リヤプノフ法によるリラクタンスモータの乱調現象の解析

リヤプノフ法によるリラクタンスモータの乱調現象の解析

上 里 勝 實*　千 住 智 信*　宮 城　亮**　友 利 好 克***

Analysis of Hunting Phenomena of Reluctance Motors by Lyapunov Method.

Katsumi UEZATO*　Tomonobu SENJYU*
Ryo MIYAGI**　Yoshikatsu TOMORI***

Abstract

Reluctance Motors sometimes occur hunting phenomena due to machine parameters or drive conditions, therefore high quality speed control is difficult.

The hunting tends to occur in small size machines which have large armature resistance, and direct and quadrature axis reactance ratio which is important parameter to determine output of reluctance motors has large effects to stabilize the reluctance motors.

Therefore, quantitative analysis upon hunting for machine parameters and drive conditions are very important knowledge to design and control of reluctance motors.

In this paper, effects of machine parameters, drive conditions and regions to occur the hunting oscillation are analized quantitatively by using Lyapunov Method which is useful for stability analysis of nonlinear systemes.

Key Words : Reluctance Motor, Hunting Phenomena, Lyapunov Method.

1．まえがき

リラクタンスモータは同期電動機の一種で，同期速度で運転が可能であり，ブラシレスのため構造が簡単で堅牢な特徴を有する．そのため，近年小形の高速可変速駆動電動機として注目されている．しかし，機器パラメータや駆動条件により乱調が発生し，高精度の速度制御が困難になる場合がある．このような乱調現象は，比較的電機子抵抗の大きい小形機に発生しやすく，またリラクタンスモータの出力を決定する重要なパラメータである直軸・横軸リアクタンス比は，安定性に大きな影響を与えることが知られている．従って，機器パラメータ及び駆動条件の乱調に及ぼす影響を定量的に把握することは，リラクタンスモータの設計ならびに制御に関して有用な情報を与える．

従来リラクタンスモータの安定性解析は，動作点近

受付：1992年5月11日
*工学部電気工学科
Dept. of Electrical Engineering, Fac. of Eng.
**沖縄県庁
Prefectural office of Okinawa
***大学院工学研究科電気・情報工学専攻
Graduate Student, Electrical and Information Engineering

傍で線形化したシステムの状態方程式に対して，安定判別を行う手法が一般的に用いられている[1]．しかし，このような手法では動作点の安定性解析しか行えず，リラクタンスモータのような非線形システムの安定・不安定領域は，システム方程式の解軌道から間接的に求めなければならず，膨大な計算を必要とした．一方，Hoft 氏は，非線形システムの安定性解析に有効なリヤプノフ法を用いて，リラクタンスモータの安定性解析を試みているが，リヤプノフ関数の構成が困難であることから，その手法を直接適用するまでには至っていない[2]．

リヤプノフ法は，エネルギー関数をより一般化したリヤプノフ関数を用いて安定判定を行う解析法であり，特に非線形システムにおいては，有限な安定・不安定領域を直接求めることができる[3]．しかし，リヤプノフ関数を構成する一般的な方法はなく，特にリラクタンスモータのような高次の非線形システムに対するリヤプノフ関数の構成は困難である．従って，本論文では，先ず調波平衡法[4]を用いてリラクタンスモータのシステム方程式を2階の非線形微分方程式で近似し，その式により求められるシステム方程式に対しリヤプノフ関数を構成する．

調波平衡法は微分方程式の解が周期関数の和で表わされることに基づき，方程式を解く手法であり，非線形微分方程式の近似解を求めることが出来る．この手法を用いて，漏れ磁束を無視した同期電動機の方程式を導出した報告[5][6]は，島谷氏らによって既になされており，また筆者らはこの手法をリラクタンスモータの方程式の導出に適用し，乱調解析において良好な結果を得ている[7][8]．電動機モデルの導出において，このように漏れ磁束を無視する理由は，主磁束に対して漏れ磁束の割合が比較的に小さいこと，及び漏れ磁束を考慮することによって調波解析が非常に複雑になってしまうためであり，特に後者の理由によって，これまで漏れ磁束を考慮した電動機の低次元非線形モデルは報告されていない．

しかし，リラクタンスモータのような小形機では，漏れ磁束の割合が比較的大きく，またリラクタンスモータの利用分野である高速駆動領域において漏れ磁束の影響が大きくなるため，本論文ではリラクタンスモータの方程式として新たに漏れ磁束を考慮した式を導出する．

そして，この方程式に対してリヤプノフ法を適用し，機器パラメータ及び駆動条件の乱調に及ぼす影響（安定判別）や，乱調振動の大きさ（不安定領域）を解析する．

2．安定性解析のための諸式

本章ではリラクタンスモータのトルク式の導出に調波平衡法を適用することにより，システムを2階の微分方程式で表し，次にこの方程式より得られるシステム方程式に対してリヤプノフ関数を構成する．

2．1　リラクタンスモータの方程式

図1のような二相2極機で表されるリラクタンスモータを考える．固定子は電機子巻線Ⅰ及びⅡを持ち，回転子は直軸方向制動巻線D及び横軸方向制動巻線Qを持つとする．

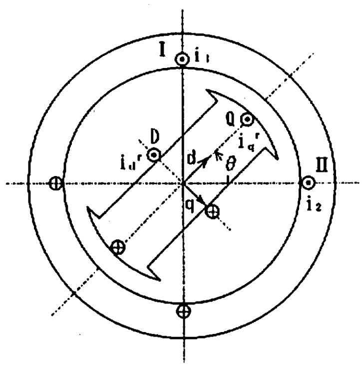

図1　二相2極リラクタンスモータ

Fig. 1. Two-phase two-pole reluctance motor.

ここで，解析において以下の仮定を設ける．

(1)　磁束は空げきにおいて正弦波状に分布する．

(2)　磁気回路の飽和及び履歴を無視する．

図1の二相2極機で表されるリラクタンスモータの供給電圧（瞬時値）を e_1, e_2 とすれば，電機子回路において次の電圧方程式が成立する．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} + ri_1 + e_1 = 0\\ \frac{d\lambda_2}{dt} + ri_2 + e_2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

上式の鎖交磁束 λ_1，λ_2，電圧 e_1, e_2 および電流 i_1，

i_2を，次式の変換式を用いて回転子と 同期速度で回転するd－q座標軸上に変換すると，

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

ただし，θ：回転子位置角

(1) 式は次式となる.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt}+\lambda_q\frac{d\theta}{dt}+ri_d=-e_d \\ \frac{d\lambda_q}{dt}-\lambda_d\frac{d\theta}{dt}+ri_q=-e_q \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

同様に回転子回路においては，次の電圧方程式が成立する.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_d^r}{dt}+R_d i_d^r=0 \\ \frac{d\lambda_q^r}{dt}+R_q i_q^r=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

