梁理論解に相当する本解と日置解との比較検討

梁理論解に相当する本解と日置解との比較検討

山　川　哲　雄*

Discussion on a Comparison of a Proposed Solution with Heki's Solution with Respect to the Beam Theory

Tetsuo YAMAKAWA*

Abstract

Author discussed the beam theory for a straight uniform bar of narrow rectangular cross section by using the theory of elasticity of orthotropic plate (scheibe) and Airy's stress functions. On the other hand, Heki presented an analytical solution of the cantilever by using the theory of orthotropic elastic plate (scheibe). This analytical method is different from a proposed method. Therefore, in this paper a detailed comparison of the accuracy and mechanical property is made through calculation of the cantilever subjected to a concentrated load at the free end of the member.

1．序

著者は近く，日本建築学会構造系論文報告集に「梁理論に関する直交異方性弾性板（scheibe）理論とAiryの応力関数を用いた基礎的検討」と題して構造力学に関する論文を投稿する予定である。その論文の主なる結論でもあるが，最も強調したいことは次の一点である。等方等質な材料で構成された梁に初等梁理論として断面内不変の仮定と法線保持の仮定（これらの仮定はBernoulli-Eulerの仮定として一般に広く知られている）を導入することは，等方等質な梁を異方等質な梁に置き換えることにほかならない。特に，このことを代数型応力関数の導入により梁の上下面に作用する分布荷重，すなわち中間荷重の有無にかかわらず一般的に証明することを可能にした。

このように，梁理論を直交異方性scheibe理論で置き換えようとした着想は文献1)までさかのぼることができる。その後，文献2),3) をへて今日に至っている。しかし，これらの文献1),2),3) ではフーリエ級数型応力関数のみしか利用していないので，たわみを未知関数とする梁の4階の微分方程式の余解に相当する解を誘導することができなかった。しかも，一方では等方等質材料で構成された梁に，異方性を導入することは正しくないという議論もあった。これに対し著者は代数型応力関数の導入を着想し，その応力関数解が梁の微分方程式の一般解に完全に一致することを，本研究報告で明示する（2．本解の概要参照）。一方，研究の進展と文献調査の過程で，著者と同じ異方性弾性理論の立場から日置の先駆的研究[4)5)]があることもわかった。日置の研究は断面内無応力の仮定（断面内ひずみがすべて零とは限らない）がその研究の出発点であり[5)]，一方著者は断面内不変（断面内ひずみがすべて零である）の仮定が本研究の出発点である[1)2)3)]。もっとも日置も上記の研究のほかに，著者と同じ断面内不変の仮定に基づいた初等梁理論解を，中間荷重や物体力（体積力）が作用しない場合に限りAiryの応力関数解より一般的なポテンシャル関数解を用いて文献5）で明らかにしている。その文献5）より2年ほ

受付：1991年11月1日

* 工学部建設工学科
Dept. of Architectural Eng., Faculty of Eng.

ど早く，著者は断面内不変の仮定に基づいたせん断変形考慮の梁理論解のみならず，初等梁理論解に相当する基礎式とこれらのフーリエ級数型応力関数解を明示している[1]。

本報告では，断面内不変の仮定に基づいた本解の概要を示し，次いで文献5）より断面内無応力の仮定に基づいた日置解の概要を紹介する。さらに，片持ち長方形断面梁に関する両者の数値解析例，及び梁理論解を通して本解と日置解の相違を具体的に明らかにすることが本研究報告の目的である。なお，日置解の詳細については文献5）を参照されたい。

