2次元格子形フィルタの一設計法とスペクトル解析への応用

2次元格子形フィルタの一設計法とスペクトル解析への応用

山下勝己*　仲地孝之**　宮城隼夫*

A Design Method of a Two-Dimensional Lattice Filter and Its Application to Spectral Analysis

Katsumi YAMASHITA*　Takayuki NAKACHI**　Hayao MIYAGI*

Summary

The theory of lattice parameter modeling for one-dimensional signals has been well developed in recent years. However, until now, few works have been done concerning the theory of lattice parameter modeling for two-dimensional fields. In this paper, a new design method of two-dimensional lattice filter is presented using quarter-plane forward and backward prediction error fields. Furthermore, the use of the proposed filter to spectral analysis is described.

Key words: Digital filter, Two-Dimensional lattice filter, Spectral analysis

1. まえがき

ディジタル信号処理に関する種々の成果および実用的ディジタル信号処理プロセッサ装置の登場により，近年，ディジタル信号処理技術はあらゆる分野における必要不可欠な基礎技術になりつつある．また，2次元ディジタル信号処理は，リモートセンシング画像処理，医用画像処理，パターン認識などの発達に伴い，特に重要な課題となりつつある．

1次元信号を対象としたフィルタ設計に対して，トランスバーサル形および格子形構造を有する種々のフィルタが構築されているが，格子形構造を有するフィルタは，低係数感度特性，高速演算性および次数可変などのさまざまな優れた特質を有することから，同フィルタは多大なる注目を受けている．それ故，2次元信号を対象とした2次元フィルタの設計においても，格子形構造を有する2次元格子形フィルタの設計が種々提案されている．T. L. Marzetta は[1]，1次元格子形フィルタの設計が正規方程式の逐次解法であるレビンソン・ダービン算法の構造化に基づくことから，同逐次解法を2次元に拡張した2次元格子形フィルタを設計している．しかし，同アルゴリズムは，因果性をもたない変数の次数を無限にする際には安定性が保証されるものの，因果性のない方向への次数を有限化する場合には，この有限化により安定性が必ずしも補償されず，また，推定精度にも問題を生じることが，S. Ranganath らにより指摘されている[2]．

一方，S. R. Parker らは[3]，1次元格子形フィルタの構造に着目することにより，その構造の2次元への拡張形として，一つの前向き予測誤差と三つの後向き予測誤差をもち，1ステージ当り3種類の反射係数をもつ2次元格子形フィルタを提案している．更に，渡辺らは[4]，Parker の格子形フィルタでは，その係数制約から十分近似し得ない特性が存在することを指摘し，Parker らの考え方を基盤とした1ステージ当り6種類の反射係数をもつ，改良した2次元格子形フ

受理：1992年11月9日
*工学部電子・情報工学科 Dept. of Electronics and Information Engineering, Fac. of Eng.
**大学院工学研究科電気・情報工学専攻 Graduate Student, Electrical and Information Engnieering.

ィルタを構築している．しかしながら，同アルゴリズムには2次元定常確率場において必ずしも成立しない条件が存在する．

本論文では，前者のレビンソン・ダービン算法を2次元に拡張し，2次元格子形フィルタを構築するものではあるが，本手法は予測誤差として一つの前向き予測誤差と三つの後向き予測誤差を用いて逐次式を構築することから，有限次数のマスクに対しても安定性が保証された逐次解法となる．なお，本手法の有効性の検証については，渡辺らにより提案されたモデルを対象に2次元格子形フィルタを構築し，Parker らおよび渡辺らの2次元格子形フィルタにより得られる前向き予測誤差フィルタの伝達関数との比較により行う．

また，2次元 AR 格子形フィルタを用いた応用的研究としてパワースペクトル推定がある．一般に，2次元信号のスペクトル解析に関する研究は，1次元系列と同様フーリエ変換による方法，最大エントロピー法（MEM），最ゆう推定法（MLM），AR モデルによる方法など分類できるが，ここでは渡辺らが提案したＡＲモデル推定法[4]を用いたスペクトル推定を用いて2次元信号のスペクトル解析を行う．

2.　反射係数の決定

2次元格子形フィルタの次数を N 次と仮定し，格子点 (n, m) における前向き予測誤差 $f_N(n,m)$ および格子点 (n−N, m)，(n−N, m−N)，(n, m−N) における後向き予測誤差 $r^1_N(n,m)$，$r^2_N(n,m)$，$r^3_N(n,m)$ をそれぞれ次式のように定義する．

$$f_N(n,m)=\sum_{i=0}^{N}\mathbf{a}_N(i)\mathbf{y}(i) \tag{1a}$$

$$r^1_N(n,m)=\sum_{i=0}^{N}\mathbf{b}_N(i)\mathbf{y}(i) \tag{1b}$$

$$r^2_N(n,m)=\sum_{i=0}^{N}\mathbf{c}_N(i)\mathbf{y}(i) \tag{1c}$$

$$r^3_N(n,m)=\sum_{i=0}^{N}\mathbf{d}_N(i)\mathbf{y}(i) \tag{1d}$$

但し，

$$\mathbf{a}_N(i)=[a_N(i,0),\cdots,a_N(i,N)] \tag{1e}$$

$$\mathbf{b}_N(i)=[b_N(N-i,0),\cdots,b_N(N-i,N)] \tag{1f}$$

$$\mathbf{c}_N(i)=[c_N(N-i,N),\cdots,c_N(N-i,0)] \tag{1g}$$

$$\mathbf{d}_N(i)=[d_N(i,N),\cdots,d_N(i,0)] \tag{1h}$$

$$\mathbf{y}^T(i)=[y(n-i,m),\cdots y(n-i,m-N)] \tag{1i}$$

なお，上記の $\mathbf{a}_N(i)$，$\mathbf{b}_N(i)$，$\mathbf{c}_N(i)$，$\mathbf{d}_N(i)$，および $\mathbf{y}(i)$ はそれぞれ (N+1) 次元からなるベクトルを表わし，また，$a_N(0,0)$，$b_N(0,0)$，$c_N(0,0)$ および $d_N(0,0)$ は1を表わす．更に，添え字 T は転置記号を表わす．

