非線形フィードバックシステムのロバスト安定性

非線形フィードバックシステムのロバスト安定性

宮 城 隼 夫*　山 川 敦**　山 下 勝 己*

Robust Stability of Nonlinear Feedback Systems

Hayao MIYAGI*　Atsushi YAMAKAWA**
and Katsumi YAMASHITA*

Summary

The robustness of a nonlinear feedback system subject to plant variations is studied through the direct method of Lyapunov. Robust stability results developed in this paper give bounds of parameter deviations of the system, which may be tolerated without losing stability. The proposed method is illustrated by using an example.

Key Words : Robust Stability, Nonlinear Feedback Systems, Lyapunov's Direct Method

1．はじめに

モデル化されたシステムが実際のシステムの有する不確かさをどの程度克服するかという，ロバスト安定性の問題は重要な課題の一つである．このロバスト安定性の問題について，線形システムを対象とした研究は，状態変数表示による時間領域における解析および周波数領域における解析の両面から幅広くおこなわれている[(1)-(4)]．一方，非線形システムを対象としたロバスト安定性についての研究は，Kalman−Yakubovichの補題に基づくポポフの安定判別法を用いたGrujićらの結果[(5)]等があるが，その数は筆者らの知るかぎり少ない．

一般に，ロバスト安定条件は摂動項をノルム化した形で与えられており，Grujićらの論文においてもノルムが採用されている．しかしながら，非線形システムにおいてノルムを用いた場合，実際のロバスト安定条件よりもかなり控え目な結果を与えることが多い．

本論文では，非線形フィードバックシステムのロバスト安定性について，Andersonの定理[(6)]に基づいたリアプノフの直接法により解析を行う．まず，ノミナルなシステムの安定性についてAndersonの結果にしたがって考察を行い，ルーリエ形リアプノフ関数の存在を保証する[(7)-(8)]．次にノミナルなシステムに対して得られたリアプノフ関数を基盤にノルム表現によらないロバスト安定条件の導出法について一つの提案を行う．さらに，これらの結果を例題システムへ適用する．

受付：1991年5月13日
* 工学部電子・情報工学科　Dept. of Electronics and Information Eng., Fac. of Eng.
**日本電信電話株式会社　Nippon Telegraph and Telephone Corp.

2. システム設定

次の非線形フィードバックシステムを考える．

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\ f(\sigma) \\ \sigma &= c^T x \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ただし，(1) 式のブロック線図は，Fig. 1 で示され，その伝達関数 W (s) は次式を満足するものとする．

$$W(\infty) = 0 \quad (2)$$

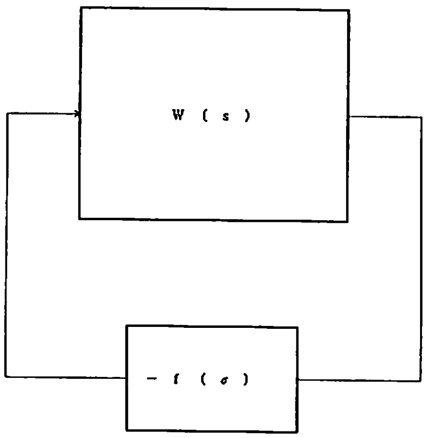

Fig. 1 Nonlinear feedback system

さらに，非線形関数 f (σ) は次の性質を満足するものとする[8]．

(i) f (σ) は連続で，微分可能である．

(ii) すべての σ に対して，σ f (σ) ≧ 0，かつ，

f (0) = 0である．

(1) 式のシステムはノミナルな状態での動的システムを表現している．しかしながら，(1) 式のシステムと実際のシステムとの間には何らかの誤差があるものと考えられる．そこで本論文においては，その誤差をパラメーター変動分 ΔA，Δb を用いて表現する．このとき，実システムは次式のように記述される．