2．本解の概要

本解では初等梁理論における基本仮定，すなわち断面内不変の仮定と法線保持の仮定[6)11)]を，力学的には次のように解釈するものとする。

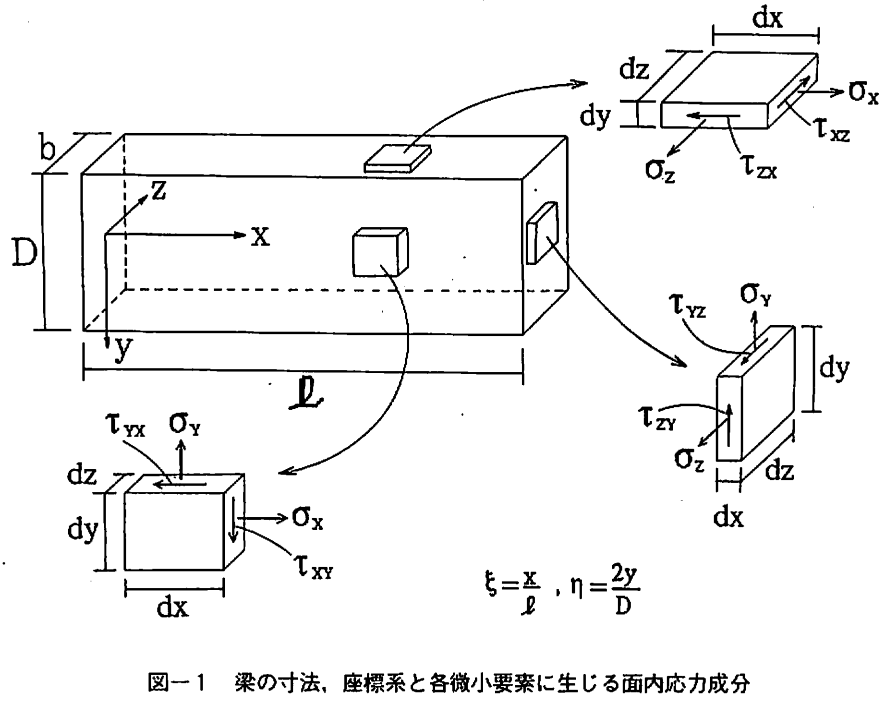
1）断面内不変の仮定ではｙ－ｚ面内（図－１参照）のひずみ $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$ がすべて零である。

2）法線保持の仮定ではｘ－ｙ面内におけるｘ軸（材軸）方向の垂直ひずみ ε_x のみ存在し，他のひずみ $\varepsilon_y, \gamma_{xy}$ はすべて零である。ただし，ε_y はｙ－ｚ面内の ε_y と共通である。

さらに，せん断変形を考慮した梁理論解に相当する本解では上記の１）のみが成立する。平面応力場の異方性理論を図－１に示す座標系のｘ－ｙ面に適用するので，ｚ軸方向が異方性板（scheibe）の厚さ方向，すなわち梁幅方向になる。したがって，文献12)によれば(1)式で与える応力場を仮定することになる（図－１参照）。

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1)式より梁断面内のひずみ場に関係する応力 σ_y，σ_z，τ_{yz} のうち，σ_z と τ_{yz} を無応力と仮定することになる。さらに，ｘ－ｚ面における τ_{xz} が零で，σ_x の分布が梁幅方向（ｚ軸方向）に一様であることを考慮すれば，その方向に梁は変形することなく，ｘ－ｙ面内での変形に限定される。一方，σ_y は梁の上下面に分布荷重（本報告では梁のたわみに関する４階の微分方程式における特解を構成する分布荷重を中間荷重と定義し，物体力はこれに含まれない）が作用しても零になる場合があるが，分布荷重が作用しなければ零



図－１　梁の寸法，座標系と各微小要素に生じる面内応力成分

になる（(11)式参照）。たとえば，中間荷重が作用しても純せん断場のみ生じさせる特殊な場合に限っては σ_y が零になる。したがって，中間荷重が作用しない場合には文献6）のように断面内無応力を結果的に仮定したことに相当する。しかし，中間荷重が作用すると σ_y が一般に零でなくなるので，断面内無応力は成立しない。その場合でもポアソン比が零で材軸と直交方向のヤング係数 E_y が無限大であれば，断面内のひずみは一切生じない。ところで直交異方性の主方向1，2と直交座標系の x，y 軸が一致する場合の直交異方性弾性場を支配する方程式は，Airyの応力関数Fを用いて(2)式のように定式化される[12]。

$$\frac{1}{E_y}F'''' + \left(\frac{1}{G}-\frac{2\nu_x}{E_x}\right)F'''' + \frac{1}{E_x}F'''' = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここに，

$$' = \frac{\partial}{\partial X}, \quad \cdot = \frac{\partial}{\partial y}$$

異方弾性場の構成方程式は(3)式で与えられている[12]。

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}(\varepsilon_x + \nu_y\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}(\varepsilon_y + \nu_x\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \cdots\cdots(3)$$

しかし，これらの弾性係数間にはMaxwell-Bettiの相反定理より，(4)式の関係が成立しなければならない。

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y} \qquad \cdots\cdots(4)$$

一方，等方弾性場の構成方程式は(5)式を(3)式に代入することにより，またその支配方程式は(5)式を(2)式に代入することにより，それぞれ容易に求められる。

$$E_x = E_y = E,\ G = \frac{E}{2(1+\nu)},\ \nu_x = \nu_y = \nu \qquad \cdots\cdots(5)$$