また，各予測誤差の2乗平均を次式のように定義する．

$$J^0_N=E[\{f_N(n,m)\}^2] \tag{2a}$$

$$J^i_N=E[\{r^i_N(n,m)\}^2] \tag{2b}$$

$$(i=1,2,3)$$

但し，記号 E は期待値を意味する演算子である．

このとき，上式に式(1)を代入し，各係数で偏微分し零と置くことにより得られる関係式および式(2)の最小値に関する関係式は，次式のような行列形式で記述することができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_N(0) & \mathbf{a}_N(1) & \cdots & \mathbf{a}_N(N-1) & \mathbf{a}_N(N) \\ \mathbf{b}_N(0) & \mathbf{b}_N(1) & \cdots & \mathbf{b}_N(N-1) & \mathbf{b}_N(N) \\ \mathbf{c}_N(0) & \mathbf{c}_N(1) & \cdots & \mathbf{c}_N(N-1) & \mathbf{c}_N(N) \\ \mathbf{d}_N(0) & \mathbf{d}_N(1) & \cdots & \mathbf{d}_N(N-1) & \mathbf{d}_N(N) \end{bmatrix}\mathbf{R}_N$$

$$=\begin{bmatrix} \Delta^0_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Delta^1_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Delta^2_N \\ \Delta^3_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3a}$$

但し，

$$\Delta^0_N=[\hat{J}^0_N,0,\cdots,0],\ \Delta^1_N=[\hat{J}^1_N,0,\cdots,0] \tag{3b}$$

$$\Delta^2_N=[0,\cdots,0,\hat{J}^2_N],\ \Delta^3_N=[0,\cdots,0,\hat{J}^3_N] \tag{3c}$$

なお，Δ^i_N は式(2)の最小値 $\hat{J}^i_N$ を要素とする (N+1) 次元のベクトルを表わし，また，$\mathbf{R}_N$ は次式で示すような $(N+1)^2\times(N+1)^2$ のブロックテプリッツ行列を表わす．

$$\mathbf{R}_N=\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \cdots\mathbf{R}_N \\ \mathbf{R}_{-1} & \mathbf{R}_0 & \cdots\mathbf{R}_{1-N} \\ \vdots & \vdots & \cdots\vdots \\ \mathbf{R}_{-N} & \mathbf{R}_{N-1} & \cdots\mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \tag{4a}$$

但し，

$$\mathbf{R}_i=\begin{bmatrix} R(i,0) & R(i,1) & \cdots R(i,N) \\ R(i,-1) & R(i,0) & \cdots R(i,N-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ R(i,-N) & R(i,1-N) & \cdots R(i,0) \end{bmatrix} \tag{4b}$$

なお，$\mathbf{R}_i$ の要素である $R(i,j)$ は次式で定義される自己相関関数を表わす．

$$R(i,j)=E[y(n,m)y(n-i,m-j)] \tag{5}$$

次に，レビンソン・ダービン算法に基づいて次数に関する再帰式を構成する．まず，N 次に関する式（3a）の関係式に基づいて（N+1）次の関係式を次式のように定義する．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N+1}(0) & \mathbf{a}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{a}_{N+1}(N) & \mathbf{a}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{b}_{N+1}(0) & \mathbf{b}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{b}_{N+1}(N) & \mathbf{b}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{c}_{N+1}(0) & \mathbf{c}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{c}_{N+1}(N) & \mathbf{c}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{d}_{N+1}(0) & \mathbf{d}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{d}_{N+1}(N) & \mathbf{d}_{N+1}(N+1) \end{bmatrix} \mathbf{R}_{N+1}$$

$$=\begin{bmatrix} \Delta^0{}_{N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta^1{}_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta^2{}_{N+1} \\ \Delta^3{}_{N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

次に，式（3a）の N 次に関する係数を用いて（N+1）次の関係式を定義し，定義した関係式に $(N+2)^2\times(N+2)^2$ のブロックテプリッツ行列 R_{N+1} を右乗することにより，次式の関係式を構成する．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_N(0),0 & \mathbf{a}_N(1),0 & \cdots & \mathbf{a}_N(N),0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_N(0),0 & \cdots & \mathbf{b}_N(N-1),0 & \mathbf{b}_N(N),0 \\ 0 & 0,\mathbf{c}_N(0) & \cdots & 0,\mathbf{c}_N(N-1) & 0,\mathbf{c}_N(N) \\ 0,\mathbf{d}_N(0) & 0,\mathbf{d}_N(1) & \cdots & 0,\mathbf{d}_N(N) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{N+1}$$

