,「C と D は少し似ている」などの,日常使われる自然言語に含まれるような,二つの集合間のあいまいな関係を定義するものである.ファジィ関係式は,通常の数学で扱う関係の拡張として論じることができる.ファジィ関係式の応用範囲は広く,医療診断,故障診断などのさまざまな分野のエキスパートシステム,また意思決定などのあいまいな情報を取り扱わなければならない問題の定式化や解析などへの応用が期待されている.

ファジィ関係式とその解法は,Sanchez によって初めて提案された[2].Sanchez の解法は,Sup·min 合成, Inf·max 合成のそれぞれの場合について,α 演算,ε 演算を定義し,それらの演算を用いて未知の解の上限のみを求める方法であった.塚本・田代らは,Sup·min 合成ファジィ関係式の逆問題に対して,ω 演算を定義し,解を区間値で求める方法を示した[3].また,韓・関口は,符号行列を用いることにより互いに包含関係にない解のみを得る解法を示した[4].さらに韓・関口・高橋は,符号行列を用いたファジィ関係式の解の存在性の判別方法も示している[5].

本論文では塚本らと同様なファジィ関係式の逆問題について新たな解法を示す.まず,1 個の既知のファジィ入出力をもつ Sup·min 合成および Inf·max 合成ファジィ関係式を満たす,ファジィ関係を求める解法を示している.n 個の既知のファジィ入出力をもつ,Sup·min 合成および Inf·max 合成ファジィ関係式においては,各入出力対から得られる解は共通部分をもつ必要があり,しかも各入出力対から得られる解は複数個存在する可能性がある.したがって,本論文では,各部分解を効率的に組合わせるルールを提案するとともに,各部分解の共通集合が存在しない冗長解を導くことがなく,共通集合が存在する解のみを容易に求めるアルゴリズムを提案する.

受理：1997年5月26日
* 大学院工学研究科 電気・情報工学専攻
(Graduate Student, Electrical and Information Eng.)
** 工学部情報工学科
(Dept. of Information Engineering, Fac. of Eng.)

2. 諸定義

S を $X\times Y$ におけるファジィ関係とし,T を $Y\times Z$ におけるファジィ関係とすると,S と T の Sup·min 合成および, Inf·min 合成は $X\times Z$ におけるファジィ関係となり,次のように定義される.

[定義 1]Sup·min 合成演算

$$\begin{aligned} S\bigcirc T \quad &\Leftrightarrow \quad \mu_{S\bigcirc T}(x,z) \\ &= \quad \underset{y}{Sup}\cdot min\{\mu_S(x,y),\mu_T(y,z)\} \\ &= \quad \bigvee_y\{\mu_S(x,y)\wedge\mu_T(y,z)\} \end{aligned} \tag{1}$$

[定義 2]Inf·max 合成演算

$$\begin{aligned} S\triangle T \quad &\Leftrightarrow \quad \mu_{S\triangle T}(x,z) \\ &= \quad \underset{y}{Inf}\cdot max\{\mu_S(x,y),\mu_T(y,z)\} \\ &= \quad \bigwedge_y\{\mu_S(x,y)\vee\mu_T(y,z)\} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで,Sup,Inf,max,min はそれぞれ,上限,下限,最大,最小を表す.

3. 1 入出力をもつ Sup·min 合成および Inf·max 合成ファジィ関係式の解

本節では,1 入出力をもつ Sup・min 合成および Inf・max 合成ファジィ関係式に対し,ベクトル表現された 1 組の既知のファジィ入出力対において,それぞれの未知のファジィ関係を求めるための解の存在条件とその解の形

を示す.