梁理論ではせん断変形考慮の有無にかかわらず，材軸と直交方向の垂直応力 σ_y が生じても，その方向の垂直ひずみ ε_y も，またポアソン比を介して材軸方向の垂直ひずみ ε_x も，ともに生じない。また，材軸方向に垂直応力 σ_x が生じるからといって，ポアソン比を介して ε_y が生じることもない。このことに注目すれば梁理論では E_y が無限大で，ポアソン比が零に相当すると考えることができる。したがって，せん断変形を考慮した梁理論に相当する支配方程式は，(6)式で与える仮定を(2)式に代入することにより，(7)式のように誘導される[1)2)3)]。

$$E_y = \infty,\ \nu_x = \nu_y = 0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{1}{G}F'''' + \frac{1}{E_x}F'''' = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

(7)式には断面の平面保持仮定もせん断変形用形状係数 κ もともに導入されていないので，それに基づく解はせん断変形を考慮した梁理論解であるTimoshenko[13)14)]や，富井・平石[15]のそれとは異なる。E_y と同様に(7)式のGを(8)式のように無限大におくと，(2)式または(7)式より初等梁理論解に一致する支配方程式が(9)式で与えられる[1)2)]。

$$E_y = G = \infty,\ \nu_x = \nu_y = 0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$F'''' = 0 \qquad \cdots\cdots(9)$$

(8)式からわかるように，E_y とGがともに無限大で，かつ ν_x，ν_y が零と仮定されているので，ε_y と γ_{xy} が生じないことは明らかである。さらに平面応力場でかつポアソン比が零であることを考慮すると，梁幅方向の ε_z も生じない。したがって，(9)式から求められる一般解において，断面内不変の仮定と法線保持の仮定がともに満足されていることになる。なお，せん断変形を考慮した梁理論解に相当する(7)式の一般解を誘導すれば，その一般解に含まれるせん断弾性係数Gを無限大におくことにより，自動的に(9)式の一般解が求められる。

材に中間荷重や物体力（体積力）がまったく作用しないことを前提に(2),(7),(9)式のいづれの方程式も満足する代数型応力関数Fとして，図－1に示す座標系のもとで(10)式が得られる。ただし，(10)式では材軸上にx軸が設定されているので，たわみが表現できるyに関する奇関数が採用されている。

$$F = C_{03}\eta^3 + C_{13}(\xi\eta^3 - 3\xi\eta) \qquad \cdots\cdots(10)$$

ここに，

$$\xi = \frac{X}{\ell},\quad \eta = \frac{2y}{D}$$

C_{03}，C_{13}：未知積分定数

(10)式のFから，応力が(11)式のように整理される。

$$\sigma_x = F^{\cdot\cdot} = \frac{24}{D^2}\ (C_{03}\,\eta + C_{13}\,\xi\,\eta)$$

$$\sigma_y = F'' = 0$$

$$\tau_{xy} = -F^{\cdot\prime} = \frac{6}{D\,\ell}C_{13}\ (1-\eta^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(11)式の応力は等方性，異方性や弾性定数の値に一切影響されない。(11)式より，未知積分定数C_{03}は純曲げ挙動に，C_{13}は曲げせん断挙動にそれぞれかかわる係数であることがわかる。(11)式で与える応力場に中間荷重（梁の上下面に作用する分布荷重）を与えることができないことは明らかである。したがって，中間荷重が作用しなければ(11)式より，σ_yは零であると解釈することもできる。このことはσ_xによりε_xが生じ，ポアソン比が零でない等方性弾性体に対しても適用できる。(11)式よりσ_yが零であれば(3),(5)式より(12)式が求められる。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\ (\sigma_x - \nu\,\sigma_y)\ = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\ (\sigma_y - \nu\,\sigma_x)\ = -\frac{\nu\,\sigma_x}{E} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(12)式を(3),(5)式から求めた構成方程式に代入すると(13)式が得られ，σ_yが恒等的に零となり，Fを直接微分することによって求められた$\sigma_y = 0$と矛盾しないことがわかる。

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\ (\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x)$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\ \left(\frac{-\nu\,\sigma_x}{E} + \frac{\nu\,\sigma_x}{E}\right)\ = 0 \quad \cdots\cdots(13)$$

一方，梁理論に対応する直交異方性弾性場では(6),(8)式に見られるようにE_yを無限大におき，かつν_x，ν_yを零においている。したがって，ε_xが生じてもσ_yは常に零である。