$$=\begin{bmatrix} \hat{J}^0{}_N,0\cdots0,\Delta^a{}_{0,N+1} & 0,0\cdots0,\Delta^a{}_{1,N+1} & \cdots \\ \Delta^b{}_{0,0},\cdots\cdots,\Delta^b{}_{0,N+1} & 0,0\cdots0,\Delta^b{}_{1,N+1} & \cdots \\ \Delta^c{}_{0,0},\cdots\cdots,\Delta^c{}_{0,N+1} & \Delta^c{}_{1,0},0\cdots0,\ 0 & \cdots \\ \Delta_0{}^d{}_{,0},0\cdots0,\ \hat{J}^3{}_N & \Delta^d{}_{1,0},0\cdots0,\ 0 & \cdots \\ 0,0\cdots0,\Delta^a{}_{N,N+1} & \Delta^a{}_{N+1,0},\cdots\cdots,\Delta^a{}_{N+1,N+1} & \\ 0,0\cdots0,\Delta^b{}_{N,N+1} & \hat{J}^1{}_N,0\cdots0,\Delta^b{}_{N+1,N+1} & \\ \Delta^c{}_{N,0},0\cdots0,\ 0 & \Delta^c{}_{N+1,0},0\cdots0,\ \hat{J}^2{}_N & \\ \Delta^d{}_{N,0},0\cdots0,\ 0 & \Delta^d{}_{N+1,0},\cdots\cdots,\Delta^d{}_{N+1,N+1} & \end{bmatrix} \tag{7a}$$

但し，

$$\Delta^a{}_{s,t}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}a_N(i,j)R(s-i,t-j) \tag{7b}$$

$$\Delta^b{}_{s,t}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}b_N(N-ij)R(s-i-1,t-j) \tag{7c}$$

$$\Delta^c{}_{s,t}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}c_N(N-i,N-j)R(s-i-1,t-j-1) \tag{7d}$$

$$\Delta^d{}_{s,t}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}d_N(i,N-j)R(s-i,t-j-1) \tag{7e}$$

$$(0\leqq s,t\leqq N+1)$$

一方，4X4次の反射係数行列 $\mathbf{k}_{N+1}$ を次式のように定義する．

$$\mathbf{k}_{N+1}=\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} \end{bmatrix} \tag{8}$$

上式では表現の煩雑さを避けるため，行列の要素に付加すべき添え字 N+1 の記述を省略している．

このとき，式（7a）の両辺に上記の反射係数行列を左乗し得られた関係式と式(6)の関係式とが一致するように $\mathbf{k}_{N+1}$ を求めると，$\mathbf{k}_{N+1}$ の要素に関して以下のような関係式が得られる．

$$k_{i,1}\hat{J}^0{}_N+k_{i,2}\Delta^b{}_{o,o}+k_{i,3}\Delta^c{}_{o,o}+k_{i,4}\Delta^d{}_{o,o}=0 \quad (i=2,3,4) \tag{9a}$$

$$k_{i,1}\Delta^a{}_{N+1,o}+k_{i,2}\hat{J}^1{}_N+k_{i,3}\Delta^c{}_{N+1,o}+k_{i,4}\Delta^d{}_{N+1,o}=0 \quad (i=1,3,4) \tag{9b}$$

$$k_{i,1}\Delta^a{}_{N+1,N+1}+k_{i,2}\Delta^b{}_{N+1,N+1}+k_{i,3}\hat{J}^2{}_N+k_{i,4}\Delta^d{}_{N+1,N+1}=0 \quad (i=1,2,4) \tag{9c}$$

$$k_{i,1}\Delta^a{}_{o,N+1}+k_{i,2}\Delta^b{}_{o,N+1}+k_{i,3}\Delta^c{}_{o,N+1}+k_{i,4}\hat{J}^3{}_N=0 \quad (i=1,2,3) \tag{9d}$$

$$k_{i,1}\Delta^a{}_{j,N+1}+k_{i,2}\Delta^b{}_{j,N+1}=0 \tag{9e}$$

$$k_{i,2}\Delta^b{}_{o,j}+k_{i,3}\Delta^c{}_{o,j}=0 \tag{9f}$$

$$k_{i,3}\Delta^{c}_{j,0}+k_{i,4}\Delta^{d}_{j,0}=0 \tag{9g}$$

$$k_{i,4}\Delta^{d}_{N+1,j}+k_{i,1}\Delta^{a}_{N+1,j}=0 \tag{9h}$$

$$(i=1,\cdots,4,\ j=1,\cdots,N)$$

但し，

$$k_{1,1}=k_{2,2}=k_{3,3}=k_{4,4}=1 \tag{9i}$$

なお，上記の関係は以下の操作により，前向きおよび後向き予測誤差で表わした関係に書き直すことができる．まず，式（9f）の j 番目の関係に $a_N(0,j)$ を乗じ，すなわち，1番目には $a_N(0,1)$ を，2番目には $a_N(0,2)$ を順次乗じ，また，式（9g）の j 番目の関係には $a_N(j,0)$ を乗じ，この2N 個の関係式を式(9a)に加えれば前向きおよび後向き予測誤差で表わした式（10a）の関係が得られる．なお，導出に際しては付録1の式（A•4），（A•12），（A•13），（A•14）および（A•15）の関係式を利用する．同様に，式（9g）に $b_N(N+1-j,\ 0)$ を式（9h）に $b_N(0,j)$ を乗じ式（9b）に加えれば，また，式（9e）に $c_N(N+1-j,0)$ を式（9h）に $c_N(0,N+1-j)$ を乗じ式（9c）に加えれば，更に，式（9e）に $d_N(j,0)$ を式（9f）に $d_N(0,N+1-j)$ を乗じ式（9d）に加えれば式（10b），（10c）および（10d）が得られる．なお，式（10b）の導出には式（A•8），（A•11），（A•13），（A•16）および（A•17）を，式（10C）の導出には式（A•9），（A•14），（A•16）および（A•18）を，式（10d）の導出には式（A•10），（A•15），（A•17）および（A•18）を用いる．