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}\ f(\tilde{\sigma}) \\ \tilde{\sigma} &= c^T \tilde{x} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで，

$$\tilde{A} = A + \Delta A,\ \tilde{b} = b + \Delta b \quad (4)$$

である．また，(1) および (3) 式の平衡点は，それぞれ，$x = 0$，$\tilde{x} = 0$，であるものとする．

3. ノミナルなシステムの安定性

(1) 式のシステムの線形部分の伝達関数は，

$$W(s) = c^T (sI - A)^{-1}\ b \quad (5)$$

で与えられる．

そこで Anderson の結果 [6] にしたがい，次の定理が得られる [7]−[8]．

≪ 定理 1 ≫

(A, b, c) が W (s) の最小実現とする．このとき，もし

$$Z(s) = (n + qs)\ W(s) \quad (6)$$

が正実であるならば，次式を満足する実行例 P，ベクトル T，スカラ ω_0 が存在する．

$$PA + A^T P = -\ T\ T^T \quad (7)$$

$$Pb = nc + q A^T c - T\ \omega_0 \quad (8)$$

$$\omega_0^2 = q\ (c^T b + b^T c) \quad (9)$$

ただし，n は非負の定数であり，q は正の定数である．また，P は正定な対称行列である．さらに，極，零点消去をさけるため，s = (−n／q) は，W (s) の極ではないものとする． ■

次にルーリエ形リアプノフ関数を基盤とする安定定理が導かれる．

≪ 定理 2 ≫

もし伝達関数 Z(s) が正実であるならば (1) 式により与えられるシステムの平衡点は f (σ) の性質 (i), (ii) のもとに安定である. ■

(証明)

定理 2 は次のルーリエ形リアプノフ関数の存在により証明される.

$$V(x)=\frac{1}{2}x^{T}Px+\int_{0}^{\sigma}f(\sigma)d\sigma \tag{10}$$

(10) 式の時間導関数をもとめ, (7) ～ (9) 式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}[x^{T}T+\omega_{0}f(\sigma)]*[T^{T}x+\omega_{0}f(\sigma)]-n\sigma f(\sigma)\leqq 0 \tag{11}$$

が得られる. したがって, リアプノフの安定定理に基づきシステムは安定である. ■

4. システムのロバスト安定性

システムのロバスト安定性を保証するために, まずノミナルなシステムの安定性を保証し, 次にパラメータ変動まで考慮にいれたシステムの安定性を保証する. すなわち, ΔA, Δb のどのような条件のもとにおいて (1) 式のシステムの安定性が, (3) 式のシステムの安定性を保証できるかについて考察する.

そこで, 次の定理を導く.

≪ 定理 3 ≫

もし, 次の連立行列方程式を満足するベクトル T', およびスカラ ω_0' が存在するならば, (3) 式で与えられるシステムの平衡点は, f ($\tilde{\sigma}$) の性質 (i), および, (ii) のもとに安定である.

$$TT^{T}-[\Delta A^{T}P+P\Delta A]=T'T'^{T} \tag{12}$$

$$T\omega_{0}-(P\Delta b-q\Delta A^{T}c)=T'\omega_{0}' \tag{13}$$

$$\omega_{0}^{2}+q(c^{T}\Delta b+b^{T}\Delta c)=(\omega_{0}')^{2} \tag{14}$$

■

(証明)

定理 3 は次のように証明することができる. まず, (3)式のシステムに対するリアプノフ関数の候補として,

$$V(\tilde{x})=\frac{1}{2}\tilde{x}^{T}P\tilde{x}+\int_{0}^{\tilde{\sigma}}f(\tilde{\sigma})d\tilde{\sigma} \tag{15}$$

を考える. また, P が 3 章においてすでに求められていることを考慮に入れると, (15) 式の時間導関数は,

$$\dot{V}(\tilde{x})=-\frac{1}{2}[\tilde{x}^{T}T'+\omega_{0}'f(\tilde{\sigma})]*[T'^{T}\tilde{x}+\omega_{0}'f(\tilde{\sigma})]-n\tilde{\sigma}f(\tilde{\sigma})\leqq 0 \tag{16}$$

となる. ここで, T', ω_0' は (12) ～ (14) 式の連立行列方程式の解である. したがって, $\dot{V}$ は半負定値となり, リアプノフの安定定理にしたがい (3) 式のシステムは, 原点近傍において安定であることが保証される. ■

4. 1　行列方程式の解の存在条件

連立行列方程式 (12) ～ (14) 式は, 次式で置き換えることができる.

$$YY^{T}=D \tag{17}$$

ここで, Y, D はそれぞれ

$$Y=\begin{bmatrix}T'\\ \omega_{0}'\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$D=\begin{bmatrix}T\\ \omega_{0}\end{bmatrix}[T^{T}\ \omega_{0}]-\begin{bmatrix}(\Delta A^{T}P+P\Delta A) & (P\Delta b-q\Delta A^{T}c)\\ (P\Delta b-q\Delta A^{T}c)^{T} & -q(c^{T}\Delta b+b^{T}\Delta c)\end{bmatrix} \tag{19}$$

である.