さて，(12)式の応力と(6)式の仮定に基づいて，ひずみと変位を(14)式に整理する。

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = u' = \frac{24}{E_x\,D^2}\ (C_{03}\,\eta + C_{13}\,\xi\,\eta)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} = \dot{\upsilon} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \dot{u} + \upsilon'\ = \frac{6}{G\,D\,\ell}C_{13}(1-\eta^2)$$

$$u = \frac{12\,\ell}{E_x\,D^2}\ (2\,C_{03}\,\xi\,\eta + C_{13}\,\xi^2\,\eta)$$

$$-\frac{C_{13}\,\eta}{2\,E_x\,D} + \frac{C_{13}}{G\,\ell}\ (3\,\eta - \eta^3)$$

$$\upsilon = \frac{-8\,\ell^2}{E_x\,D^3}\ (3\,C_{03}\,\xi^2 + C_{13}\,\xi^3)\ + \frac{C_1\,\ell}{E_x\,D^2}\xi$$

$$+ \frac{C_2}{E_x\,D} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

初等梁理論解に一致する(8)式の仮定に基づいた解を得るためには，(14)式で$G=\infty$とおけばよい。

(11),(14)式から梁の断面力，断面の回転角及び曲率を求め，整理するとそれらは(15)式で与えられる。

$$M = \int \sigma_x\,y\ b\,dy = 4b\ (C_{03} + C_{13}\,\xi)$$

$$Q = \int \tau_{xy}\ b\,dy = 4\ C_{13}\frac{b}{\ell}$$

$$\theta = \dot{u} = -\frac{24\,\ell}{E_x\,D^3}\ (2\,C_{03}\,\xi + C_{13}\,\xi^2)$$

$$-\frac{C_1}{E_x\,D^2} + \frac{6}{G\,D\,\ell}C_{13}(1-\eta^2)$$

$$\upsilon' = -\frac{24\,\ell}{E_x\,D^3}\ (2\,C_{03}\,\xi + C_{13}\,\xi^2)\ + \frac{C_1}{E_x\,D^2}$$

$$\phi = \upsilon'' = -\frac{48}{E_x\,D^3}\ (C_{03} + C_{13}\,\xi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

一方，梁の支配方程式はたわみの4階の常微分方程式であるから，中間荷重がない場合のたわみυに関する一般解は，(14)式のυと同一の式で与えられる。その(14)式のυからせん断変形を考慮した梁理論に基づく梁の回転角θ，曲げモーメントM，せん断力Qが(16)式のように整理される。

$$\theta = -\upsilon' - \frac{\kappa\,E_x\,I}{G\,A}\ \upsilon''' = -\upsilon' + \frac{\kappa\,Q}{G\,A}$$

$$= \frac{24\,\ell}{E_x\,D^3}\ (2\,C_{03}\,\xi + C_{13}\,\xi^2)\ - \frac{C_1}{E_x\,D^2} + \frac{4\,C_{13}\,\kappa}{G\,D\,\ell}$$

$$M = -E_x\ I\ \upsilon'' = 4\,b\ (C_{03} + C_{13}\,\xi)$$

$$Q = -E_x\ I\ \upsilon''' = 4\ C_{13}\,\frac{b}{\ell} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

ここに，κの値はせん断変形用形状係数であり，方形断面の場合κの値は1.2である。また，$\kappa=1.2$を採用すると，(16)式はTimoshenko梁理論解に一致する。(16)式と(15)式を比較した場合，回転角θのみが異なる。しかし，Gを無限大とおけば(16)式は初等梁理論解そのものであり，しかも(16)式は(15)式に完全に一致する。Gが無限大であるので，(15)式より(17)式が誘導される。

$$u^{\cdot}+v'=\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=0\rightarrow\theta=u^{\cdot}=-v' \quad \cdots\cdots(17)$$

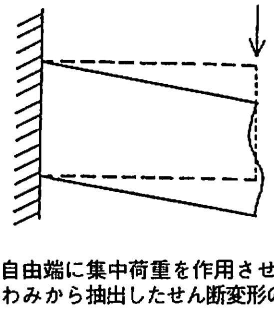
(17)式より，法線保持の仮定が成立している。したがって，初等梁理論として断面内不変の仮定と法線保持の仮定を導入することは，等方等質な弾性体である梁を極限的な材料特性を有する異方等質な平面応力場の直交異方性板（scheibe）と見なすことにほかならない。

