ラティス形結合過程予測器の理想フィルタへの一応用

ラティス形結合過程予測器の理想フィルタへの一応用

山下勝己*　桑江　晃**　宮城隼夫*

An Application of a Lattice Joint-Process Predictor to an Ideal Filter

Katsumi YAMASHITA*,　Akira KUWAE**,　Hayao MIYAGI*

Summary

The ideal low-pass filter has no phase delay but is impracticable system, because this filter needs future data. In this paper, we realize the ideal low-pass filter, using the data predicted by a lattice joint-process predictor. The effectiveness of the proposed filter is examined using digital simulation.

Key Words : Ideal Filer, Digital Filter, Lattice Joint-Process Predictor

1．まえがき

理想低域フィルタは，位相特性が零位相であることから，入出力信号間に位相遅れを生じない特徴を有するが，非因果モデルであるため実現不可能な回路となる[1]．

本論文では，ラティス形結合過程推定器[2]の構成法を基盤とした，kステップ先の観測値を予測するラティス形結合過程予測器[3]を理想低域フィルタに併用することにより，零位相の雑音除去フィルタを構築する．

以上の構成法を一般的に述べると共に，本フィルタの有効性をディジタルシュミレーションにより検証する．

2．ラティス形結合過程予測器をもつ理想フィルタ

オンライン制御を行う際には，システムの正確な状態量を把握しなければならないが，一般に観測信号は観測雑音を含んでいるため，何等かの平滑化処理を必要とする．本論文では，平滑化処理の一手法として理想低域フィルタを用いる．

受付：1991年5月13日

*工学部電子・情報工学科　Dept. of Electronics and Information Eng., Fac. of Eng.
**大学院工学研究科電気・情報工学専攻　Graduate Student, Electrical and Information Eng.

2.1　理想低域フィルタの設計

ディジタルフィルタの伝達関数を次式で定義する.

$$H(z) = \sum_{i=-k}^{k} a_i z^{-i} \tag{1}$$

但し, $a_i = a_{-i}$

このとき, 上式は次式のように書き直すことができ,

$$H(z) = h_0 + \sum_{i=1}^{k} h_i (z^i + z^{-i}) \tag{2}$$

但し, $h_i = a_i$

また, その周波数特性式は以下となる.

$$H(\exp\{jx\}) = |H(\exp\{jx\})| \exp\{j\phi(f)\} \tag{3}$$

但し,

$$x = \omega T_S = \pi f / f_S$$

$$|H(\exp\{jx\})| = h_0 + \sum_{i=1}^{k} h_i \cos(i\pi f / f_S)$$

$$\phi(f) = 0$$

なお, 上式において T_S および f_S はサンプリング周期およびサンプリング周波数を意味する.

一方, 振幅特性式が $|G(\exp\{jx\})|$ となるフィルタに対して, このフィルタの伝達関数の係数 h_i を

$$h_i = \frac{1}{2f_S}\int_{-f_S}^{f_S} G(\exp\{jx\}) |\exp\{ji\pi f / f_S\}| df \tag{4}$$

とすれば, (3)式の振幅特性が有限項のフーリエ余弦級数になることから, (4)式の h_i は与えられたフィルタの振幅特性と(1)式で定義されたシステムの振幅特性との2乗平均誤差が最小になるように近似された最適な係数となる.

次に, 上記の考え方を利用し理想低域フィルタの伝達関数の係数 h_i を決定する.

理想低域フィルタの周波数特性式は次式で示される.

$$G(\exp\{jx\}) = |G(\exp\{jx\})| \exp\{j\phi(f)\} \tag{5}$$

但し,

$$|G(\exp\{jx\})| = \begin{cases} 1 & |f| \leqq f_{max} \\ 0 & |f| > f_{max} \end{cases}$$

$$\phi(f) = 0$$

なお, f_{max} は遮断周波数を意味する.

それ故, 上記の考え方を適用すれば, (5)式の理想低域フィルタに対する伝達関数の最適な係数 h_i は次式のように求められる.

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{1}{2f_S}\int_{-f_S}^{f_S} G(\exp\{jx\}) |\exp\{ji\pi f / f_S\}| df \\ &= \frac{1}{2f_S}\int_{-f_{max}}^{f_{max}} \exp\{ji\pi f / f_S\} df \\ &= \frac{1}{i\pi} \sin(i\pi f_{max} / f_S) \end{aligned} \tag{6}$$

また, 理想低域フィルタの入出力関係式は次式となる.

$$\begin{aligned} \bar{y}_t = &\sum_{i=1}^{k} \frac{\sin(i\pi f_{max}/f_S)}{i\pi} y_{t+i} + \frac{f_{max}}{f_S} y_t \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \frac{\sin(i\pi f_{max}/f_S)}{i\pi} y_{t-i} \end{aligned} \tag{7}$$

このとき, 上式の右辺第1項が時刻 t における先見的な情報であることから, 上述の理想低域フィルタは実現不可能な回路となる. ここでは, ラティス形結合過程推定器の構成法[2]を基盤にした, kステップ先の観測値を予測するラティス形結合過程予測器[3]による予測値を(7)式の先見的情報として用いることにより, 零位相の雑音除去フィルタを構築する.