また，(3)，(4) 式における鎖交磁束はインダクタンスと電流を用いて次式の関係で表わされる.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_d &= \ell_d i_d + M_d i_d^r \\ \lambda_q &= \ell_q i_q + M_q i_q^r \\ \lambda_d^r &= M_d i_d + L_d i_d^r \\ \lambda_q^r &= M_q i_q + L_q i_q^r \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ただし，

$$M_d=\sqrt{(\ell_d-\ell_s)(L_d-\ell_{sd}^r)}$$
$$M_q=\sqrt{(\ell_q-\ell_s)(L_q-\ell_{sq}^r)}$$

以上の式において，e：供給電圧，i：電流，λ：鎖交磁束，ℓ：電機子側自己インダクタンス，L：回転子側自己インダクタンス，M：相互インダクタンスである．また，添え字"$_d$"は直軸方向，"$_q$"は横軸方向を示し，添え字"$_r$"は回転子側の諸量を意味する．

供給電圧は正弦波状を仮定しているので，d－q変換を行うと以下のようになる.

$$e_d=-E\sin\delta,\ e_q=E\cos\delta \tag{6}$$

ただし，$\delta=\theta-\omega t$：負荷角

発生する電磁トルクは，次式で表せる.

$$T=P\,(\lambda_d i_q-\lambda_q i_d) \tag{7}$$

ただし，P：極対数

上式を用いて電動機の機械系の運動方程式を表現すると次式となる.

$$\frac{J}{P}\frac{d^2\theta}{dt^2}+T=T_L \tag{8}$$

ただし，J：慣性モーメント，
　　　T_L：負荷トルク

リラクタンスモータの基本式は(3)〜(8) 式により次式に示す6次元の連立非線形微分方程式として表される.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\delta} &= S \\ \dot{S} &= \frac{P}{\omega^2 J}\,[T_L-T] \\ \dot{i}_d &= \frac{\omega L_d}{u}\{E\sin\delta-\omega\,(\ell_q i_q+M_q i_q^r) \\ &\quad \times(1+S)-ri_d\}+\frac{\omega M_d}{u}R_d i_d^r \\ \dot{i}_q &= \frac{\omega L_q}{v}\{-E\cos\delta+\omega\,(\ell_d i_d+M_d i_d^r) \\ &\quad \times(1+S)-ri_q\}+\frac{\omega M_q}{v}R_q i_q^r \\ \dot{i}_d^r &= \frac{\omega M_d}{u}\{-E\sin\delta+\omega\,(\ell_q i_q+M_q i_q^r) \\ &\quad \times(1+S)+ri_d\}-\frac{\omega\,\ell_d}{u}R_d i_d^r \\ \dot{i}_q^r &= \frac{\omega M_q}{v}\{E\cos\delta-\omega\,(\ell_d i_d+M_d i_d^r) \\ &\quad \times(1+S)+ri_q\}-\frac{\omega\,\ell_q}{v}R_q i_q^r \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2．2　調波平衡法によるトルク式の導出

本論文では，各巻線の電流を負荷角に対する周期解と仮定して調波平衡法を適用することにより，リラクタンスモータのトルク式を負荷角の関数として表現し，

その結果を基にリラクタンスモータの方程式を2階の非線形微分方程式で表す.

電機子及び回転子電流の解が次式のような負荷角に対する周期解の和で表されると仮定する.

$$\left.\begin{aligned} i_d &= Fo + Fs\ \sin\delta + Fc\ \cos\delta \\ i_q &= Go + Gs\ \sin\delta + Gc\ \cos\delta \\ i_d^r &= Ho + Hs\ \sin\delta + Hc\ \cos\delta \\ i_q^r &= Io + Is\ \sin\delta + Ic\ \cos\delta \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10)式を(9)式で表されるリラクタンスモータの基本式に適用すると，その両辺は周期関数の和で表わされる．ここで，各周期関数の係数が両辺で等しいことから，電流の調波成分Fo，Fs，Fc，…，Ic は以下のように求めることが出来る．

係数の直流成分は，

$$Fo = Go = Ho = Io = 0 \tag{11}$$

交流成分Fs，Fc，…，Ic では,次式のような行列の関係式が成り立つ．

$$V = Z \times I \tag{12}$$

ここで，

$$V^T = \left[0 \ -\frac{\omega L_d}{u} E \ \ \frac{\omega L_q}{v} E \ \ 0 \ \ 0 \ \ \frac{\omega M_d}{u} E \ -\frac{\omega M_q}{v} E \ \ 0 \right]$$

$$I^T = [Fs\ Fc\ Gs\ Gc\ Hs\ Hc\ Is\ Ic]$$

Zは次のような8行8列の行列となる．

$$\begin{pmatrix}
-S & \frac{-\omega L_d r}{u} & 0 & \frac{-\omega^2 L_d \ell_q (1+S)}{u} & 0 & \frac{\omega M_d R_d}{u} & 0 & \frac{-\omega^2 L_d M_q (1+S)}{u} \\
\frac{-\omega L_d r}{u} & S & \frac{-\omega^2 L_d \ell_q (1+S)}{u} & 0 & \frac{\omega M_d R_d}{u} & 0 & \frac{-\omega^2 L_d M_q (1+S)}{u} & 0 \\
0 & \frac{\omega^2 L_q \ell_d (1+S)}{v} & -S & \frac{-\omega L_q r}{v} & 0 & \frac{\omega^2 L_q M_d (1+S)}{v} & 0 & \frac{\omega M_q R_q}{v} \\
\frac{\omega^2 L_q \ell_d (1+S)}{v} & 0 & \frac{-\omega L_q r}{v} & S & \frac{\omega^2 L_q M_d (1+S)}{v} & 0 & \frac{\omega M_q R_q}{v} & 0 \\
0 & \frac{\omega M_d r}{u} & 0 & \frac{\omega^2 M_d \ell_q (1+S)}{u} & -S & \frac{-\omega \ell_d R_d}{u} & 0 & \frac{\omega^2 M_d M_q (1+S)}{u} \\
\frac{\omega M_d r}{u} & 0 & \frac{\omega^2 M_d \ell_q (1+S)}{u} & 0 & \frac{-\omega \ell_d R_d}{u} & S & \frac{\omega^2 M_d M_q (1+S)}{u} & 0 \\
0 & \frac{-\omega^2 M_q \ell_d (1+S)}{v} & 0 & \frac{\omega M_q r}{v} & 0 & \frac{-\omega^2 M_d M_q (1+S)}{v} & -S & \frac{-\omega \ell_q R_q}{v} \\
\frac{-\omega^2 M_q \ell_d (1+S)}{v} & 0 & \frac{\omega M_q r}{v} & 0 & \frac{-\omega^2 M_d M_q (1+S)}{v} & 0 & \frac{-\omega \ell_q R_q}{v} & S
\end{pmatrix} \tag{13}$$