一方，Gを有限値におくと，自由端に集中荷重を作用させた片持ち梁のたわみからせん断変形のみとりだして描いた図－2からわかるように，断面のゆがみ（warping）が生じている。すなわち，Gを有限値におくと断面の平面保持も法線保持もいずれの仮定も，もはや成立しない。(15)式からわかるように，せん断変形を考慮すれば断面の回転角は梁せい方向で変化することになり，材軸上で断面の回転角を一義的に定めることが不可能になり，梁理論の簡便さが失われる。そこで，梁理論の簡便さを失わずにせん断変形を考慮する便法として，よく知られたひずみエネルギーによる方法が採用された。そうすれば，(15)式のθは(16)式のθに完全に一致する。このことは，梁のせん断ひずみγ_{xy}がひずみエネルギー的に等価な平均せん断ひずみとして(18)式で与えられることに相当する[9]。

$$\gamma_{xy}=u^{\cdot}+v'=\theta+v'=\frac{\kappa Q}{GA}=\frac{4C_{13}\kappa}{GD\ell} \quad \cdots\cdots(18)$$

上記のようにひずみエネルギー的な処理をほどこさず，上下面の外縁を結ぶ線を断面の回点角θと近似的な定義にすれば，(14)式のuよりそのθが(19)式で与えられる。

$$\theta=\frac{2u|_{\eta=1}}{D}=\frac{24\ell}{E_xD^3}(2C_{03}\xi+C_{13}\xi^2)-\frac{C_1}{E_xD^2}+\frac{4}{G\ell D}C_{13} \quad \cdots\cdots(19)$$



図－2　自由端に集中荷重を作用させた片持ち梁のたわみから抽出したせん断変形のみを描いた場合

(19)式は(16)式のθで$\kappa=1.0$を採用したことに相当し，Timoshenko梁理論解における$\kappa=1.2$と若干異なる。(11),(14),(15),(16),(19)式を利用して，自由端に集中荷重Pを受ける片持ち長方形断面梁の応力と変位を表－1に整理する。なお，伸縮材や中間荷重が作用する場合の代数型，及びフーリエ級数型応力関数解については割愛する[3]。

3．日置解の概要

せん断変形を考慮した梁理論解に相当する解を日置は著者と同じ直交異方性弾性(scheibe)理論を用いて明らかにしている[5]。ただし，著者と異なり材軸方向と直交方向，すなわち梁せい方向のヤング係数E_yと垂直応力σ_yがそれぞれ零と仮定されている。ポアソン比ν_x，ν_yがそれぞれ零であるとか，E_xとGがそれぞれ独立な有限値として与えられることなどは著者と同じである。そのために，梁せい方向（y方向）における平面応力場の平衡条件式が，(20)式のように簡略化されることになる。

$$\sigma^{\cdot}_y+\tau_{xy}'=0\rightarrow\tau_{xy}'=0 \quad \cdots\cdots(20)$$

(20) 式をxで積分することによりτ_{xy}が容易に求められ，次いでこのτ_{xy}を（21）式に示す材軸方向（x軸方向）の平衡条件に代入し，その式をxで積分してσ_xを求めている[5]。

$$\sigma_x'+\tau_{xy}^{\cdot}=0 \quad \cdots\cdots(21)$$

その後，日置は構成方程式とひずみ－変位関係を利用し，境界条件を代入することにより，一端が完全固定，上下面完全自由，自由端は梁せい方向に伸縮せず，かつその方向に荷重を受ける片持ち長方形断面梁の解を示している（図－2参照）[5]。これらの解を文献5）から転記し，表－1に整理して示す。

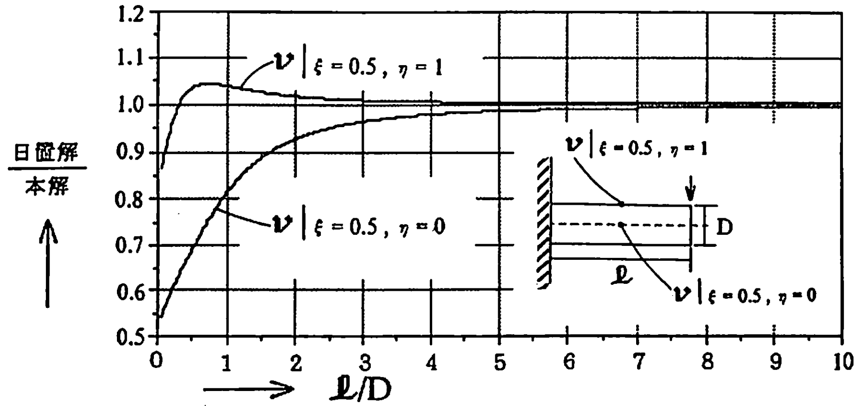
表－1に注目すると，たわみvがxの関数のみならずyの関数になっている。両端では材軸と直交方向にvが変化することはないが，その間ではvが梁せい方向に変化し，ε_yが生じる。そうすると，ポアソン比がたとえ零であってもσ_yが生じることになり，このことは方程式の冒頭に仮定した$\sigma_y=0$と矛盾することになる。そこで，もう一つの仮定である$E_y=0$がどうしても必要になってくる。このようにして，日置による研究がなされ，長方形片持ち梁の縁応力，最大せん断応力，及びせん断変形用形状係数κの力学特性が定量的に明らかにされた[5]。