3.1 Sup・min 合成ファジィ関係式の解

[定理 3.1.1]

$\boldsymbol{x} \in \Psi(X)$ を既知のファジィ集合, $y \in \Psi(y)$ を既知のファジィ数, $\boldsymbol{r} \in \Psi(X \times Y)$ を未知のファジィ関係として次に示す Sup・min 合成ファジィ関係式を考える.

$$\boldsymbol{x} \bigcirc \boldsymbol{r} = y \tag{3}$$

このとき, 任意の $y \in Y$ に対する次の解集合

$$S_1(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}, y) = \{\boldsymbol{r} \in \Psi(X \times Y) | \boldsymbol{x} \bigcirc \boldsymbol{r} = y\} \tag{4}$$

に関して次の命題が成り立つ.

$$S_1(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}, y) \neq \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \boldsymbol{x} \leq y \neq \phi$$

この定理 3.1.1 は, 大里・関口氏らによって既に示されている[6].

[定理 3.1.2] (3) 式において, 定理 3.1.1 を満足するとき, その解の形は $\boldsymbol{x}$ の要素に $x_i \geq y$ となる要素が存在するならば,i のうちの 1 つを m とおくと

(a) $x_i > y$ となる x_i を基準に取った場合

1. $x_m > y$ となる m に対して
   $r_m = [y]$
2. $x_j > y (j \neq y)$ となる j に対して
   $r_j = [0, y]$
3. $x_k = y$ となる k に対して
   $r_k = [0, 1]$
4. $x_l < y$ となる l に対して
   $r_l = [0, 1]$

(b) $x_i = y$ となる x_i を基準に取った場合

1. $x_m > y$ となる m に対して
   $r_m = [y, 1]$
2. $x_j > y$ となる j に対して
   $r_j = [0, y]$
3. $x_k = y (k \neq m)$ となる k に対して
   $r_k = [0, 1]$
4. $x_l < y$ となる l に対して
   $r_l = [0, 1]$

で与えられる. なお, 解のパターンは i の選びかたによって n ($x_i \geq y$ となる x_i の要素の個数) 通りある.

3.2 Inf・max 合成ファジィ関係式の解

文献 [6] に従い次の定理が得られる.

[定理 3.2.1]

$\boldsymbol{x} \in \Psi(X)$ を既知のファジィ集合, $y \in \Psi(y)$ を既知のファジィ数, $\boldsymbol{r} \in \Psi(X \times Y)$ を未知のファジィ関係として次に示す Inf・max 合成ファジィ関係式を考える.

$$\boldsymbol{x} \triangle \boldsymbol{r} = y \tag{5}$$

このとき, 任意の $y \in Y$ に対する次の解集合

$$S_1(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}, y) = \{\boldsymbol{r} \in \Psi(X \times Y) | \boldsymbol{x} \triangle \boldsymbol{r} = y\} \tag{6}$$

に関して次の命題が成り立つ.

$$S_1(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}, y) \neq \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \boldsymbol{x} \geq y \neq \phi$$

[定理 3.2.2] (5) 式において, 定理 3.2.1 を満足するとき, その解の形は $\boldsymbol{x}$ の要素に $x_i \geq y$ となる要素が存在するならば,i のうちの 1 つを m とおくと

(a) $x_i < y$ となる x_i を基準に取った場合

1. $x_m < y$ となる m に対して
   $r_m = [y]$
2. $x_j < y (j \neq y)$ となる j に対して
   $r_j = [y, 1]$
3. $x_k = y$ となる k に対して
   $r_k = [0, 1]$
4. $x_l > y$ となる l に対して
   $r_l = [0, 1]$

(b) $x_i = y$ となる x_i を基準に取った場合

1. $x_m = y$ となる m に対して
   $r_m = [0, y]$
2. $x_j < y$ となる j に対して
   $r_j = [y, 1]$
3. $x_k = y (k \neq m)$ となる k に対して
   $r_k = [0, 1]$
4. $x_l > y$ となる l に対して
   $r_l = [0, 1]$

で与えられる. なお, 解のパターンは i の選びかたによって n ($x_i \leq y$ となる x_i の要素の個数) 通りある.