以上より，式(9)は次式で示す前向きおよび後向き予測誤差で表わした関係式に書換えることができる．

$$\xi_1 k_{i,1}+\xi_2 k_{i,2}+\xi_3 k_{i,3}+\xi_4 k_{i,4}=0\ \ (i=2,3,4) \tag{10a}$$
$$\xi_2 k_{i,1}+\xi_5 k_{i,2}+\xi_6 k_{i,3}+\xi_7 k_{i,4}=0\ \ (i=1,3,4) \tag{10b}$$
$$\xi_3 k_{i,1}+\xi_6 k_{i,2}+\xi_8 k_{i,3}+\xi_9 k_{i,4}=0\ \ (i=1,2,4) \tag{10c}$$
$$\xi_4 k_{i,1}+\xi_7 k_{i,2}+\xi_9 k_{i,3}+\xi_{10} k_{i,4}=0\ \ (i=1,2,3) \tag{10d}$$

但し，

$$\xi_1=E[\{f_N(n,m)\}^2] \tag{10e}$$
$$\xi_2=E[f_N(n,m)r^1_N(n-1,m)] \tag{10f}$$
$$\xi_3=E[f_N(n,m)r^2_N(n-1,m-1)] \tag{10g}$$
$$\xi_4=E[f_N(n,m)r^3_N(n,m-1)] \tag{10h}$$
$$\xi_5=E[r^1_N(n-1,m)\}^2] \tag{10i}$$
$$\xi_6=E[r^1_N(n-1,m)r^2_N(n-1,m-1)] \tag{10j}$$
$$\xi_7=E[r^1_N(n-1,m)r^3_N(n,m-1)] \tag{10k}$$
$$\xi_8=E[r^2_N(n-1,m-1)\}^2] \tag{10l}$$
$$\xi_9=E[r^2_N(n-1,m-1)\ r^3_N(n,m-1)] \tag{10m}$$
$$\xi_{10}=E[r^3_N(n,m-1)\}^2] \tag{10n}$$

更に，付録2に示す式（A•23），（A•25），（A•28）および（A•29）の関係式より，ξに関して$\xi_1=\xi_8$，$\xi_5=\xi_{10}$，$\xi_2=\xi_9$および$\xi_4=\xi_6$の関係が成立することから，上式は1ステージ当り6種類の反射係数からなる次式の関係式に整理することができる．

$$\begin{bmatrix} k_{1,2} \\ k_{1,3} \\ k_{1,4} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \xi_5 & \xi_4 & \xi_7 \\ \xi_4 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_7 & \xi_2 & \xi_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,3} \\ k_{2,4} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_3 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_4 & \xi_2 & \xi_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_4 \\ \xi_7 \end{bmatrix} \tag{11b}$$

但し，

$$k_{1,2}=k_{3,4},\quad k_{1,3}=k_{3,1},\ k_{1,4}=k_{3,2} \tag{11c}$$
$$k_{2,1}=k_{4,3},\ k_{2,3}=k_{4,1},\ k_{2,4}=k_{4,2} \tag{11d}$$

このとき，次(11)を満たす反射係数行列 $\mathbf{k}_{N+1}$に対し，次式で示す係数に関する再帰式が成立する．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N+1}(0) & \mathbf{a}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{a}_{N+1}(N) & \mathbf{a}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{b}_{N+1}(0) & \mathbf{b}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{b}_{N+1}(N) & \mathbf{b}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{c}_{N+1}(0) & \mathbf{c}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{c}_{N+1}(N) & \mathbf{c}_{N+1}(N+1) \\ \mathbf{d}_{N+1}(0) & \mathbf{d}_{N+1}(1) & \cdots & \mathbf{d}_{N+1}(N) & \mathbf{d}_{N+1}(N+1) \end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{k}_{N+1}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_N(0),0 & \mathbf{a}_N(1),0 & \cdots & \mathbf{a}_N(N)\ ,0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_N(0),0 & \cdots & \mathbf{b}_N(N-1),0 & \mathbf{b}_N(N),0 \\ \mathbf{0} & 0,\mathbf{c}_N(0) & \cdots & 0,\mathbf{c}_N(N-1) & 0,\mathbf{c}_N(N) \\ 0,\mathbf{d}_N(0) & 0,\mathbf{d}_N(1) & \cdots & 0,\ \ \mathbf{d}_N(N) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{12}$$

また，上式に付録1で定義した $(N+2)^2$次元のベクトル $\mathbf{Y}_{N+1}$を右乗すると共に，式(1)および付録1の関係式を用いれば，式(12)は次式で示す前向きおよび後向き予測誤差に関する再帰式に書換えることができる．

$$\begin{bmatrix} f_{N+1}(n,m) \\ r^1_{N+1}(n,m) \\ r^2_{N+1}(n,m) \\ r^3_{N+1}(n,m) \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{N+1} \begin{bmatrix} f_N(n,m) \\ r^1_N(n-1,m) \\ r^2_N(n-1,m-1) \\ r^3_N(n,m-1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