表－１　自由端に集中荷重を受ける片持ち長方形断面梁の応力と変位

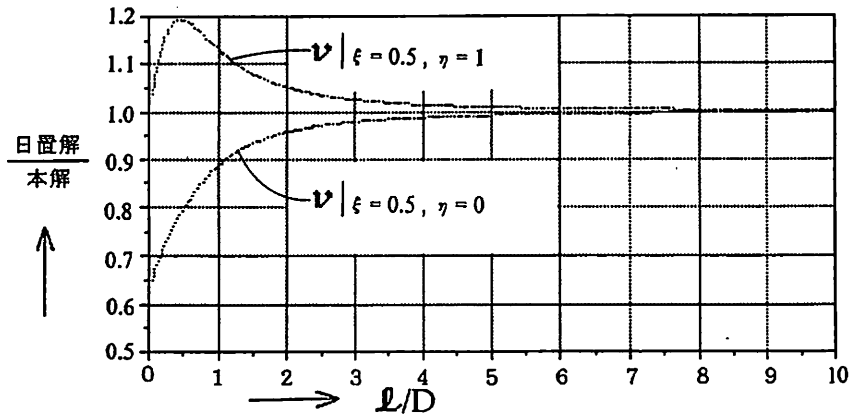
	本　　解	日　置　解
τ_{xy}	$\frac{3P}{2bD}(1-\eta^2)$	$\frac{P}{bD}\frac{\beta(\cosh\beta\eta-\cosh\beta)}{\sinh\beta-\beta\cosh\beta}$
σ_x	$\frac{6P\ell}{bD^2}(\xi-1)\eta$	$\frac{2P\ell(1-\xi)}{bD^2}\frac{\beta^2\sinh\beta\eta}{\sinh\beta-\beta\cosh\beta}$
u	$\frac{6P\ell^2}{bD^2E_x}\xi\eta(\frac{1}{2}\xi-1)+\frac{P\eta}{4bG}(3-2\kappa-\eta^2)$	$\frac{P\ell^2\xi(2-\xi)}{bD^2E_x}\frac{\beta^2\sinh\beta\eta}{\sinh\beta-\beta\cosh\beta}$
v	$\frac{2P\ell^3}{bD^3E_x}\xi^2(3-\xi)+\frac{\kappa P\ell}{bDG}\xi$	$\frac{P\ell}{bDG}\frac{\beta}{\beta-\tanh\beta}\{\xi-(\xi-\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3)\frac{\cosh\beta\eta}{\cosh\beta}\}$
備考	ひずみエネルギー的な処理をすればせん断変形考慮の梁理論と同様に $\kappa=1.2$ であり，(19)式を利用すれば $\kappa=1$ となる．	$\beta^2=\frac{3E_xD^2}{4G\ell^2}$ ，$\xi=\frac{x}{\ell}$ ，$\eta=\frac{2y}{D}$