4. n 入出力をもつ Sup·min 及び Inf·max 合成ファジィ 関係式の解法

4.1 合成ファジィ関係式

空でない n 個の入力および出力を

$$X_i (i = 1, 2, \cdots, n), Y$$

とする.X_i, Y 上のファジィ集合を $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}$, 直積集合 $X_i \times Y$ 上のファジィ関係を $\boldsymbol{r}$ とすると, これらは次のように定義される.

$$\begin{array}{lcll} \boldsymbol{x}_i & : & X_i & \rightarrow & U \\ \mathbf{Y}_i & : & Y & \rightarrow & U \\ \boldsymbol{r}_i & : & X_i \times Y & \rightarrow & U \end{array}$$

ただし,$U = \{u | 0 \leq u \leq 1\}$

このとき,$\boldsymbol{x}_i \in X_i$,$\boldsymbol{y} \in Y$ に対する関数値 $\boldsymbol{x}_i(x_i), \boldsymbol{y}(y)$, $\boldsymbol{r}(x_i, y)$ はそれぞれ, 要素 $x_i \in X_i, y \in Y$, 順序対 $(x_i, y) \in X_i \times Y$ のメンバーシップのグレードを表す. また, 集合族 X を

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$$

と定義し, 以下 X 上のすべてのファジィ集合の族を $\Psi(X)$, Y 上のすべてのファジィ集合を $\Psi(Y)$, $X \times Y$ 上のすべてのファジィ関係の族を $\Psi(X \times Y)$ で表す.

合成ファジィ関係式は, 入力, 出力がともにファジィ集合で与えられる場合のシステムの定式化に有用である. 合成ファジィ関係式を悲観的, 楽観的にそれぞれ記述すると

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)^T \bigcirc \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{y} \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)^T \triangle \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{y} \tag{8}$$

となる. ただし,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)^T$$

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$$

$$\check{\boldsymbol{r}} = (\check{r_1}, \check{r_2}, \cdots, \check{r_m})^T$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{r_1}, \hat{r_2}, \cdots, \hat{r_m})^T$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$$

4.2 Sup-min 合成ファジィ関係式の解法

行列 $\boldsymbol{X}$ および集合 $\boldsymbol{y}$ の要素がすべて与えられているとき, 次の Sup-min 合成ファジィ関係式

$$\boldsymbol{X} \bigcirc \check{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{y} \tag{9}$$

を満足するすべての解 $\check{\boldsymbol{r}}$ を求める問題は, 次に示すアルゴリズムによって, 解くことができる.

[ルール 1.1]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i, j) 要素に対し

$$g_{ij} = \begin{cases} y_i & if \quad x_{ij} > y \\ \psi & if \quad x_{ij} \leq y_i \end{cases} \tag{10}$$

ただし, $\psi = [0, 1]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$ とし, 行列 $\boldsymbol{G}$ を作成する. このとき, 行列 $\boldsymbol{G}$ のある行の要素がすべて ψ であるなら, その行の要素をすべて ϕ(空) と置き換える.

また, 空となる行を除外した各行に ψ 以外の値をもつ要素が 1 個ずつ配列されるような行列 $\boldsymbol{G}_i$ $(\subseteq \boldsymbol{G})$ を作成する.

このルールを行列で表したものを以下に示す.

$x_{ij} > y_i, x_{is} > y_i$ とするとき

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c|ccccccc} & & & j & & s & & \\ \hline & & & & & & & \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \bullet & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{is} & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{array}{c|ccccccc} & & & j & & s & & \\ \hline & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \bullet & \cdots & y_i & \cdots & \psi & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{array}{c|ccccccc} & & & j & & s & & \\ \hline & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \bullet & \cdots & \psi & \cdots & y_i & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \tag{13}$$

ただし,～ は同じ要素が並んでいることを意味する.

[ルール 1.2]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i, j) 要素に対し

$$e_{ij} = \begin{cases} \psi & if \quad x_{ij} > y \\ [y_i, 1] & if \quad x_{ij} = y_i \\ \psi & if \quad x_{ij} < y_i \end{cases} \tag{14}$$

ただし, $\psi = [0, 1]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$ とし, 行列 $\boldsymbol{E}$ を作成する. このとき, 行列 $\boldsymbol{E}$ のある行の要素がすべて ψ であるなら, その行の要素をすべて ϕ(空) と置き換える.