Fs，Fc，…，Icは，Zの逆行列を用いて次式のように求めることができる．

$$I = Z^{-1} \times V \tag{14}$$

行列Zは8×8の行列であり，その逆行列を導出するためには非常に膨大な計算を要する．そこで本論文では，ブロック行列についての公式(matrix inversion lemma)[11] を用いて逆行列の計算を行なう．なお，乱調発生時の回転子の動揺は緩慢であるので，以下の計算において滑りSの2乗以上およびdS／dτを含む項は無視する．

先ず行列Zを次のようなブロック行列で表す．

$$Z = \begin{bmatrix} Za & Zb \\ Zc & Zd \end{bmatrix}$$

ここでZa（4×4），Zb（4×4），Zc（4×4），Zd（4×4）である．

このとき，逆行列Z^{-1}は次式となる．

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} Za^{-1} + Za^{-1}\,Zb\,Zs\,Zc\,Za^{-1}, & -Za^{-1}\,Zb\,Zs^{-1} \\ -Zs^{-1}\,Zc\,Za^{-1} & Zs^{-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

ただし，$Zs = Zd - Zc\ Za^{-1}\ Zb$,

$$|Za| \neq 0, \quad |Zs| \neq 0$$

上式を(14)式に適用することによりFs，Fc，…，Icが求められる．なお，これらの係数Fs，…，Icは付録Iに示す．また，以上で求めた電流の調波成分を(5)式および(7)式に適用すると，発生する電磁トルクは次式のように発生トルク及び制動トルクに分離して表すことができる．

$$T = f(\delta) + g(\delta)\frac{d\delta}{d\tau} \tag{16}$$

ただし，$\tau = \omega t$：正規化時間

(16)式を(8)式の機械系の運動方程式に代入し正規化するとリラクタンスモータの運動方程式は次式の2階の非線形微分方程式で表せる．

$$\frac{\omega^2 J}{P}\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + g(\delta)\frac{d\delta}{d\tau} + f(\delta) = T_L \tag{17}$$

ただし，

$$f(\delta) = a_{ss}\sin^2\delta + a_{sc}\sin\delta\ \cos\delta + a_{cc}\cos^2\delta,$$

$$g(\delta) = b_{ss}\sin^2\delta + b_{sc}\sin\delta\ \cos\delta + b_{cc}\cos^2\delta$$

上式が漏れ磁束を考慮したリラクタンスモータの方程式であり，漏れ磁束の影響は各調波成分の係数a_{ss}，a_{sc}，…，b_{cc}に現れる．なお，これらの係数は付録Iに示す．

図2は，(17)式におけるf(δ)及びg(δ)の負荷角に対する変化を示している．f(δ)，g(δ)ともに負荷角δの変化に対して正弦波状に大きく変化していることから，リラクタンスモータは非線形性の非常に強いシステムであることがわかる．

図3は，(9)式および(17)式より導出したリミットサイクルの解軌道を負荷角，位相面上に描いたものである．点線が(9)式によるもの，実線が(17)式による解軌道をそれぞれ示している．(17)式は調波平衡法により(9)式を2階の微分方程式に近似した式であるが，同図より二つの解軌道はほぼ一致しており，調波平衡法による近似は有効であるといえる．

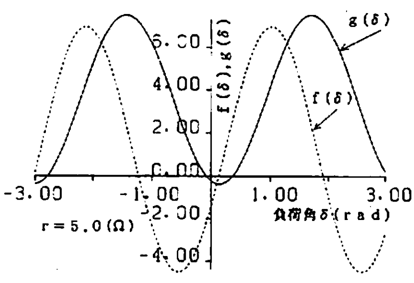

図2　発生トルクf(δ)，制動係数g(δ)
Fig. 2. Synchronizing torque f(δ), damping coefficient g(δ).

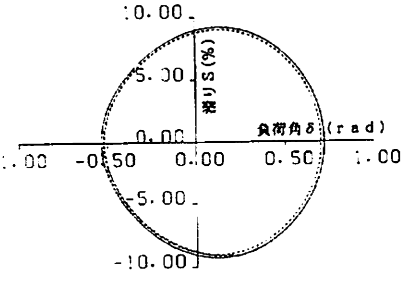

図3　(9)及び(17)式の解軌道
Fig. 3. Trajectory for Eq.(9) and (17).

2．3　乱調発生条件の導出

本論文では，非線形系の安定性解析に有用なリヤプノフ法により，(17)式の非線形微分方程式で表されるリラクタンスモータの安定性解析を行う．そのために，(17)式より得られるシステム方程式に対してリヤプノフ関数を構成しなければならない．

ここでは真の領域を比較的よく保証できる文献(3)のラグランジュ・シャルピ法を用いて，リヤプノフ関数の構成を行い，このリヤプノフ関数を基に乱調発生条件を導出する．

(17)式を状態変数 X_1，X_2 を用いて書き換えると次式のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}\dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -k(X_1)X_2 - h(X_1)\end{array}\right\} \tag{18}$$

ただし，$\delta o = \delta - X_1$：安定平衡点，

$X_2 = dX_1/d\tau$

$$k(X_1) = \frac{P}{\omega^2 J}\,g(X_1),$$

$$h(X_1) = \frac{P}{\omega^2 J}\,[f(X_1) - T_L]$$

(18)式に対するリヤプノフ関数をラグランジュ・シャルピ法を用いて構成すると次式のリヤプノフ関数が得られる．

$$V = \frac{1}{2}(X_2 + K(X_1))^2 + \int_0^{X_1} h(X_1)\,dX_1 \tag{19}$$

この場合，リヤプノフ関数の時間導関数 $\dot{V}$ は次式のようになる．

$$\dot{V} = \frac{dV}{d\tau} = -K(X_1)\,h(X_1) \tag{20}$$

原点（安定平衡点）近傍では(19)式のリヤプノフ関数は正定値であるので，リヤプノフの不安定定理より，システムが不安定（乱調発生）である条件は $\dot{V}$ が正となる場合である．電動機が同期はずれを起こさないなどの動作条件を考慮すると，原点近傍における $\dot{V}$ の正負は $K(X_1)$ の値に依存しており，システムの安定平衡点における制動係数 $g(\delta_o)$ により決定され，最終的な乱調発生条件は次のようになる．

$$g(\delta_o) < 0 \tag{21}$$

$g(\delta_o)$：安定平衡点における制動係数

この結果，システムを線形化する手法により得られた乱調の発生する領域（不安定領域）は，システムの不安定限界におけるリヤプノフ関数の値 V_{max} と(19)式より求めることができる．