4．片持ち長方形断面梁の数値解析

本解と日置解の具体的な差異を検証するために，自由端に集中荷重が作用する片持ち長方形断面梁の数値解析を行う。表－１に示した解には特解が含まれず，余解のみで構成されている。日置解は $\sigma_y=E_y=0$ を仮定して誘導された解である。日置解は片持ち梁としての境界条件を完全に満足しているが，本解はＧを無限大とおかない限り，固定端の条件を u が完全には満足していない。本解はせん断変形を考慮した梁理論解にきわめて近いことが表－１よりわかる。すなわち，本解で $\kappa=1.2$ とおくと，本解はTimoshenko梁理論解に等しい。ただし，κ が含まれた u の第２項は零とおく必要がある。また，表－１の本解でＧを無限大におくと，それは初等梁理論解に完全に一致する。さらに，中間荷重が作用しない限り，応力はせん断変形考慮の有無には無関係であることがわかる。ただし，本解は前述したように u に関する固定端の境界条件が完全に満足されていないことに留意する必要がある。本解と日置解の基本的な相異は断面内不変の仮定と断面内無応力の仮定のちがいに依存する。本例の場合中間荷重が作用していないので，断面内不変の仮定に加えて本解は断面内無応力の仮定をも満足している。ただし，中間荷重が作用すると本解は断面内不変の仮定のみ満足し，断面内無応力の仮定は満足しなくなる[2)3)]。一方，日置解は表－１からわかるように v がｙの関数になっているので垂直ひずみ ε_y が生じ，断面内不変の仮定が両端部を除いて満足されていない。固定端（$\xi=0$）と自由端（$\xi=1$）では，日置解も本解と同様に ε_y が零になっている。したがって，片持ち梁中央（$\xi=0.5$）でたわみ v の梁せい方向変化を調べる。その図－３より，v の変化はせん断スパン比 ℓ/D が小さい場合，すなわち梁せいが材長に比較して大きくなると顕著にあらわれるが，ℓ/D が大きくなると無視できるほど小さくなることがわかる。このことは，断面内不変の仮定が ℓ/D が小さい梁ほど満足されていないことを示す。片持ち梁自由端（$\xi=1$）のたわみ v を図－４に，材軸方向変位 u を図－５にそれぞれ示す。図－４，５より，ℓ/D が小さい片持ち梁では本解と日置解との間に顕著な差異が生じる。ℓ/D が小さくなると二次元弾性挙動が卓越し，本解と日置解の差異が大きくなる。しかし，ℓ/D が大きくなると梁的挙動が卓越し，両者の解の差異がなくなる。これは両者の解がそれぞれ初等梁理論解に収束していることを意味する。これらのことは図－６に示した片持ち梁の応力についても同様にいえる。特に固定端の境界条件が応力，変位に及ぼす力学的な影響に関しては，片持ち梁の厳正解の誘導がきわめて困難であるが，それに基づいた検討が望まれる。なお，数値計算にはＧ＝$3E_x/7$ の関係を採用した。