また, 空となる行を除外した各行に ψ 以外の値をもつ要素が 1 個ずつ配列されるような行列 $\boldsymbol{E}_i$ $(\subseteq \boldsymbol{E})$ をすべて作成する.

このルールを行列で表したものを以下に示す.

$x_{ij} = y_i, x_{is} = y_i$ とするとき

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c|ccccccc} & & & j & & s & & \\ \hline & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \bullet & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{is} & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \tag{15}$$

(14) 式の条件より,

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{array}{c|ccccccc} & & & j & & s & & \\ \hline & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \bullet & \cdots & [y_i, 1] & \cdots & \psi & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \tag{16}$$

$$E_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & j & & s & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \psi & \cdots & [y_i, 1] & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi & \sim & \phi & \sim & \phi & \sim & \phi \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \quad (17)$$

ただし,$\sim$ は同じ要素が並んでいることを意味する.

[ルール 1.3]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i,j) 要素に対し

$$c_{ij} = \begin{cases} [0, y_i] & if \quad x_{ij} > y_i \\ \psi & if \quad x_{ij} \le y \end{cases} \quad (18)$$

ただし, $\psi = [0,1]$, $i = 1,2,\cdots,n, \jmath = 1,2,\cdots,m$
と定め, 行列 $\boldsymbol{C}$ を作成する.

このルールを行列で表したものを以下に示す.

$x_{ij} > y_i, x_{is} > y_i, x_{it} < y_i$ とするとき

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & j & & s & & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{is} & \cdots & x_{it} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \sim & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi & \sim \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots \end{array}\right) \end{array} \quad (19)$$

と与えられたとき,(18) 式の条件に従い, $\boldsymbol{C}$ を次のように作成する.

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & j & & s & & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & [0, y_i] & \cdots & [0, y_i] & \cdots & \psi & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \sim & \psi & \sim & \psi & \sim & \psi & \sim \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots \end{array}\right) \end{array} \quad (20)$$

[ルール 1.4]

中間行列 $\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{V}_i$ を

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{G}_i, \quad \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{E}_i \quad (21)$$

により作成する.
ただし,

$$\boldsymbol{U}_i = (\boldsymbol{u}_1^i, \boldsymbol{u}_2^i, \cdots, \boldsymbol{u}_n^i)^T$$

$$\boldsymbol{V}_i = (\boldsymbol{v}_1^i, \boldsymbol{v}_2^i, \cdots, \boldsymbol{v}_n^i)^T$$

$$(i = 1,2,\cdots,p, \ j = 1,2,\cdots,q)$$

$$p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

p_i は i 行目に存在する $x_{ij} > yj$ となる要素 x_{ij} の個数

$$q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$$

q_i は i 行目に存在する $x_{ij} = yj$ となる要素 x_{ij} の個数

[ルール 1.5](除外のルール)

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{V}_i \\ \boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{V}_j \end{cases} \quad (22)$$

ただし,

$$\boldsymbol{Z}_i = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_i)^T$$

$$\boldsymbol{z}_i = (\boldsymbol{u}_i^1, \boldsymbol{u}_i^2, \cdots, \boldsymbol{u}_i^p, \boldsymbol{v}_i^1, \boldsymbol{v}_i^2, \cdots, \boldsymbol{v}_i^q)$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

に対して, すべての i,j において

$$\boldsymbol{z}_i^\alpha \cap \boldsymbol{z}_j^\beta \ne \phi \qquad (\text{ただし}, \alpha \ne \beta)$$

となるならば, 解の組合せは図 1.1 に示すように $m = 2^n \times_{(p \times q)} C_2$ 通りある.

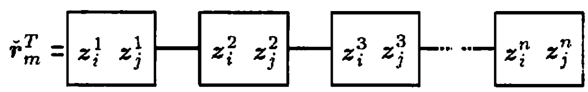

図 1

ただし, 図における $-$ は $\cap$ 演算を表している.
もし, ある値 i,j に対して,

$$\boldsymbol{z}_i^\alpha \cap \boldsymbol{z}_j^\beta = \phi \ (\text{ただし}, \alpha \ne \beta)$$

となる組み合せが存在するとき, 下記の図 1.2 に従って解の組み合せを考えれば, 空になる解を除外することができる.