3．乱調振動現象の解析

リヤプノフ法により求めた不安定領域を用いて乱調振動現象を説明する．図4は，(17)式の非線形微分方程式を解いて求めた解軌道，及びリヤプノフ法によって求めた安定・不安定領域を負荷角，滑りの位相面上で示している．同図において実線で示す領域の内側が，(19)式のリヤプノフ関数により求めたシステムの安定領域であり，同様に点線で示す領域の内側が不安定領域である．安定領域を初期値とする解軌道（①）は，システムが安定であるため安定平衡点へ収束しようとする．しかし安定平衡点は不安定領域内に存在すめため，解軌道は安定平衡点に収束できず，最終的には不安定領域の外側に存在するリミットサイクルに収束する．不安定領域を初期値とする解軌道（②）は，システムが不安定であるため発散していき，同様に不安定領域外のリミットサイクルに収束する．このような解軌道の振舞が乱調振動現象として観測される．

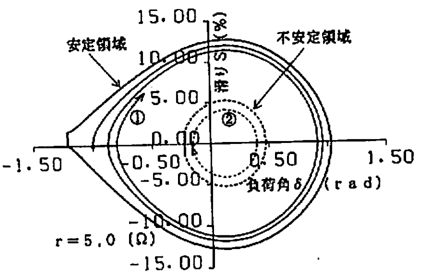

図4　乱調現象の説明

Fig. 4. Explanation of hunting on phase plane.

3．1　機器パラメータの乱調に及ぼす影響

以上に述べたように，リヤプノフ法を安定性解析に用いると動作点における安定・不安定の判別のみならず，不安定領域から乱調振動の大きさを直接知ることが出来る．すなわち安定性の解析は，乱調の発生条件 $g(\delta_o) < 0$ と乱調を発生する不安定領域により行うことができる．

なお，解析にあたり，特に断わりの無い限り機器定数は表１の値を用いる．

表１　機器定数

Table 1. Machine constants.

三相，４極，定格電圧220（V），
$r=1.62$（Ω），$\omega=377$（S^{-1}），
$X_d=39.0$（Ω），$X_q=14.0$（Ω），
$R_d=30.0$（Ω），$R_q=100.0$（Ω），
$\omega L_d=40.8$（Ω），$\omega L_q=14.3$（Ω），
$\omega \ell_s=0.0$（Ω），$\omega \ell'_{sd}=0.0$（Ω），
$\omega \ell'_{sq}=0.0$（Ω），
$J=0.00627$（NmS^2）
$T_L=-0.0$（Nm）

電機子抵抗は，従来から乱調振動の大きな要因として知られており，古くは，Nickle 氏らが電機子抵抗を用いた乱調発生条件を導出している[9]．また，村井氏らは，インバータのアーム短絡防止期間は電機子側に新たに抵抗を付加した作用をすることを明らかにしている[4]．

図５は，電機子抵抗 r をパラメータとして，調波平衡法によって得られた制動係数 g（δ）の負荷角に対する変化を描いたものである．(21) 式に示すように，安定平衡点における制動係数 g（δ_o）の値が負のとき乱調が発生する．従って，同図において負荷角の原点近傍において g（δ）の値が負になるため，軽負荷時に乱調が発生することがわかる．また，電機子抵抗の値が大きくなると，g（δ）の値が負になる負荷角の範囲が広がると共に，g(δ）の最小値も小さくなることから，電機子抵抗の増加にともない，広範囲の動作点で乱調が発生しやすくなるといえる．

図６は，電機子抵抗 r をパラメータとして，発生トルク f（δ）の負荷角に対する変化を示している．電機子抵抗の値を増加させると，発生トルクは小さくなり，電動機は同期外れを起こしやすくなる．以上の解析結果により，電機予抵抗はリラクタンスモータの安定性に大きな影響を与えることがわかる．

図７は，横軸方向の制動回路の抵抗値 R_q をパラメータとして，電機子抵抗を変化させた場合の安定平衡点における制動係数 g（δ_o）を示している．電機子抵抗の増加にともない g（δ_o）の値は減少していき，g（δ_o）の値が負となったところで乱調が発生するため，電機子抵抗の増加にともない乱調は発生しやすくなるといえる．また R_q を小さくすることにより横軸方向制動回路の効果を大きくすると，g（δ_o）の値は増加することから，横軸方向の制動回路は乱調の抑制に有効であることが分かる．

図８は，電機子抵抗による不安定領域の変化を滑り，負荷角の位相面上に描いたものである．電機子抵抗を大きくすると不安定領域が広がることから，電機子抵抗の値が増加すると発生する乱調振動の振幅も大きくなることが分かる．

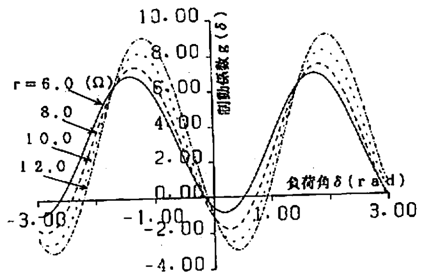

図５　電機子抵抗変化時の制動係数 g（δ）

Fig. 5. Damping coefficient g（δ）varying armature resistance.

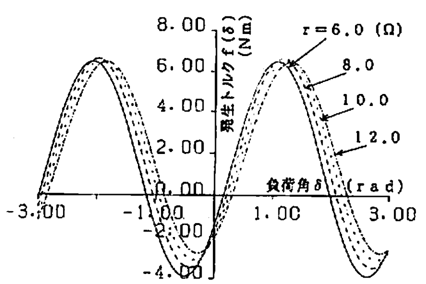

図６　電機子抵抗変化時の発生トルク f（δ）

Fig. 6. Synchronizing torque f（δ）varying with armature resistance.

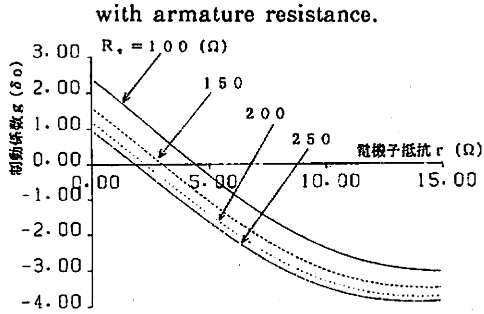

図７　電機子抵抗変化時の制動係数 g（δ_o）

Fig. 7. Damping coefficient g（δ_o）varying with armature resistance.

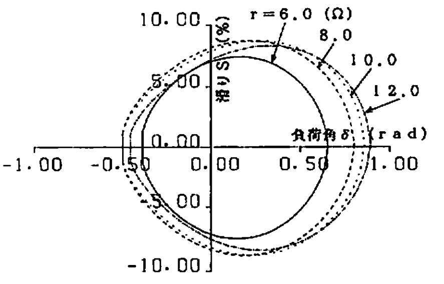

図 8　電機子抵抗による不安定領域の変化

Fig. 8. Instability boundaries for various armature resistance.