なお，Parker らにより提案された2次元格子形フィルタは，反射係数行列 k_{N+1}の要素間において，$k_{1,2}=k_{2,1}$, $k_{1,3}=k_{2,4}$および $k_{1,4}=k_{2,3}$の関係があり，結果として，1ステージ当り3種類の反射係数により構成される．従って，同フィルタの利用では，この係数間における制約のために十分近似し得ない特性が存在することになる．一方，渡辺らにより提案された2次元格子形フィルタは，1ステージ当り6種類の反射係数により構成されているが，同関係式は $E[\{f_N(n,m)\}^2]=E[\{r^k_N(n-1,m)\}^2]$ が成立するときのみ保証される．しかしながら，2次元定常確率場においてこの条件は必ずしも成立しないことから，この2次元格子形フィルタの利用でも，十分近似し得ない特性が存在することになる．なお，本手法の有効性を検証するため，次式で示される2次の差分方程式を対象に2次元格子形フィルタを構築し，Parker らおよび渡辺らにより提案された2次元格子形フィルタとの比較検討を行う．

$$\begin{aligned} y(i,j) = {} & w(i,j)+0.40y(i,j-1)-0.18y(i,j-2) \\ & +0.52y(i-1,j)+0.16y(i-1,j-1) \\ & +0.10y(i-1,j-2) \\ & -0.20y(i-2,j)+0.11y(i-2,j-1) \\ & -0.10y(i-2,j-2) \end{aligned}$$

但し，$w(i,j)$は平均零で分散1の正規白色信号

また，構築したフィルタの特性を定量的に評価するため，次式で定義する特性評価量 PI を用いる．

$$PI = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{tr[(A^*-A)^T(A^*-A)}{tr[(A^{*T}A^*]} \right\}$$

但し，$A=[\mathbf{a}_N^T(0), \mathbf{a}_N^T(1), \cdots, \mathbf{a}_N^T(N)]^T$であり，また，$tr[\cdot]$は行列のトレース演算子を意味するなお，行列 A^*は対象システムの係数行列を，行列 A は3手法によりそれぞれ推定された係数行列を示す．Parker ら，渡辺らおよび本手法による PI を表1に示す．表1より，本格子形フィルタが，Parker らおよび渡辺らに比べ良好な推定結果が得られることが分かる．

表1　特性評価料 PI

	Parkerら	渡辺ら	本手法
PI	−14 [dB]	−22 [dB]	−31 [dB]

3.　2次元因果性 AR モデルによるスペクトル推定

いま，2次元定常不規則信号過程が図1のように表されるものとする．

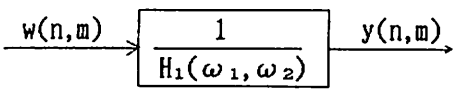


図1　不規則信号過程

このとき，不規則信号 $y(n,m)$の自己相関関数 $R(s,t)$と AR モデルのパラメータの間に次の関係が成立する．

$$R(s,t) = -\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{M-1} a_1(p,q)R(s-p,t-q)+\sigma_1^2\delta(s,t)$$

$$(p,q) \neq (0,0) \quad (0 \leqq s < N, 0 \leqq t < M)$$

$$(\sigma_1^2：白色信号の分散) \quad (14)$$

ここで，図1中の $1/H_1(\omega_1, \omega_2)$ は第1象限にのみインパルス応答が存在するモデル，すなわち，第一象限フィルタである．

$$H_1(z_1,z_2) = -\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{M-1} a_1(p,q)z_1^{-p}z_2^{-q} \quad (15)$$

但し，$a(0,0)=1$

いま，式(14)の方程式群を行列形式にまとめると，

$$\Phi_{NM}\mathbf{a}_1 = \mathbf{P}_1 \quad (16)$$

但し，

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = {} & [1, a_1(0,1), \cdots, a_1(0,M-1), a_1(1,0), \cdots, \\ & a_1(1,M-1), \cdots, a_1(N-1,0), \cdots, \\ & a_1(N-1,M-1)]^T \\ \mathbf{P}_1 = {} & [\sigma_1^2, 0, \cdots, 0]^T \end{aligned}$$

Φ_{NM}:$R(i,j)$ を要素とするブロックテプリッツ行列と表すことができ，式(16)より $\mathbf{a}_1=\Phi_{NM}^{-1}\mathbf{P}_1$により，

AR モデルパラメータが導出される．導出された AR モデルパラメータより，そのスペクトル $S_1(\omega_1, \omega_2)$ が以下のように定義される．

$$S_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_1^2}{|H_1(\omega_1, \omega_2)|^2} \tag{17}$$

図1では，不規則信号過程を第1象限 AR モデルと仮定していたが，第4象限 AR モデルと仮定すれば，

$$\Phi_{NM}\mathbf{a}_4 = \mathbf{P}_4$$

但し，

$$\mathbf{a}_4 = [a_4(0, M-1), \cdots, a_4(0, 1), 1, a_4(1, M-1), \cdots, a_4(1, 0), \cdots, a_4(N-1, M-1), \cdots, a_4(N-1, 0)]^T$$

$$\mathbf{P}_4 = [0, \cdots, 0, \sigma_4^2, 0, \cdots, 0]^T$$

なる方程式が得られ $\mathbf{a}_4 = \Phi_{NM}^{-1}\mathbf{P}_4$ よりパラメータが得られる．一般に，第 i 象限フィルタを $1/H_i(\omega_1, \omega_2)$，また，そのパワースペクトルを $S_i(\omega_1, \omega_2)$ とすれば，$S_1(\omega_1, \omega_2) = S_3(\omega_1, \omega_2)$ および $S_2(\omega_1, \omega_2) = S_4(\omega_1, \omega_2)$ の関係は成立するものの $S_1(\omega_1, \omega_2) \neq S_4(\omega_1, \omega_2)$ の関係が存在する．従って，2次元スペクトル解析をより正確に因果性ARモデルで行なう方法としては，推定スペクトル $S(\omega_1, \omega_2)$ を二つの因果性モデルによるパワースペクトルの調和平均をとる手法が提案されている．

$$\frac{1}{S(\omega_1, \omega_2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{S_1(\omega_1, \omega_2)} + \frac{1}{S_4(\omega_1, \omega_2)}\right] \tag{19}$$