このとき, もし対称行列 D が非負定値行列であるならば, D は, rank (G) = rank (D) を満足する,

ある行列Gにより$D=GG^T$と分解できることが知られている[9]．したがって，もしDが 非負定値行列であるならば，(12)～(14)式の行列方程式は解をもつことが確かめられる．以上のことから次の定理が導かれる．

≪ 定理4 ≫
もし，(19)式で与えられる対称行列Dが非負定値行列であるならば，(3)式のシステムの平衡点は安定である．■

4．2　ロバスト安定条件

(19)式で与えられる対称行列Dは

$$D = D_C - D_P \tag{20}$$

と変形することができる．ここでD_CおよびD_Pは

$$D_C = \begin{bmatrix} \tau\tau^T & \tau\omega_0 \\ \omega_0\tau^T & \omega_0^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$D_P = \begin{bmatrix} (\Delta A^T P + P\Delta A) & (P\Delta b - q\Delta A^T c) \\ (P\Delta b - q\Delta A^T c)^T & -q(c^T\Delta b + b^T\Delta c) \end{bmatrix} \tag{22}$$

であり，D_Cは定数項，D_Pはパラメータ変動にともなう不確定項を意味している．このとき，D_Cは実対称行列であることから，その固有値$\lambda(D_C)$はすべて実数であり，かつ，D_Cを対角化する直交行列Tが存在する．すなわち，D_Cは

$$T^T D_C T = \mathrm{diag}(\lambda_i) \tag{23}$$

のように対角化することができる．したがって，Dが非負定値行列であるならば，

$$\mathrm{diag}(\lambda_i) \geqq T^T D_P T \tag{24}$$

の関係を満足し，(3)式のシステムの安定性が保証される．また，次に示す関係を用いれば，(24)式の結果より少々厳しくはなるが計算は容易となる．

$$\lambda_i \geqq R_{ii} \tag{25}$$

$$R_{ij}\ (i \neq j) = 0 \tag{26}$$

ここで，R_{ii}，および，R_{ij}は

$$R = T^T D_P T \tag{27}$$

の各要素である．

5．例題システム

次式の例題システムについて考察する．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(\sigma) \tag{28.a}$$

$$\sigma = [\,1 \quad 0\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{28.b}$$

ただし，aは正の定数とする．最初に，(28)式のシステムの安定性について，伝達関数Z(s)の性質から論じる．(28)式に対するZ(s)は

$$Z(s) = (n + qs)\left[\frac{1}{s(s+a)}\right] \tag{29}$$

となる．ただし，極，零点消去をさけるため，ここでは，$n \neq 0$ かつ $a \neq n/q$ とする．Z(s)は次の3つの条件が満たされるとき正実となる[10]．

(i) Z(s)の要素はRe(s) > 0 に対し解析的である．

(ii) $Z^*(s) = Z(s^*)$

(iii) $Z(s) = Z^T(s^*)$ はRe(s) > 0 に対し半正定値である．

ここで，* は共役を表している．

結果的に，Z(s)が正実であるための十分条件は，

$$qa - n > 0 \tag{30}$$

となる．(30)式の条件のもとにZ(s)は正実であることから，(7)～(9)式を満足する行列P，ベクトルτ，スカラω_0，が存在する．実際にこれらの値を求めれば

次式のような結果を得る．

$$P = \begin{bmatrix} na & n \\ n & q \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\ (qa-n) \end{bmatrix}$$

$$\omega_0 = 0 \tag{31}$$

ここで，ΔA，Δbを次式のように定義する．

$$\Delta A \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Delta A_{12} \\ 0 & \Delta A_{22} \end{bmatrix} \Delta b \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

