一次遅れ要素をもつLiénard形非線形システムの一般化リアプノフ関数

一次遅れ要素をもつ Liénard 形非線形システムの一般化リアプノフ関数

宮城隼夫* 大城 健** 山下勝巳*

A Generalized Lyapunov Function for Liénard-Type Nonlinear System with First-order Lag Elements

Hayao MIYAGI*, Takeshi OHSHIRO** and Katsumi YAMASHITA*

Abstract

In this paper, the direct method of Lyapunov is used to study the stability of a Liénard-type nonlinear system with first-order lag elements. To establish the procedure for constructing Lyapunov function, the system is rewritten by a transformation. Then, a stability criterion for the system, which introduces a new type Lyapunov function, is presented. While the positive matrix P appeared in the Lyapunov function is obtained by solving matrix equations, the possibility of existence of P is discussed from the point of view of the condition the Luré-type Lyapunov function for the well-known nonlinear feedback control systems exists.

Key Words: Liénard- type nonlinear system,
Stability analysis, Lyapunov function

1. はじめに

Liénardの方程式はLRC回路で表現される電気システムをはじめ，回転機やバネの機械システムなどその適用範囲が広く，工学上重要な方程式の一つである。非線形システムの安定性解析の手段としてはリアプノフ法が一般的であるが，Liénardの方程式で記述されるシステムが独特な非線形性を有するため，効果的なリアプノフ関数構成法がなく，多くの場合，1個の2階の微分方程式から直観的に得られるシステムのエネルギーがリアプノフ関数として採用されている。

一方，発電機システムにおけるガバナの効果などに見られるように，システム内に制御系が存在したり，パラメータの変動がある場合，これらの動作は一次遅れ要素で与えられることがある。本論文では，最近筆者らによって開発されたLiénard形システムのリアプノフ関数成法[1,2]を基盤として，一次遅れ要素で与えられるパラメータ変動を考慮したLiénard形非線形システムの一般化リアプノフ関数の構成法について論じる。

2. 問題の設定

本論で対象とするシステムはFig.1に示されるような一次遅れ要素を持つLiénard形非線形システムであり，次式で示される。

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + g(y)\dot{y} + v + f(y) = 0 \\ &v = \alpha^T z \\ &\dot{z} = -Dz + R[y,\ \dot{y}]^T \end{aligned} \tag{1}$$

*琉球大学工学部電子・情報工学科
Dept. of Electronics and Information Engineering, Fac. of Eng.
**琉球大学大学院工学研究科電気・情報工学専攻
Graduate Student, Electrical and Information Engineering.

ここで，

$$\alpha^T=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_\ell]$$

$$z^T=[z_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ z_\ell]$$

$$D=\mathrm{diag}\,\{D_i\},\ i=1,\ 2,\ \cdots\ell$$

R：$\ell\times 2$ の定数行列

また，g(y)，f(y)は連続な関数であり，次の性質を満足するものとする[3]。

(i) $g(y)>0$かつ$g(y)$は原点近傍で偶関数の性質を有する。

(ii) $y\neq 0$に対し　$yf(y)>0$

(iii) $y\neq 0$に対し　$\phi(y)f(y)>0$ であり，

かつ　$|y|\to\infty$　のとき　$|\phi(y)|\to\infty$

ただし，$\phi(y)=\int_0^y (y)\,dy$

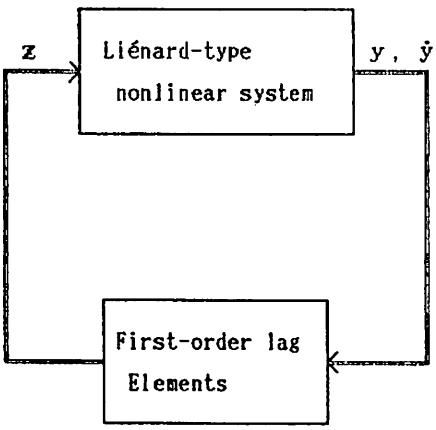

Fig. 1 : Liénard−type nonlinear system with first-order lag elements

(1)式において $\dot y=\omega-\phi(y)$ と変数変換し，y，ω，z に関する1階連立微分方程式に変形する。

$$\begin{aligned}\dot y&=\omega-\phi(y)\\ \dot\omega&=-\alpha^Tz-f(y)\\ \dot z&=-Dz+R\begin{bmatrix}y\\ \omega-\phi(y)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2}$$