2.2　ラティス形結合過程予測器[3]

まず, ラティスフィルタの次数を p 次と仮定すれば, 時刻 t における前向きおよび後向き予測誤差 $f_{P,t}$ および $r_{P,t}$ はそれぞれ

$$f_{P,t} = \sum_{i=0}^{P} a_{P,i} y_{t-i} \tag{8}$$

$$r_{P,t} = \sum_{i=0}^{P} b_{P,i} y_{t-P+i} \tag{9}$$

但し,

$$a_{P,0} = b_{P,0} = 1$$

$$f_{P,t} = y_t - \hat{y}_t,\ r_{P,t} = y_{t-P} - \hat{y}_{t-P}$$

となり, また, $f_{P,t}$ および $r_{P,t}$ の次数に関する再帰式は次式で表される[4].

$$\begin{bmatrix} f_{P+1,t} \\ r_{P+1,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , \gamma_{P+1}{}^{f} \\ \gamma_{P+1}{}^{r}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{P,t} \\ r_{P,t-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

但し，$\gamma_{P+1}{}^{f}$ および $\gamma_{P+1}{}^{r}$ はそれぞれ前向きおよび後向き反射係数を示している．

次に，kステップ先の観測値を予測する予測器の次数をp次と仮定し，入出力関係式を次式で定義する．

$$\hat{y}_{t+k} = -\sum_{i=0}^{P} a^{d}{}_{P,i}\, y_{t-i} \tag{11}$$

但し，$a^{d}{}_{P,i}$ は予測係数である．

上式は，入力ベクトル $y_t = [\, y_t, \cdots, y_{t-P} \,]^T$ と後向き予測誤差ベクトル $r_t = [\, r_{0,t}, \cdots, r_{P,t} \,]^T$ とが一意の対応関係を有することから[2]，後向き予測誤差ベクトル r_t の関係として次式のように書き直すことができる．

$$\hat{y}_{t+k} = -\sum_{i=0}^{P} h_i\, r_{i,t} \tag{12}$$

但し，h_i は後に決定される未定係数である．

このとき上式の両辺に遅延演算子 z^{-k} を乗じ y_t との差をとれば，時刻tにおける予測誤差は次式となる．

$$e_{P,t} = y_t + \sum_{i=0}^{P} h_i\, r_{i,t-k} \tag{13}$$

但し，

$$e_{P,t} = y_t - \hat{y}_t$$

次に，最適なタップ係数 h_i を次式の評価関数

$$J_e = E\,[\, e_{P,t}{}^2 \,] \tag{14}$$

を最小化することにより決定する．

まず，(13)式の予測誤差を(14)式に代入し，後向き予測誤差が互いに直交関係にあることを利用して，h_i に関して最小化すれば次式の関係式が得られる．

$$E\,[\, y_t r_{i,t-k} \,] + h_i\, E\,[\, r_{i,t-k}{}^2 \,] = 0 \tag{15}$$

また，(13)式において第 i − 1 段目に対する関係が

$$e_{i-1,t} = y_t + \sum_{j=0}^{i-1} h_j\, r_{j,t-k} \tag{16}$$

となることから，y_t と $r_{i,t-k}$ の相互相関関数は次式となる．

$$E\,[\, y_t r_{i,t-k} \,] = E\,[\, e_{i-1,t}\, r_{i,t-k} \,] \tag{17}$$

ここで，後向き予測誤差が互いに直交関係にあることを利用している．

それ故，最適なタップ係数 h_i は(17)式を(15)式に代入することにより以下のように求められる．

$$h_i = -\frac{E\,[\, e_{i-1,t}\, r_{i,t-k} \,]}{E\,[\, r_{i,t-k}{}^2 \,]} \tag{18}$$

図1には，ラティス形結合過程予測器を併用した理想フィルタのブロック線図を示している．同図のラティス形結合過程予測器において時刻tにおける先見的情報を予測し，また，これらの予測値を理想フィルタに取込むことにより雑音除去を行う．なお，本フィルタの特徴は，予測器の次数更新に際し係数を逐次的に決定できると共に，フィルタ出力が位相遅れなく求められる点にある．