ことのき，D_C，D_Pはそれぞれ

$$D_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(qa-n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33.b}$$

$$D_P = \begin{bmatrix} 0 & n(a\Delta A_{12} + \Delta A_{22}) & n\Delta b_2 \\ n(a\Delta A_{12} + \Delta A_{22}) & 2(n\Delta A_{12} + q\Delta A_{22}) & \Delta b_2 - \Delta A_{12} \\ n\Delta b_2 & \Delta b_2 - \Delta A_{12} & 0 \end{bmatrix} \tag{33.a}$$

となる．このとき，(24)式の不等式にしたがえば

$$n = 0 \tag{34}$$

$$a \geqq \Delta A_{22} \tag{35.a}$$

$$\Delta b_2 = \Delta A_{12} \tag{35.b}$$

が得られる．(35)式が，(3)式で与えられる摂動システムが安定であるための十分条件である．ここで，(35.b)式の条件は厳しすぎるように思われるが，ある定数 m を導入して

$$1 + \Delta b_2 \equiv m\,(1 + \Delta A_{12}) \tag{36}$$

と変換すれば，

$$\sigma\ [\,m f(\sigma)\,] > 0 \tag{37}$$

すなわち

$$m = (1 + \Delta b_2) / (1 + \Delta A_{22}) > 0 \tag{38}$$

となる条件と等価であることがわかる．また，n = 0 としたので，本例題においてはリアプノフ関数としてエネルギー関数が選ばれる[11]．

6．おわりに

本論では，非線形フィードバックシステムのロバスト安定性を Anderson の定理に基づくリアプノフ－ポポフ法を用いて考察した．まず,ノミナルなシステムの安定性について考え，ルーリエ形リアプノフ関数の存在を保証した．次に，ノミナルなシステムに対して得られたリアプノフ関数を基盤として摂動システムの安定条件を導出した．さらに，パラメータ変動による摂動の許容範囲を与えるロバスト安定条件について，一つの提案を行った．この方法によればノルム表現を用いなくても，ロバスト安定条件を与えることができる．また，本論において提案した手法をルーリエ形非線形システムに適用しその有効性を示した．最後に，この研究は，文部省科学研究費一般研究Ｃの補助を受けたことを付記する．

参考文献

(1) C.A.Desoer, F.M.Callier and W.S.Chan : Robustness of stability conditions for linear time invariant feedback systems, IEEE Trans. Automat. Contr. , vol. AC－22, no. 8 , pp. 586－590, 1977.

(2) R.V.Patal, M.Toda and B.Sridhar : Robustness of linear quadratic state feedback desings in the presence of system uncertainty, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC－22, no.12, pp. 945－949, 1977.

(3) I. Postlethwaite, J. M. Edmunds and A.G. J.MacFarlane : Principal gains and principal phases in the analysis of linear multivariable

systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC−26, no. 2, pp. 32−46, 1981.

(4) R. M. Biernacki, H. Hwang and S. P. Bhattacharyya : Robust stability with structured real parameter perturbations, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC−32, no. 6, pp. 495−506, 1987.

(5) Lj. T. Grujic′ and Dj. Petkovski : On robustness of Lurie systems with a single nonlinearity, Control−Theory and Advanced Technology, vol. 2 no. 4, pp. 627−632, 1986 (Mita Press, Japan).

(6) B.D.O.Anderson : Stability of control systems with multiple nonlinearities, J. Franklin Inst., vol. 282, no. 3, pp. 115−160, 1966.

(7) N. Miyagi and H. Miyagi : Stability of dynamical systems with multiple nonlinearities, ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr., vol. 109, no. 12, pp. 410−413, 1987.

(8) H. Miyagi and K. Yamashita : Stability studies of control systems using a non−Luré type Lyapunov function, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC−31, no.10, pp. 970−972, 1986.

(9) 児玉, 須田：システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)

(10) H. Miyagi and A. R. Bergen : Stability studies of multimachine power systems with the effects of automatic voltage regulators, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC−31, no. 3, pp. 210−215, 1986.

(11) H.Miyagi, T.Ohshiro and K.Yamashita : Generalized Lyapunov function for Liénard−type nonlinear systems, Int. J. Contr., vol. 48, no. 2, pp. 805−812, 1988.