さらに$R=[R_1,\ R_2]$，$X^T=[y,\ \omega,\ z^T]$ とおけば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot X&=AX-d\phi(y)-bf(\sigma)\\ \sigma&=c^TX\\ \dot\phi(y)&=g(y)c^T\dot X\end{aligned}\tag{3}$$

ただし，

$$A=\begin{bmatrix}0&1&O\\0&0&-\alpha^T\\R_1&R_2&-D\end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix}1\\0\\R_2\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}0\\1\\O\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1\\0\\O\end{bmatrix}$$

3. システムの安定性

(3)式は，もしg(y)が定数なら定数行列$\bar A$を用いて$AX-d\phi(y)=\bar AX$と記述されるので，いわゆる非線形フィードバック制御システムの形式となり，Anderson氏らによって確立された安定定理が適用される。しかしながら，本論ではgはyの関数としており，この定理を適用することはできない。そこでg(y)の非線形性をも考慮した次の安定定理を導く。

［定理］

(3)式のシステムは，g(y)，f(y)が（i），（ii），（iii）の条件を満足し，かつ次式を満たす正定行列Hと非線形関数を要素とする行列L(y)，W(y)が存在するなら安定である。

$$A^T\big(P+cr^Tg(y)\big)+\big(P+rc^Tg(y)\big)A=-L(y)L(y)^T\tag{4}$$

$$Pd-A^Tr+(r-A^Tck)g(y)=-L(y)W(y)\tag{5}$$

$$d^Tr+kg(y)=\frac{1}{2}W(y)^TW(y)\tag{6}$$

$$Pb-qA^Tc=m_1c\tag{7}$$

$$b^Tr+q=m_2\tag{8}$$

ここで，m_1，m_2は非負の定数，qは正の定数であり，正定行列Hは

$$H=\begin{bmatrix}P&r\\r^T&k\end{bmatrix}\tag{9}$$

と置き換えられている。

（証明）

上記の定理は次式で与えられる一つのリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X^T & \phi(y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & r \\ r^T & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \phi(y) \end{bmatrix} + q\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma \tag{10}$$

(10)式の V の時間導関数を求め，$c^T b = 0$，$c^T d = 1$ さらに(4)～(8)式の関係に着目して整理すれば

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{2}X\ [A^T(P+cr^Tg(y)+(P+rc^Tg(y))A]\ X \\ &-X^T\ [Pd-A^Tr+(r-A^T ck)g(y)]\ \phi(y) \\ &-\ [d^Tr+kg(y)]\ \phi(y)^2 \\ &-X^T[Pb-qA^Tc]\ f(\sigma)-(b^Tr+q)f(\sigma)\ \phi(y) \\ = &-\frac{1}{2}\ [X^TL(y)-W(y)\phi(y)]\ [L(y)^TX-W(y)\phi(y)] \\ &-m_1\sigma f(\sigma)-m_2f(\sigma)\phi(y) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。$\sigma = y$ の関係があるので，V は f(y)，$\phi(y)$に関する条件（ii），（iii）のもとに半負定値となる。また，条件（ii）のもとに(10)式の右辺第２項は正定値となり，H が正定行列なので V は正定値である。これらの結果より V はリアプノフ関数であり，(3)式のシステムは安定となる。 □

したがって，もし条件（i），（ii），（iii）が y のすべての領域で成立すれば，$\dot{V}$ が半負定値にもかかわらず，原点以外のシステムの任意の解軌道上で V が恒等的に零でない限り大域的な漸近安定性が得られる。しかしながら，多くの工学の問題では条件（i），（ii），（iii）は必ずしも y の全領域で成立せず，局所的に原点付近で成立するにすぎない。このとき，リアプノフ関数はその成立条件からシステムの漸近安定領域の評価に用いられることになる。

4. 行列方程式の解

(3)式で与えられる非線形システムのリアプノフ関数を構成するには(4)～(8)式の行列方程式を解いて P，r，k，L(y)，W(y) を求める必要がある。ここでは，これらの解の存在条件を非線形フィードバック制御システムに対するルーリエ形リアプノフ関数の存在条件から導く。(1)式における g(y) を原点近傍で近似した値を g_0 とおくと(3)式は形式的に非線形フィードバックシステムの形で表わされ，次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \tilde{A}X - bf(\sigma) \\ \sigma &= c^T X \end{aligned} \tag{12}$$