リラクタンスモータは，回転子の突極性によって生ずるリラクタンストルクによって同期運転を行なう．従って，回転子の突極性を表わすパラメータである直軸・横軸リアクタンス比 Kx (X_d／X_q) は，リラクタンスモータの出力を決定する重要なパラメータであり，この値が大きいとリラクタンスモータの出力も大きくなる．しかし，Kx の増加にともない，電動機の安定性が悪くなることが知られており，そのため Kx の乱調に及ぼす影響を定量的に把握することは，リラクタンスモータの設計において有用な情報を与える．

図 9 は，回転子の突極性を表わす直軸・横軸リアクタンス比 Kx をパラメータとして，負荷角に対する制動係数 g (δ_o) の変化を示している．Kx の値を大きくすると，g (δ_o) の値が負となる負荷角の範囲が広がると共に，g (δ_o) の最小値も小さくなる．このことから，Kx を増加させ，回転子の突極性を強くすると，広範囲の動作点で乱調が発生しやすくなることがわかる．

図10は，Kx に対する発生トルク f (δ) の変化を示している．Kx はリラクタンスモータの出力を決定するパラメータであるので，Kx を大きくすると発生トルクは増加する．しかし，Kx の増加にともない乱調が発生しやすくなるため，リラクタンスモータを設計する際には，出力と安定性の両方を考慮して，最適な Kx を選定する必要がある．

図11は，Kx をパラメータとして，電機子抵抗を変化させた場合の安定平衡点における制動係数 g (δ_o) を示している．Kx の値が小さい場合には，g (δ_o) の値は正なので乱調は発生しない．しかし，Kx の値を増加させると，g (δ_o) の値は正から負へ変わるので乱調が発生する．また，電機子抵抗の値が大きいほど，Kx の増加にともなう g (δ_o) の減少が大きくなる．従って，電機子抵抗が大きいほど，回転子の突極性の乱調発生に及ぼす影響は大きくなるといえる．

図12は，横軸方向制動回路の抵抗値 R_q をパラメータとして，Kx を変化させた場合の安定平衡点における制動係数 g (δ_o) を示している．Kx の増加にともない，g (δ_o) の値が減少し，乱調が発生しやすくなることが分かる．

図13は，Kx による不安定領域の変化を示している．Kx の値を大きくすると不安定領域が広がり，負荷角が増加するので，回転子の突極性を強くすると発生する乱調振動も大きくなることが分かる．

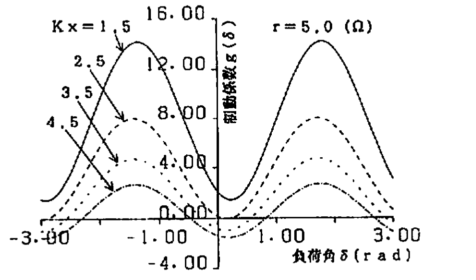

図 9　直軸・横軸リアクタンス比Kx変化時の制動係数 g (δ)

Fig. 9. Damping coefficient g (δ) varying with Kx.

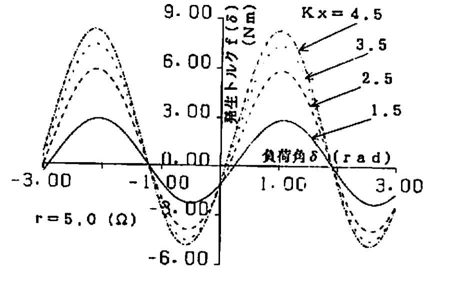

図10.　Kx 変化時の発生トルク

Fig.11. Synchronizing torque f (δ) varying with Kx.

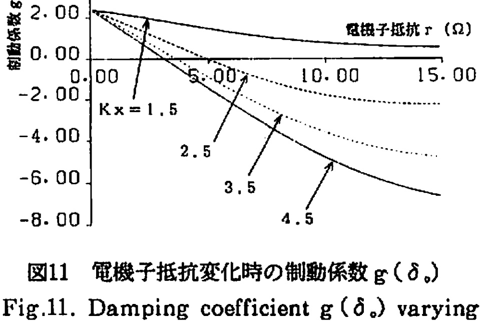

図11　電機子抵抗変化時の制動係数 g (δ_o)

Fig.11. Damping coefficient g (δ_o) varying with armature resistance.

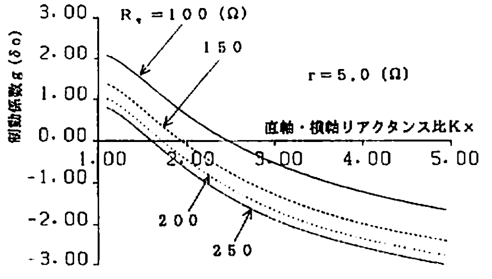

図12　Kx変化時の制動係数 g (δ_o)

Fig.12. Damping coefficient g (δ_o) varying with Kx.

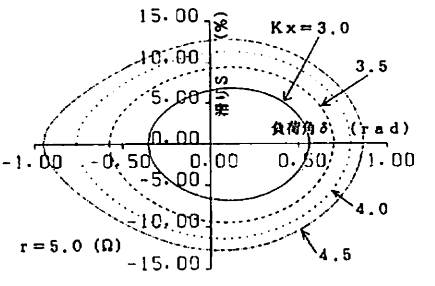

図13　Kx による不安定領域の変化

Fig.13. Instability boundaries for various Kx.

電機子抵抗および直軸・横軸リアクタンス比が，乱調に大きな影響をおよぼすことは周知のことであるが，以上の解析結果からも，これらの機器パラメータによって，発生トルクおよび制動トルクがともに変化するため，その乱調へ及ぼす影響は非常に複雑であることが分かる．

図14は，横軸方向制動回路の抵抗値 R_q をパラメータとして，Kx および電機子抵抗に対する乱調発生限界値の関係を示している．この乱調発生限界値は，安定平衡点における制動係数 g (δ_o) が，正から負に変わる時の電機子抵抗および Kx の値で示してあり，曲線右上の領域が乱調の発生する不安定領域である．電機子抵抗が小さい場合は，Kx の値を大きくしても乱調は発生せず，同様に Kx の値が小さい場合は，電機子抵抗が増加しても乱調は発生しないことがわかる．このように，電機子抵抗および Kx の乱調発生限界値の特性を知ることは，リラクタンスモータの設計に有用な情報を与える．また，R_q の値を小さくすると不安定領域が減少していることから，横軸制動回路による乱調抑制の有効性がわかる．

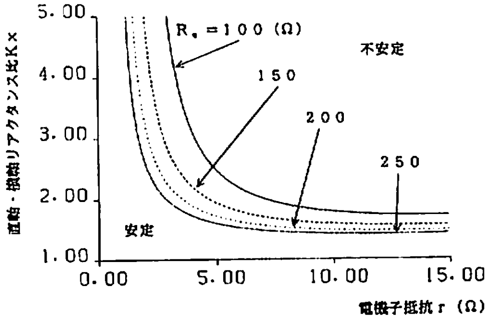

図14　Kx 及び電機子抵抗の乱調発生限界値

Fig.14. Relation between Kx and armature resistance for hunting boundaries.