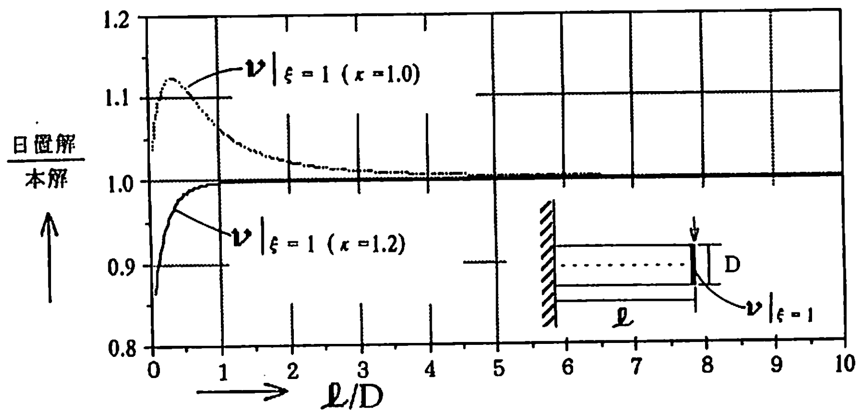


（a）Timoshenko梁理論解に等しい本解（κ＝1.2）

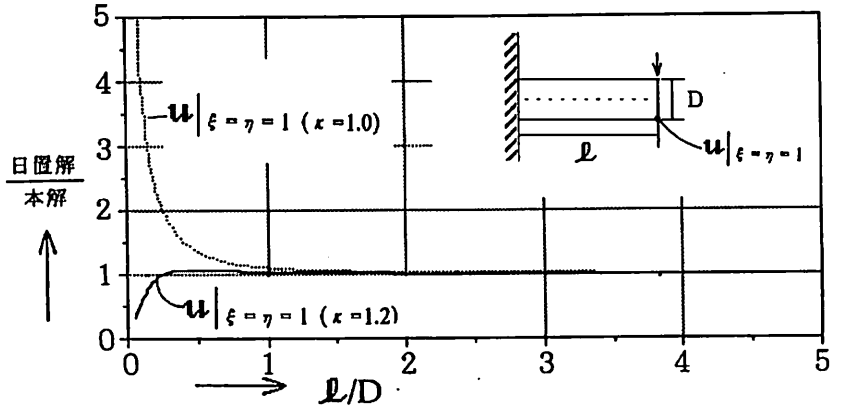


（b）本解（κ＝1.0）

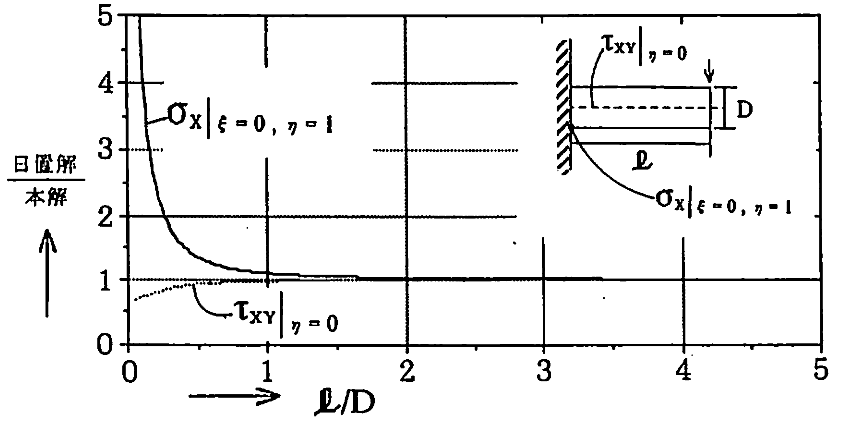
図－3　片持ち長方形断面梁中央（ξ＝0.5）におけるたわみvに関する本解と日留解との比較



図－4　片持ち長方形断面梁自由端（ξ＝1）におけるたわみvに関する本解と日留解との比較



図－5　片持ち長方形断面梁自由外端（$\xi=\eta=1$）における材軸方向変位uに関する本解と日置解との比較



図－6　片持ち長方形断面梁固定外端（$\xi=0, \eta=1$）における曲げ応力σ_x，及び中立軸（$\eta=0$）におけるせん断応力τ_{xy}に関する本解と日置解との比較

5．結論

梁理論解に相当する本解と日置解の概要を紹介し，両者の解を用いて片持ち長方形断面梁の弾性解析を行った。直交異方性弾性板（scheibe）理論とAiryの応力関数を用いた本解は，中間荷重が作用しなければせん断変形を考慮した梁理論解にきわめて近い。しかも，せん断弾性係数Gを無限大におくと，それは初等梁理論解に完全に一致する。一方，$\sigma_y=E_y=0$を仮定して誘導した日置解は等方性弾性理論解に近いと考えられる。等方性弾性理論による片持ち長方形断面梁の厳正解に基づいたさらなる検討は，その厳正解の調査，誘導も含めて今後の研究課題としたい。

謝　辞

梁理論に関する基礎的研究過程で故・坪井善勝先生に温かい励ましを賜りました。ここに記して今は亡き坪井善勝先生に謹んで深甚の謝意を表する次第です。また，本研究報告の整理，数値計算，及び図表化など全面的に協力いただいた建設工学科の卒論生である玉城康哉，野元秀一，田中端史の諸君に感謝します。

参考文献

1）山川哲雄：Box構造物の弾性解析と剛性評価に関する問題，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），pp.741～742，1975年10月

2）山川哲雄：原子炉建屋Box構造の剛性評価法，清水建設研究所報，第31号，pp.67～74，1979年10月
3）山川哲雄：初等梁理論に関する直交異方性弾性理論を用いた一考察，その１．両端単純支持梁の直交異方性弾性理論解，その２．せん断変形を考慮した初等梁理論解の再検討と考察，日本建築学会中国・九州支部研究報告第８号，pp.433～440，1990年３月
4）日置興一郎：円筒シェル屋根の片持ち梁など２，３の薄膜解について，日本建築学会論文報告集，第73号，pp.13～18，1962年６月
5）日置興一郎：構造力学II，朝倉書店，pp.42～49，1977年11月
6）K.Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, pp.132～151，1968
7）高島秀雄：骨組構造解析法要覧（17.棒材理論の基本的仮定および基礎式），培風館，pp.352～378, 1976年４月
8）川井忠彦・藤谷義信：梁理論の精密化に関する二，三の試み，その１，その４，生産研究，第25巻第６号，pp.211～220，1973年６月，第25巻第11号，pp.479～490，1973年11月
9）日置興一郎：構造力学Ｉ，朝倉書店，pp.43～44，pp.130～135，1970年６月
10）藤谷義信：建築構造力学の最近の発展（3.1骨組構造の力学），日本建築学会（丸善），pp.277～308，1976年11月
11）藤谷義信：薄肉はり構造解析，培風館，pp.1～27, pp.164～167，pp.196～197，1990年６月
12）坪井善勝：建築弾塑性学，建築学大系9-I，彰国社，pp.24～31, pp.102～106, 1969年７月
13）S.P.Timoshenko: On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars, Philosophical Magazine, vol.41,pp.744～746，1921
14）S.P.Timoshenko: On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross-Section, Philosophical Magazine, vol.43, pp.125～131，1922
15）富井政英・平石久廣：Elastic Analysis of Framed Shear Walls by Considering Shearing Deformation of the Beams and Columns of Their Boundary Frames, Part I, II, Trans. of AIJ, No.273, 274, pp.25～31，Nov.,pp.75～83, Dec., 1978