ただし，$\tilde{A} = A - g_0dc^T$ であり，A，d，b，c，は(3)式における値と同一の行列もしくはベクトルである。(12)式のシステムの線形部分の伝達関数 W(s) は

$$W(s) = c^T(sI - \tilde{A})^{-1}b \tag{13}$$

で与えられている。そこで Moore と Anderson 氏らの結果に従い，もし

$$Z(s) = (n+qs)W(s) \tag{14}$$

が正実となるように，非負の定数 n と正の定数 q が存在するなら，次式を満足する $\tilde{P}$，$\tilde{L}$ が存在する。

$$\tilde{A}^T\tilde{P}+\tilde{P}\tilde{A} = -\tilde{L}\tilde{L}^T \tag{15}$$

$$\tilde{P}b = nc+q\tilde{A}^Tc \tag{16}$$

Z(s) は次の３つの条件を満足するとき正実である。

（Ⅰ）Z(s) の要素は Re(s) > 0 に対し解析的である。

（Ⅱ）$Z^*(s) = Z(s^*)$

（Ⅲ）$Z(s) + Z^T(s^*)$ は Re(s) > 0 に対し半負定値となる。

ここで，* は共役を表している。

したがって，(15)，(16)式を満足する $\tilde{P}$，$\tilde{L}$ が存在すれば，ルーリエ形アプノフ関数[4)～7)]

$$V = \frac{1}{2}X^T\tilde{P}X + q\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma \tag{17}$$

が存在し，その時間導関数は次式で与えられる。

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}X^T\tilde{L}\tilde{L}^TX - n\sigma f(\sigma) \tag{18}$$

次に，(15)，(16)式を満たす $\tilde{P}$，$\tilde{L}$ の存在から，(4)～(8)式を満たす P，L(y)，W(y) の存在条件を導出する。もし，$g(y) = g_0$ なら $\phi(y) = g_0y$ となることに着目して(10)式の右辺第一項は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[X^T\ \ \phi(y)]\begin{bmatrix} P & r \\ r^T & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \phi(y) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}X^T[P + g_0cr^T + g_0cr^T \\ &\quad + kg_0^2cc^T]X \end{aligned} \tag{19}$$

と書くことができる。したがって，(17)式における $\tilde{P}$ が

$$\tilde{P} = P + g_0\,rc^T + g_0\,cr^T + kg_0^2\,cc^T \tag{20}$$

と分解できるものと仮定する。

(20)式と $\tilde{A} = A - g_0dc^T$ の関係を用いれば，(15)，(16)式の関係式はそれぞれ

$$\begin{aligned} &A^T(P + cr^Tg_0) + (P + rc^Tg_0)A \\ &\quad - 2[Pd - A^Tr + rg_0 - A^Tckg_0]c^Tg_0 \\ &\quad - 2cg_0[d^Tr + kg_0]c^Tg_0 = -\tilde{L}\tilde{L}^T \end{aligned} \tag{21}$$

$$Pb - qA^Tc + g_0c(b^Tr + q) = nc \tag{22}$$

となる。さらに，(21)，(22)式において

$$A^T(P + cr^Tg_0) + (P + rc^Tg_0)A = -L_0L_0^T \tag{23}$$

$$Pd - A^Tr + (r - A^Tck)g_0 = -L_0W_0 \tag{24}$$

$$d^Tr + kg_0 = \frac{1}{2}W_0^2 \tag{25}$$

となるように $\tilde{L} = L_0 - cW_0g_0$ と分解でき，かつ

$$Pb - qA^Tc = n_1c \tag{26}$$

$$g_0c(b^Tr + q) = n_2c \tag{27}$$

となるように，n が $n = n_1 + n_2$ と分解できるなら，(4)～(8)式と(23)～(27)式をそれぞれ対比することにより，(4)～(6)式を満たす L (y)，W(y) は(23)～(25)式を満たす L_0，W_0 で単に $g_0 = g(y)$ と置き換えることによって求められる。また，(7)，(8)式と(26)，(27)式の対比から $m_1 = n_1$，$m_2 = n_2/g_0$ であることがわかる。

5．例題システム

一例として，次の簡単な一次遅れ要素を持つ Liénard 形非線形システムを考える。

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + g(y)\dot{y} + f(y) + \alpha z = 0 \\ &\dot{z} = -Dz + R_1y + R_2\dot{y} \end{aligned} \tag{28}$$

上式を(3)式の形式に書き直せば

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ R_1 & R_2 & -D \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ R_2 \end{bmatrix} \phi(y) \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(\sigma) \\ \sigma &= [1 \;\; 0 \;\; 0]X \end{aligned} \tag{29}$$

$$\dot{\phi}(y) = g(y)\dot{y} = g(y)[1 \;\; 0 \;\; 0]X$$

となる。一方，g(y) の原点近傍における値を g_0（正の定数）と置くと次式で表される。

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ R_1 & R_2 & -D \end{bmatrix} X \\ &\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ R_2 \end{bmatrix}(g_0y) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(\sigma) \\ \sigma &= [1 \;\; 0 \;\; 0]X \end{aligned} \tag{30}$$