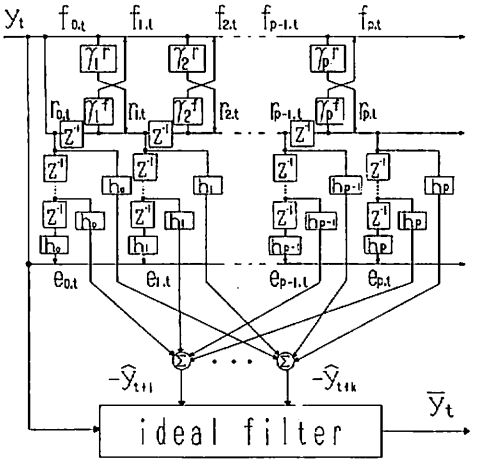
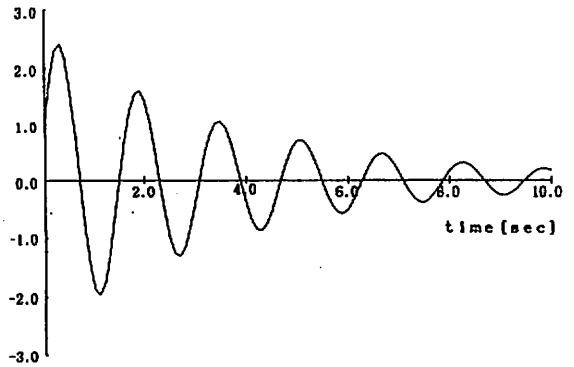


Fig. 1　Block−diagram of ideal filter by lattice joint−process predictor.

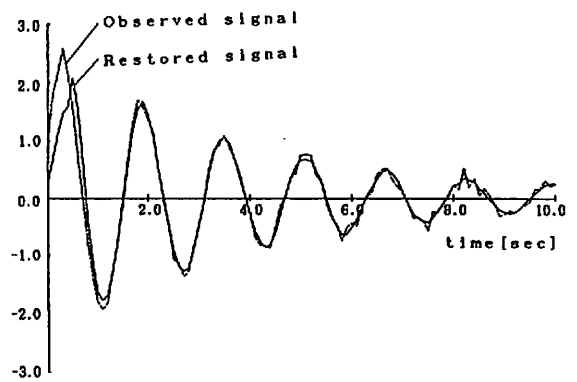
3. 実験結果

ラティス形結合過程予測器の有効性を検証するため，2次の自己回帰モデル

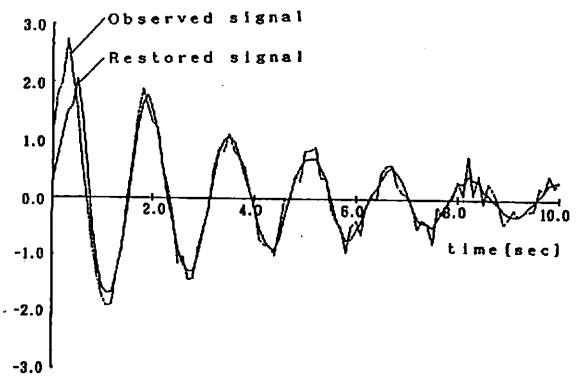
$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.8\,z^{-1} + 0.95\,z^{-2}} \tag{19}$$



(a) Original signal.



(b) Response for $\sigma^2 = 0.1$.



(c) Response for $\sigma^2 = 0.2$.

Fig. 2 Simulation result

にインパルスを加えて，得られる信号に白色雑音が加わった信号の平滑化を行う．図2の(a)には原信号を示している．また，図2の(b)には原信号に平均零，分散$\sigma^2 = 0.1$の白色雑音が加わった信号を，(c)には信号に平均零，分散$\sigma^2 = 0.2$の白色雑音が加わった信号を，図1で示されるラティス形結合過程予測器を併用した理想低域フィルタにより雑音除去したものである．同図より明らかなように，本フィルタ出力は位相遅れすることなく雑音除去されることが分かる．なお，本シュミレーションにおいては$f_{max} = 1.25$ [Hz], $f_s = 5.0$ [Hz]，また，予測器の次数pをp＝5予測サンプル数kをk＝5とした．

4. むすび

本論文では，kステップ先の観測値を予測するラティス形結合過程予測器を理想低域フィルタに併用することにより，零位相の雑音除去フィルタを構築した．また，本フィルタの有効性をディジタルシュミレーションにより検証した．

参考文献

(1) 辻井：伝送回路；コロナ社 (1983)

(2) S. Haykin : "Introduction to Adaptive Filters", Macmillan (1984)

(3) 山下・宮城・牛嶋・宮城："kステップ先予測を目的とラティス形結合過程予測器の一設計法"，信学論(A)（条件付掲載）

(4) B. Friedlander : " Lattice Filters for Adaptive prosessing", Proc. of IEEE, 70, pp.829−867 (1982)