リラクタンスモータのような小形の突極機では漏れ磁束の値は比較的大きく，また近年リラクタンスモータの利用分野として注目されている高速駆動時において漏れ磁束の影響は大きくなることが知られている．

従って，次に漏れ磁束を考慮したリラクタンスモータの方程式に基づき，その乱調へ及ぼす影響を解析する．

図15は，漏れリアクタンス $\omega \ell_s$ をパラメータとして，負荷角に対する制動係数 g (δ) の変化を示している．漏れリアクタンスを増加させると g (δ) の値が減少するとともに，g (δ) が負となる負荷角の範囲が広がることから，漏れリアクタンスの増加にともない，広範囲の動作点で乱調が発生しやすくなるといえる．

図16は，漏れリアクタンスによる発生トルク f (δ) の変化を示している．漏れリアクタンスを変化させても f (δ) の値に変化は見られない．従って，漏れ磁束はリラクタンスモータの出力にほとんど影響を与えないことがわかる．

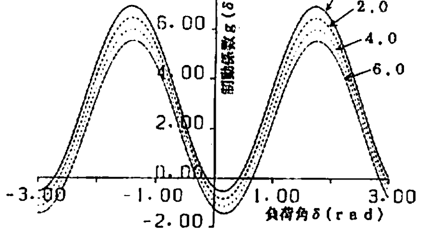

図15　漏れリアクタンスによる制動係数 g (δ) の変化

Fig.15. Damping coefficient g (δ) varying with leakage reactance $\omega \ell_s$.

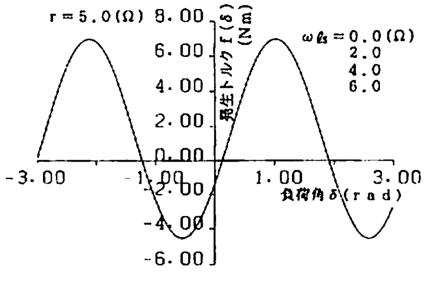

図16　漏れリアクタンスによる発生トルク f(δ) の変化
Fig.16. Synchronizing torque f(δ) varying with leakage resistance.

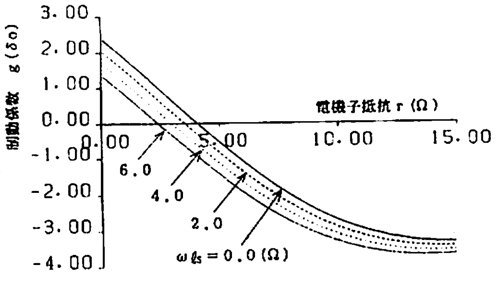

図17　電機子抵抗による制動係数 g(δ_o) の変化
Fig.17. Damping coefficient g(δ_o) varying with armature resistance.

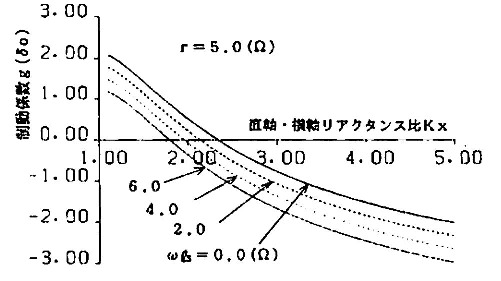

図18　Kx による制動係数 g(δ_o) の変化
Fig.18. Damping coefficient g(δ_o) varying with Kx.

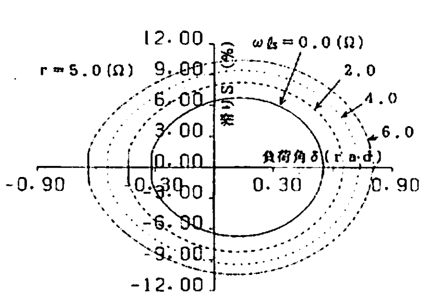

図19　漏れリアクタンスによる不安定領域の変化
Fig.19. Instability boundaries for various leakage reactance.

図17および図18は，漏れリアクタンスをパラメータとして，電機子抵抗および Kx に対する g(δ_o) の変化をそれぞれ示している．漏れリアクタンスの値を大きくすると g(δ_o) の値は減少し，乱調が発生しやすくなることが分かる．また，電機子抵抗および Kx の値が変化しても，漏れリアクタンスの変化にともなう g(δ_o) の変動はあまりないので，漏れリアクタンスの乱調へ与える影響は，電機子抵抗および Kx とはほとんど相関関係がないといえる．

図19は，漏れリアクタンスによる不安定領域の変化を示している．漏れリアクタンスの値が増加すると不安定領域が広がるため，漏れ磁束の増加にともない乱調振動の振幅も大きくなることがわかる．

ところで，制動巻線は乱調抑制法として従来より最も一般的に用いられている手法であり，図7，図12および図14において説明したように，横軸制動回路は乱調の抑制に有効に働くことを述べた．図20は，横軸方向制動回路の抵抗値 R_q をパラメータとして，負荷角に対する制動係数 g(δ) の変化を示している．R_q を減少させ制動回路の効果を大きくすると，原点近傍における制動係数の値が増加し，g(δ) が負になる負荷角の範囲が小さくなるため，横軸方向制動回路は乱調の抑制に有効であるといえる．

図21は，横軸方向制動回路の抵抗 R_q による不安定領域の変化を示している．R_q を減少させると不安定領域が小さくなることから，乱調振動の振幅も小さくなることが分かる．

図22は，直軸制動回路の抵抗値 R_d をパラメータとして，負荷角に対する制動係数 g(δ) の変化を示している．R_d を小さくして直軸制動回路の効果を大きくすると，広い負荷角の範囲で g(δ) の値は増加するが，原点近傍における g(δ) の値は負に大きくなるため，前述の横軸方向制動回路に比べ，乱調の抑制

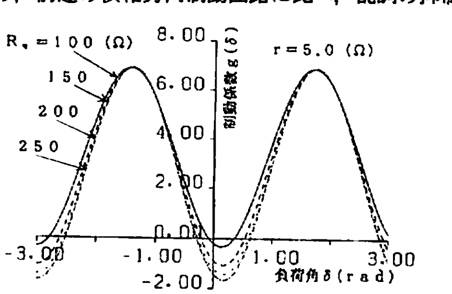

図20　横軸回路の抵抗 R_q による制動係数 g(δ) の変化
Fig.20. Damping coefficient f(δ) varying with R_q.

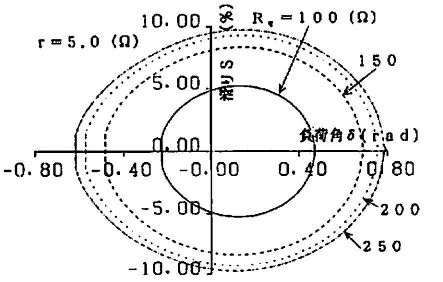

図21　R_qによる不安定領域の変化
Fig.21. Instability boundaries for various R_q.