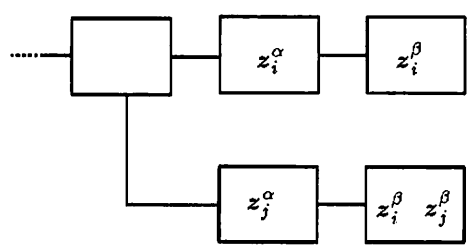

図 2

4.3 Inf･max 合成ファジィ関係式の解法

行列 $\boldsymbol{X}$ および集合 $\boldsymbol{y}$ の要素がすべて与えられているとき, 次の Inf･max 合成ファジィ関係式

$$\boldsymbol{X} \bigtriangleup \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{y} \quad (23)$$

を満足するすべての解 $\hat{\boldsymbol{r}}$ を求める問題は, 次に示すアルゴリズムによって, 解くことができる.

[ルール 2.1]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i,j) 要素に対し

$$s_{ij} = \begin{cases} y_i & if \quad x_{ij} < y \\ \psi & if \quad x_{ij} \ge y_i \end{cases} \quad (24)$$

ただし, $\psi = [0,1]$, $i = 1,2,\cdots,n,\ j = 1,2,\cdots,m$ とし, 行列 $\boldsymbol{S}$ を作成する. このとき, 行列 $\boldsymbol{S}$ のある行の要素がすべて ψ であるなら, その行の要素をすべて ϕ(空) と置き換える.

また, 空となる行を除外した各行に ψ 以外の値をもつ要素が 1 個ずつ配列されるような行列 $\boldsymbol{S}_i$ $(\subseteq \boldsymbol{S})$ を作成する.

[ルール 2.2]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i,j) 要素に対し

$$e_{ij} = \begin{cases} \psi & if \quad x_{ij} > y \\ [0, y_i] & if \quad x_{ij} = y_i \\ \psi & if \quad x_{ij} < y_i \end{cases} \tag{25}$$

ただし, $\psi = [0,1]$, $i = 1,2,\cdots,n,\ j = 1,2,\cdots,m$ とし, 行列 $\boldsymbol{E}$ を作成する. このとき, 行列 $\boldsymbol{E}$ のある行の要素がすべて ψ であるなら, その行の要素をすべて ϕ(空) と置き換える.

また, 空となる行を除外した各行に ψ 以外の値をもつ要素が 1 個ずつ配列されるような行列 $\boldsymbol{E}_i$ $(\subseteq \boldsymbol{E})$ をすべて作成する.

[ルール 2.3]

行列 $\boldsymbol{X}$ の (i,j) 要素に対し

$$c_{ij} = \begin{cases} [y_i, 1] & if \quad x_{ij} < y_i \\ \psi & if \quad x_{ij} \geq y \end{cases} \tag{26}$$

ただし, $\psi = [0,1]$, $i = 1,2,\cdots,n, \jmath = 1,2,\cdots,m$ と定め, 行列 $\boldsymbol{C}$ を作成する.

[ルール 2.4]

中間行列 $\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{V}_i$ を

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{S}_i, \quad \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{E}_i \tag{27}$$

により作成する.

ただし,

$$\boldsymbol{U}_i = (\boldsymbol{u}_1^i, \boldsymbol{u}_2^i, \cdots, \boldsymbol{u}_n^i)^T$$

$$\boldsymbol{V}_i = (\boldsymbol{v}_1^i, \boldsymbol{v}_2^i, \cdots, \boldsymbol{v}_n^i)^T$$

$$(i = 1,2,\cdots,p,\ j = 1,2,\cdots,q)$$

$$p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

p_i は i 行目に存在する $x_{ij} < yj$ となる要素 x_{ij} の個数

$$q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$$

q_i は i 行目に存在する $x_{ij} = yj$ となる要素 x_{ij} の個数

ルール 2.5 (除外のルール) は, 前節のルール 1.5 と同様なので省略する.