上記の因果性 AR モデルによるスペクトル解析手法を基盤に，渡辺らは格子形フィルタによるスペクトル解析の一手法を提案している[4]．まず，求めるべき第1象限 AR モデル $G_1(z_1, z_2)$ および第4象限 AR モデル $G_4(z_1, z_2)$ をそれぞれ次式のように定義する．

$$G_1(z_1, z_2) = \frac{1}{A_N(z_1, z_2)} \tag{20a}$$

$$G_4(z_1, z_2) = \frac{1}{D_N(z_1, z_2)} \tag{20b}$$

但し，$A_N(z_1, z_2)$ および $D_N(z_1, z_2)$ は前向きおよび後向き予測誤差の予測誤差伝達関数で次式で定義される．

$$A_N(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{a}_N(i)\mathbf{z}_i \tag{21a}$$

$$D_N(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{d}_N(i)\mathbf{z}_i \tag{21b}$$

但し，$\mathbf{a}_N(i) = [a_N(i, 0), \cdots, a_N(i, N)]$

$\mathbf{d}_N(i) = [d_N(i, N), \cdots, d_N(i, 0)]$

$\mathbf{z}_i = z_1^{-i}(1, z_2^{-1}, \cdots, z_2^{-M-1})$

なお，予測係数 $a_N(i)$ および $d_N(i)$ は先の2次元格子形フィルタより導出され，$G_1(z_1, z_2)$ および $G_4(z_1, z_2)$ は式(20)および(21)より得られる．それ故，推定すべきスペクトル $S_R(\omega_1, \omega_2)$ は先の調和平均手法に基づき次式のように定義される．

$$\frac{1}{S_R(\omega_1, \omega_2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2|G_1(\omega_1, \omega_2)|^2} + \frac{1}{\sigma_4^2|G_4(\omega_1, \omega_2)|^2}\right] \tag{22}$$

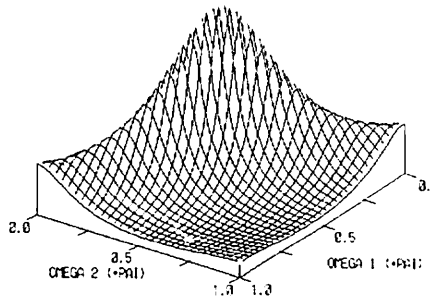
但し，σ_1^2 および σ_4^2 はそれぞれ第1象限および第4象限予測誤差フィルタの分散

以上の結果を踏まえ，次の不規則信号 $y(i, j)$ のスペクトル推定を行う．

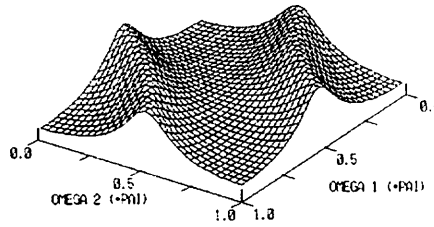
$$y(i, j) = \cos(0.3\pi i + 0.7\pi j) + \cos(0.7\pi i + 0.3\pi j) + u(i, j) \tag{23}$$

$u(i, j)$：平均0，分散1の正規白色雑音

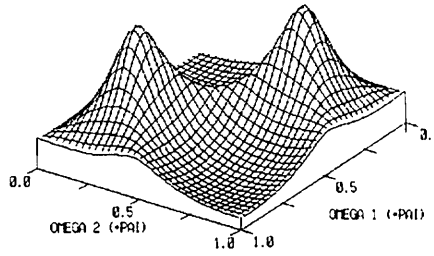
図2 (a)には2次元格子形フィルタの段数を2段に設定した際の，第1象限格子形フィルタによるスペクトル推定結果を示し，また，図2 (b)には第4象限格子形フィルタによるスペクトル推定結果を示した．更に，図2 (c)に，第1象限および第4象限格子形フィルタによるパワースペクトルのに調和平均をとったスペクトル推定結果を示している．なお，参考のため図3には式(23)より得られる結果を示している．図2および図3より明らかなように，第1象限および第4象限格子形フィルタのみでは完全なスペクトル推定がなされないが，その調和平均をとることにより正確な推定が行われていることがわかる．