に大きな効果はないと思われる．

図23および図24は，R_dをパラメータとして，それぞれ電機子抵抗および Kx を変化させた場合の g (δ_o) をそれぞれ示している．横軸制動回路に対する同様の解析結果の図 7 および図12と比較すると，直軸制動回路は乱調抑制に大きな効果はないことがわかる．

図25は，R_dによる不安定領域の変化を示している．R_dの値を小さくして直軸制動回路の効果を大きくすると不安定領域は小さくなり，乱調振動の振幅が小さくなることがわかる．

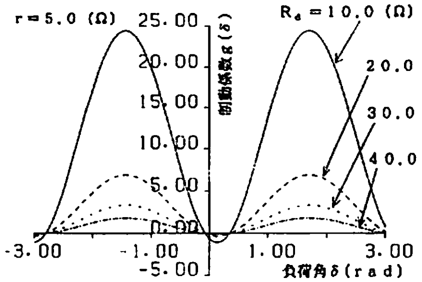

図22　R_dによる制動係数 g (δ) の変化
Fig.22. Damping coefficient g (δ) varying with R_d.

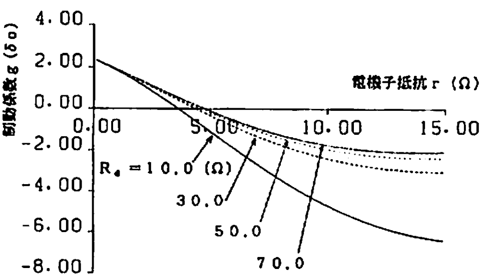

図23　電機子抵抗による制動係数 g (δ_o) の変化
Fig.23. Damping coefficient g (δ_o) varying with armature resistance.

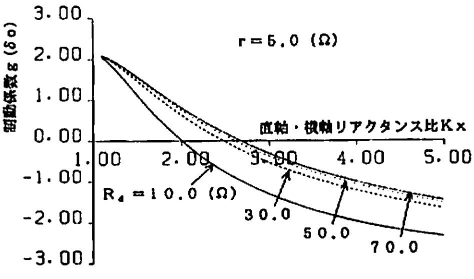

図24　Kx による制動係数 g (δ_o) の変化
Fig.24. Damping coefficient g (δ) varying with Kx.

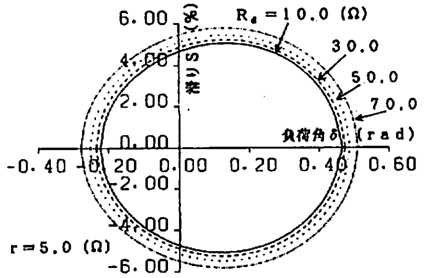

図25　R_dによる不安定領域の変化
Fig.25. Instability boundaries for various R_d.

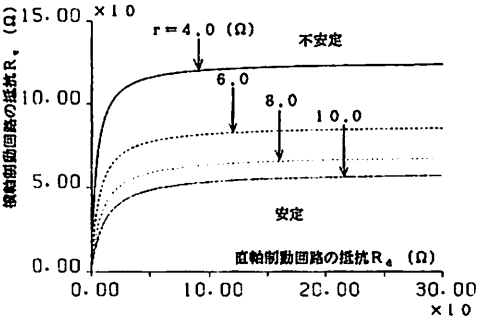

図26　R_dおよびR_qの乱調発生限界値
Fig.26. Relation of huting boundaries for R_d R_q.

以上の解析結果より，直軸方向制動回路は軽負荷時の乱調発生を抑えるには有効ではないが，乱調振動の振幅を軽減することがわかる．

このように，制動回路の乱調抑制効果は，直軸および横軸パラメータによって異なる．そこで次に直軸・横軸制動回路の乱調抑制効果の比較を行う．

図26は，電機子抵抗をパラメータとして，直軸および横軸制動回路の乱調発生限界値の関係を示したもので，曲線の上側が乱調が発生し不安定となる領域であ

る．直軸方向の制動回路の抵抗値を変えても不安定領域はほとんど変化しない．これに対して，横軸制動回路の乱調抑制効果は大きく，電機子抵抗の値が大きい場合でも，R_qの値を小さくすれば乱調は抑制され安定となる．

3．2　機械系パラメータの乱調に及ぼす影響

以上の解析では，種々の機器パラメータの乱調に及ぼす影響を解析した．ここでは電動機に機械的影響を与える機械系パラメータの乱調に及ぼす影響を解析する．

負荷を増加することにより，それまで発生していた乱調振動がまったく見られなくなることは，実際の電動機運転中によく経験することである．

図27は，負荷トルクT_Lを変化させた場合の不安定領域を示している．負荷を大きくすると不安定領域は小さくなることがわかる．これは負荷の増加によって動作点の負荷角が変動し，安定平衡点の制動係数g（δ_o）が正の値へ変化するためである．この様に，乱

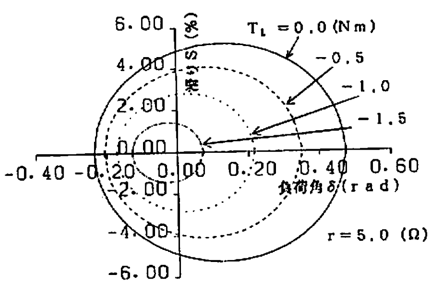

図27　負荷トルクT_Lによる不安定領域の変化

Fig.27. Instability boundaries for various load torque T_L.

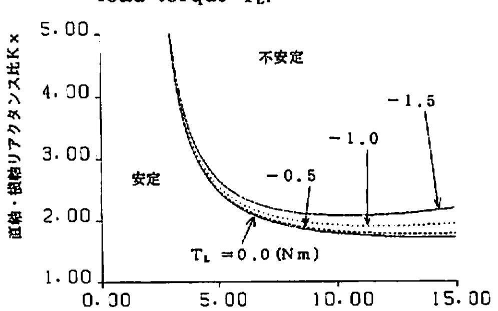

図28　Kx及び電機子抵抗の乱調発生限界値

Fig.28. Relation between Kx and armature resistance for unstable boundaries.

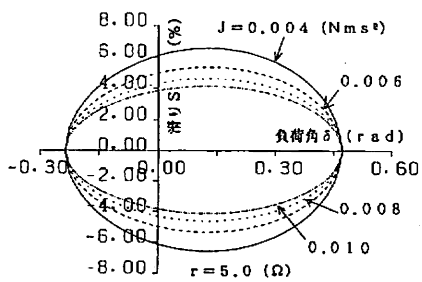

図29　慣性モーメントJによる不安定領域の変化

Fig.29. Instability boundaries for various inertia moment J.