5. 数値例

次の Sup-min 合成ファジィ関係式を考える.

$$\boldsymbol{X} \bigcirc \check{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{y} \tag{28}$$

ここで,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{r}}^T = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

ルール 1 により,

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0.6 & \psi & \psi \\ \psi & \psi & 0.4 \\ \psi & 0.3 & \psi \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}_1$$

ルール 2 により,

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \psi & [0.6, 1] & \psi \\ [0.4, 1] & \psi & \psi \\ [0.3, 1] & \psi & \psi \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_1$$

ルール 3 により

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} [0, 0.6] & \psi & \psi \\ \psi & \psi & [0, 0.4] \\ \psi & [0, 0.3] & \psi \end{pmatrix}$$

ルール 4 により,

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & \psi & \psi \\ \psi & \psi & 0.4 \\ \psi & 0.3 & \psi \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} [0, 0.6] & [0.6, 1] & \psi \\ [0.4, 1] & \psi & [0, 0.4] \\ [0.3, 1] & [0, 0.3] & \psi \end{pmatrix}$$

ルール 5 により

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1^3 \cap \boldsymbol{v}_1^1 = \phi \\ \boldsymbol{u}_1^3 \cap \boldsymbol{v}_1^1 = \phi \end{cases}$$

であるから,

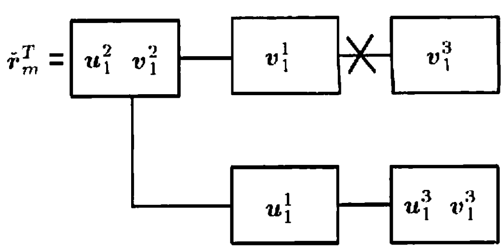

図 3

したがって, 解は次のようになる.

$$\check{\boldsymbol{r}}_1^T = \boldsymbol{u}_1^1 \cap \boldsymbol{u}_1^2 \cap \boldsymbol{u}_1^3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{r}}_2^T = \boldsymbol{u}_1^1 \cap \boldsymbol{u}_1^2 \cap \boldsymbol{v}_1^3 = \begin{pmatrix} 0.6 & [0, 0.3] & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{r}}_3^T = \boldsymbol{u}_1^1 \cap \boldsymbol{v}_1^2 \cap \boldsymbol{u}_1^3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & [0, 0.4] \end{pmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{r}}_4^T = \boldsymbol{u}_1^1 \cap \boldsymbol{v}_1^2 \cap \boldsymbol{v}_1^3 = \begin{pmatrix} 0.6 & [0, 0.3] & [0, 0.4] \end{pmatrix}$$

6. むすび

自然言語に含まれているような人間のあいまい性を扱ったファジィ研究の中で，ファジィ関係式とその解法は診断問題や同定問題，システムの制御および解析など工学の分野だけでなく経営学，心理学など社会科学分野への応用が期待される興味深い問題である．

本論文ではn個の既知の入出力ファジィ集合を考え，それに対して与えられたSup·min合成およびInf·max合成ファジィ関係式を満足する解を求めるための解法を提案した．ファジィ関係式の応用を考えると，本論文で示した解法は効率的であり有効性があるといえる．

今後の課題は，本解法を実際の問題に適用し，応用面での有効性，また，問題点などを考察することである．

文献

[1] L.A.Zadeh:"Fuzzy Sets" Information and Control,8,338-353(1965).
[2] E.Sanchez:"Resolution for Composite Fuzzy Relation Equations," Information and Control,30,38-48(1976).
[3] 塚本・田代:"Fuzzy逆問題の解法" 計測自動制御学会論文集，第15巻，第1号,21-25(1979).
[4] 韓・関口:" 符号行列によるファジィ関係式の解法 "，日本ファジィ学会誌,Vol.4,No.1,160-171(1992).
[5] 韓・関口・高橋: "ファジィ関係逆問題における解の存在性判別"，日本ファジィ学会誌,Vol.5,No.5,1142-1152(1993).
[6] 大里・関口:" 凸結合された Sup·min-Inf·max 合成 Fuzzy 関係式の解法，計測自動制御学会論文集，第19巻，第3号,212-219(1983).