（a）第1象限格子形フィルタによるスペクトル推定



（b）第4象限格子形フィルタによるスペクトル推定



（c）調和平均によるスペクトル推定

図2　格子形フィルタによるスペクトル推定結果

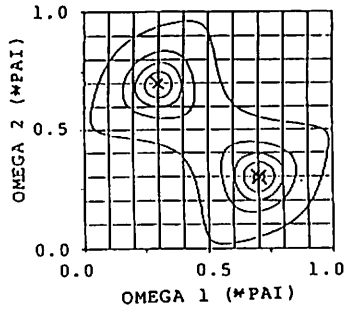


図3　真のスペクトル

5. むすび

本論文では，正規方程式の逐次解法であるレビンソン・ダービン算法を2次元に拡張し，2次元格子形フィルタを構築した．また，本手法の有効性をParkerらおよび渡辺らの2次元格子形フィルタにより得られる前向き予測誤差フィルタの伝達関数および特性評価量との比較により行なった．なお，本手法の特徴は，予測誤差として一つの前向き予測誤差と三つの後向き予測誤差を用いて逐次式を構築することから，有限次数のマスクに対しても安定な逐次解法が得られることにある．また，本予測器の一応用例としてスペクトル推定をとりあげ，良好な推定が行えることを確認した．

文　献

(1) T. L. Marzetta: "Two-dimensional linear prediction: autocorrelation arrays, minimum-phase prediction error filters, and reflection coefficient arrays", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP−28, 6, pp. 725−733 (Dec. 1980).

(2) S. Ranganath and A. K. Jain: "Two-dimensional linear prediction models-part 1: spectral factorization and realization", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP−33, 1, pp. 280−299 (Feb. 1985).

(3) S. R. Parker and A. H. Kayran: "Lattice parameter autoregressive modelingof two-dimensional fields-part 1: the quarter-plane case", IEEE Trans, Acoust., Speech & Signal Process., ASSP 32, 4, pp. 872−885 (Aug. 1984).

(4) 渡辺　努，田口　亮，浜田　望："改良された2次元AR格子形フィルタに関する考察とスペクトル解析への応用"，信学論（A），J72−A，3，pp. 475−484（1989−03）．

(5) 須田信英，中溝高好："コンピュートロール23"，コロナ社（1988−07）．

付　録

1.　式(10)の導出

式(1)で示す $(N+1)$ 次元のベクトル $a_N(i)$ および $y(i)$ を要素とする $(N+2)^2$ 次元のベクトル $\tilde{a}$ および Y_{N+1} をそれぞれ次式のように定義する．

$$\tilde{a}=[a_N(0),0 \vdots a_N(1),0 \vdots \cdots \vdots a_n(N),0 \vdots 0] \tag{A•1}$$

$$Y^T_{N+1}=[Y^T(0),y(n,m-N-1) \vdots y^T(1),\ y(n-1,-N-1) \vdots \cdots \vdots\ y^T(N),y(n-N,m-N-1) \vdots y^T(N+1),y(n-N,m-N-1)] \tag{A•2}$$

このとき，上記のベクトル $\tilde{a}$ および Y_{N+1} の積 $\tilde{a}Y_{N+1}$ が式 (1a) より

$$\tilde{a}Y_{N+1}=f_N(n,m) \tag{A•3}$$

となることから，次式の関係式が得られる．

$$\tilde{a}R_{N+1}\tilde{a}^T=\tilde{a}E[Y_{N+1}Y^T_{N+1}]\ \tilde{a}^T =E[\{f_N(n,\ m)\}^2]\ =\tilde{J}^0_N \tag{A•4}$$

同様に，$b_N(i)$，$c_N(i)$ および $d_N(i)$ を要素とする $(N+2)^2$ 次元のベクトル $\tilde{b}$，$\tilde{c}$ および $\tilde{d}$ をそれぞれ

$$\tilde{b}=[\ \ 0\ \ \vdots b_N(0),0 \vdots b_N(N-1),0 \vdots b_N(N),0] \tag{A•5}$$

$$\tilde{c}=[\ \ 0\ \ \vdots 0,c_N(0) \vdots 0,c_N(N-1) \vdots 0,c_N(N)] \tag{A•6}$$

$$\tilde{d}=[0,d_N(0) \vdots 0,d_N(1) \vdots 0,d_N(N)\ \ \vdots\ \ 0\ \ ] \tag{A•7}$$

と定義することにより，次式の関係式が得られる．

$$\tilde{b}R_{N+1}\tilde{b}^T=E[\{r^1_N(n-1,m)\}^2]\ =\tilde{J}^1_N \tag{A•8}$$

$$\tilde{c}R_{N+1}\tilde{c}^T=E[\{r^2_N(n-1,m-1)\}^2]\ =\tilde{J}^2_N \tag{A•9}$$

$$\tilde{d}R_{N+1}\tilde{d}^T=E[\{r^3_N(n,m-1)\}^2]\ =\tilde{J}^3_N \tag{A•10}$$

一方，式 (7a) および (A•5) の関係式を，また，式 (7a) および (A•1) の関係式を用いることにより $\tilde{a}R_{N+1}\tilde{b}^T$ は

$$(\tilde{a}R_{N+1})\tilde{b}^T=\sum_{t=0}^{N} b_N(0,t)\Delta^a_{N+1,t} \tag{A•11}$$

$$\tilde{a}(R_{N+1}\tilde{b}^T)=\sum_{t=0}^{N} a_N(0,t)\Delta^b_{0,1} \tag{A•12}$$

となるが，予測誤差を用いて表現すれば次式となる．

$$\tilde{a}R_{N+1}\tilde{b}^T=\tilde{a}E[YY^T]\tilde{b}^T =E[f_N(n,m)r^1_N(n-1,m)] \tag{A•13}$$