調が発生している場合，負荷を大きくすることによってある程度乱調は抑制できる．

図28は，負荷トルクT_Lをパラメータとして，電機子抵抗および直軸・横軸リアクタンス比Kxに対する乱調発生限界値の関係を示したものであり，曲線の上側が乱調を発生し不安定となる領域を示す．負荷トルクの増加により安定領域が大きくなるので，負荷トルクを増加させると乱調の発生がある程度抑制されることが分かる．

図29から，慣性モーメントを大きくすると不安定領域が小さくなり，乱調振動の振幅が小さくなることがわかる．しかし，安定平衡点の制動係数g（δ_o）の値は変化しないので，乱調の発生する負荷角の範囲は変化せず，そのため慣性モーメントを大きくしても乱調振動の振幅を軽減する効果のみが現れる．

4．むすび

本論文では，リラクタンスモータの機器パラメータ及び駆動条件が乱調に及ぼす影響を解析するため，リラクタンスモータの方程式を調波平衡法によって低次の非線形微分方程式で表し，この式に対してリヤプノフ法を適用する手法を示した．本手法は，乱調発生条件及び乱調の発生する不安定領域を比較的簡単に求めることができる．

解析の結果，電機子抵抗，直軸・横軸リアクタンス比および漏れリアクタンスの値を大きくすると乱調が発生しやすくなり，乱調振動の振幅も大きくなることを定量的に示した．また，回転子の制動回路は，直軸方向よりも横軸方向が乱調の抑制に有効であることを述べた．機械的パラメータについては，負荷トルクを大きくすると乱調は発生しにくくなり，乱調振動の振幅も小さくなること，慣性モーメントを大きくすると

乱調振動の振幅が小さくなることを示した．

これらの解析結果は，従来定性的に述べられてきた乱調現象の解析結果をうまく説明できるため，本手法は乱調現象の解析に有用である．

文　献

(1) T.A.Lipo, P.C.Krause:"Stability Analysis of a Reluctance-Synchronous Machine", IEEE Trans., PAS-86,825 (1967)

(2) R.G.Hoft:"Lyapunov Stability Analysis of Reluctance Motors",IEEE Trans., PAS-87, 1485 (1968)

(3) H.Miyagi&T.Taniguchi:"Lagrange-Charpit method and stability problem of power systems",IEE Proc.,Pt.D,128,3,117 (1981-5)

(4) C.Hayashi:"Nonlinear Oscillation in Physical Systems",p.46,McGraw-Hill (1964)

(5) 島谷・他：「同期電動機の乱調振動の一算定法」，電学論B,98,823 (昭53-10)

(6) 千住・上里・宮城：「リヤプノフ法による突極形同期電動機の乱調振動現象の解析」，電気学会回転機研究会資料，RM-90-104,137 (平2-12)

(7) 千住・上里・宮城：「リラクタンスモータの乱調振動の解析」，平成２年電気学会全大，No.706 (平2-3)

(8) 上里・千住・宮城：「リラクタンスモータにおける制動回路の乱調抑制効果の検討」，平成２年電気関係学会九州支部連大，No.623 (平2-10)

(9) C. A. Nickle & C. A. Pierce : "Stability of Synchronous Machines "Trans. Inst. Elect. Engrs.49,338 (1930)

(10) 村井・他：「PWMインバータで駆動される誘導電動機の安定性について」，電学論D,105,49 (昭60-5)

(11) 小郷・美多：「システム制御入門」，p26,実教出版株式会社 (1988)

付録　I

各巻線電流の係数

$$Fs=\frac{E}{Z}r-\frac{E}{Z^2}\left\{X_q(X_d-X_q)r-\frac{X_{Mq}{}^2}{R_q}r^2+\frac{X_q^2X_{Md}{}^2}{R_d}\right\}\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Fc=\frac{E}{Z}X_q-\frac{E}{Z^2}r\left\{(X_d-X_q)r-\frac{X_dX_{Mq}{}^2}{R_q}-\frac{X_qX_{Md}{}^2}{R_d}\right\}\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Gs=\frac{E}{Z}X_d+\frac{E}{Z^2}r\left\{(X_d-X_q)r+\frac{X_dX_{Mq}{}^2}{R_q}+\frac{X_qX_{Md}{}^2}{R_d}\right\}\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Gc=-\frac{E}{Z}r-\frac{E}{Z^2}\left\{X_d(X_d-X_q)r-\frac{X_d^2X_{Mq}{}^2}{R_q}+\frac{X_{Md}{}^2}{R_d}r^2\right\}\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Hs=\frac{E}{Z}\frac{X_qX_{Md}}{R_d}\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Hc=-\frac{E}{Z}\frac{X_{Md}}{R_d}r\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Is=-\frac{E}{Z}\frac{X_{Mq}}{R_q}r\frac{d\delta}{d\tau}$$

$$Ic=-\frac{E}{Z}\frac{X_dX_{Mq}}{R_q}\frac{d\delta}{d\tau}$$

ここで，$X_{Md}=\omega M_d$，$X_{Mq}=\omega M_q$，
$X_d=\omega\ell_d$，$X_q=\omega\ell_q$，
$Z=X_dX_q+r^2$

電磁トルクの係数

$$a_{ss}=\frac{PE^2}{\omega Z^2}\left\{X_d(X_d-X_q)r\right\}$$

$$a_{sc}=\frac{PE^2}{\omega Z^2}\left\{(X_d-X_q)(Z-2r)\right\}$$

$$a_{cc}=-\frac{PE^2}{\omega Z^2}\left\{X_q(X_d-X_q)r\right\}$$

$$
\begin{aligned}
b_{ss}= -\frac{PE^2}{\omega Z^3}\ \Big[&(X_d-X_q)^2\,(Z-2\,r^2)\,r \\
&+\frac{X_{Mq}{}^2\,r^2}{R_q}\Big\{Z-2\ (X_d{}^2+r^2)\Big\} \\
&-\frac{X_{Md}{}^2}{R_d}\Big\{2\,X_d\,X_q\,r^2+X_q^2\ (Z-2\,r^2)\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{cc}= -\frac{PE^2}{\omega Z^3}\ \Big[&(X_d-X_q)^2\,(Z-2\,r^2)\,r \\
&-\frac{X_{Mq}{}^2}{R_q}\Big\{2\,X_d\,X_q\,r^2+X_d^2\ (Z-2\,r^2)\Big\} \\
&+\frac{X_{Md}{}^2\,r^2}{R_d}\Big\{Z-2\ (X_q^2+r^2)\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{sc}=\frac{PE^2}{\omega Z^3}\,r\,\Big\{&-2\,(X_d-X_q)^3\ r \\
&+\frac{2X_{Mq}{}^2}{R_q}(X_d{}^3+X_q\,r^2) \\
&-\frac{2X_{Md}{}^2}{R_d}(X_d\,r^2+X_q{}^3)\Big\}
\end{aligned}
$$