同様な操作により，$\tilde{a}R_{N+1}\tilde{c}^T$，$\tilde{a}R_{N+1}\tilde{d}^T$，$\tilde{b}R_{N+1}\tilde{c}^T$，$\tilde{b}R_{N+1}\tilde{d}^T$ および $\tilde{c}R_{N+1}\tilde{d}^T$ はそれぞれ以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{a}R_{N+1})\tilde{c}^T&=\sum_{s=0}^{N-1} c_N(N-s,0)\Delta^a_{s+1,N+1} + \sum_{t=0}^{N} c_N(0,N-t)\Delta^a_{N+1,t+1}\\
\tilde{a}(R_{N+1})\tilde{c}^T&=\sum_{s=1}^{N} a_N(s,0)\Delta^c_{s,0} + \sum_{t=0}^{N} a_N(0,t)\Delta^c_{0,t}\\
\tilde{a}R_{N+1}\tilde{c}^T&=E[f_N(n,m)r^2_N(n-1,m-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{A•14}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{a}R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{s=0}^{N} d_N(s,0)\Delta^a_{s,N+1}\\
(\tilde{a}R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{s=0}^{N} a_N(s,0)\Delta^d_{s,0}\\
\tilde{a}R_{N+1}\tilde{d}^T&=E[f_N(n,m)r^3_N(n,m-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{A•15}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{b}R_{N+1})\tilde{c}^T&=\sum_{s=0}^{N} c_N(N-s,0)\Delta^b_{s+1,N+1}\\
(\tilde{b}R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{s=0}^{N} b_N(N-s,0)\Delta^c_{s+1,0}\\
\tilde{b}R_{N+1}\tilde{c}^T&=E[r^1_N(n-1,m)r^2_N(n-1,m-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{A•16}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{b}R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{s=1}^{N} d_N(s,0)\Delta^b_{s,N+1} + \sum_{t=0}^{N} d_N(0,N-t)\Delta^b_{0,t+1}\\
\tilde{b}(R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{s=0}^{N-1} b_N(N-s,0)\Delta^d_{s+1,0} + \sum_{t=0}^{N} b_N(0,t)\Delta^d_{N+1,t}\\
\tilde{b}R_{N+1}\tilde{d}^T&=E[r^1_N(n-1,m)r^3_N(n,m-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{A•17}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{c}R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{t=0}^{N} d_N(0,N-t)\Delta^c_{0,t+1}\\
\tilde{c}(R_{N+1})\tilde{d}^T&=\sum_{t=0}^{N} c_N(0,N-t)\Delta^d_{N+1,t+1}\\
\tilde{c}R_{N+1}\tilde{d}^T&=E[r^2_N(n-1,m-1)r^3_N(n,m-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{A•18}$$

2.　式(11)の導出

式 (3a) の第1式および $(N+1)^2\times(N+1)^2$ 次元からなる exchange 行列を[5]，式 (3a) の第3式に右乗

した関係式を以下に示す．

$$[a_N(0) \vdots a_N(1) \vdots \cdots \vdots a_N(N-1) \vdots a_N(N)]R_N = [\hat{J}^0_N, 0, \cdots, 0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0 \vdots 0] \quad (A\cdot19)$$

$$[c_N(0) \vdots c_N(1) \vdots \cdots \vdots c_N(N-1) \vdots c_N(N)]EER_NEE = [\bar{c}_N(N) \vdots \bar{c}_N(N-1) \vdots \cdots \vdots \bar{c}_N(1) \vdots \bar{c}_N(0)]R_N = [\hat{J}^2_N, 0, \cdots, 0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0 \vdots 0] \quad (A\cdot20)$$

但し，

$$EE = I, R_NE = R_N \quad (A\cdot21)$$

なお，$\bar{c}_N(i)$は $c_N(i)$ の順序を反転させたベクトルを表わし，I は $(N+1)^2\times(N+1)^2$次元の単位行列を表わす．このとき，上記の関係式および式 (1e)，(1g)，(A•4) および (A•9) より以下の関係式が得られる．

$$a_N(i,j) = c_N(i,j) \quad (A\cdot22)$$

$$E[\{f_N(n,m)\}^2] = E[\{r^2_N(n-1,m-1)\}^2] \quad (A\cdot23)$$

同様に，式 (3a) の第2式および式 (3a) の第4式に E を右乗した関係式と式 (1f)，(1h)，(A•8) および (A•10) より以下の関係式が得られる．

$$b_N(i,j) = d_N(i,j) \quad (A\cdot24)$$

$$E[\{r^1_N(n-1,m)\}^2] = E[\{r^3_N(n,m-1)\}^2] \quad (A\cdot25)$$

一方，式 (A•11)，(A•13) および (7b) より

$$E[f_N(n,m)r^1_N(n-1,m)] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{t=0}^{N} b_N(0,t)a_N(i,j)R(N+1-i,t-j) \quad (A\cdot26)$$

また，式 (A•18) の第1，3式および式 (7d) より

$$E[r^2_N(n-1,m-1)r^3_N(n,m-1)] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{t=0}^{N} d_N(0,t)c_N(i,j)R(N+1-i,t-j) \quad (A\cdot27)$$

となるが，式 (A•22) および (A•24) より次式が得られる．

$$E[f_N(n,m)r^1_N(n-1,m)] = E[r^2_N(n-1,m-1)\ r^3_N(n,m-1)] \quad (A\cdot28)$$

同様に，式 (A•15) の第2，3式および式 (7e) より，また，式 (A•16) の第1，3式および式 (7c) より次式が得られる．

$$E[f_N(n,m)r^3_N(n,m-1)] = E[r^1_N(n-1,m)\ r^2_N(n-1,m-1)] \quad (A\cdot29)$$