上式の線形部分の伝達関数W(s)は

$$W(s) = \frac{s + D}{s\{(s + g_0)(s + D) + \alpha R_2\} + \alpha R_1} \tag{31}$$

となり Z(s) が正実のための条件は

$$qg_0 - n > 0 \quad かつ \quad DR_2 - R_1 > 0 \tag{32}$$

となる。Z(s)が正実であれば(15)，(16)式を満足する $\tilde{P}$，$\tilde{L}$ が存在し，結果的に(23)～(27)式を満足するP，r，k，L_0，W_0 は

$$P = \begin{bmatrix} \eta R_2R_1q + \{g_0 + \eta R_2{}^2\}n_1 & n_1 & -\{\eta R_1q + \eta R_2n_1\} \\ n_1 & q & 0 \\ -\{\eta R_1q + \eta R_2n_1\} & 0 & \eta Dq + \eta n_1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -n_1 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix},\quad k = q$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2\eta R_1(R_1q + R_2n_1)} \\ \sqrt{2(qg_0 - n_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\eta D(Dq + n_1)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2(qg_0 - n_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

ただし

$$\eta = \frac{\alpha}{DR_2 - R_1}$$

で与えられる。この場合には，(17)式のルーリエ形リアプノフ関数とその時間導関数は次式となる。

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}q\Big[&\{\omega - (1 - \alpha')g_0y\}^2, + \alpha'(1 - \alpha')g_0y_2 \\ &+ \frac{R_2\alpha'g_0 + R_1}{D + \alpha'g_0}\,y^2 \end{aligned}$$

$$+\eta\left\{\sqrt{D+\alpha' g_0}\,z-\frac{R_2\alpha' g_0+R_1}{\sqrt{D+\alpha' g_0}}\,y\right\}^2\Bigg]$$

$$+q\int_0^y f(y)dy \tag{34}$$

$$\dot{V}=-q\Big[(1-\alpha')g_0(\omega-g_0y)^2+\eta D(D+\alpha' g_0)z^2+\eta R_1(R_2\alpha' g_0+R_1)y^2+\alpha' g_0 y f(y)\Big] \tag{35}$$

ただし，ここで$n_1=\alpha' g_0 q$と置き換えを行っている。

また，(10)式のV，(11)式の$\dot{V}$は(34),(35)において$\alpha'=0$と置き換えることにより得られ，次式となる。

$$V=\frac{1}{2}q\Big[\{\omega-\phi(y)\}^2+\frac{R_1}{D}y^2+\eta\left\{\sqrt{D}z-\frac{R_1}{\sqrt{D}}y\right\}^2\Big]+q\int_0^y f(y)dy \tag{36}$$

$$\dot{V}=-q\Big[\{\omega-\phi(y)\}^2+\eta D^2z^2+\eta R_1^2y^2\Big] \tag{37}$$

なお，(14)式のZ(s)における極一零点の消去は$n/q=0$あるいは$n/q=g_0$の場合に生じるので，理論構成上は$\alpha'\neq0$, $\alpha'\neq1$として取り扱われる。しかしながら，(34)式，(35)を参照すればわかるように，これらの値に対しても(34)式はリアプノフ関数となる。(36),(37)式において$\alpha'=1$, $R_1=0$に選べば文献8で構成されたリアプノフ関数に対応する関数が得られる。さらに，$\dot{y}=\omega-\phi$であり，リアプノフ関数をこの$\dot{y}$を用いて記述することもできる。

また，(35)の$\dot{V}$は半負定値であるが，g(y)，f(y)に関する条件が成立する範囲内で原点以外のシステムの任意の解軌道上で$\dot{V}$が恒等的に零にならないのでシステムは局所的に漸近安定となる。

Fig. 2～4は$g(y)=g_0=0.3$, $\alpha'=1.0$, $R_1=0.0001$, $R_2=0.002$, $f(y)=\sin(y+\delta_0)-\sin\delta_0$, $\delta_0=0.412$とした場合の具体例について(36)式のルーリエ形リアプノフ関数から得られる漸近安定領域を描いたものである。α'の値によって保証される安定領域は異なり，最適なα'の値はシステムの解軌道の方向に依存する。

なお，安定限界の決定には文献9の方法を用いた。また，qは単なるスケールファクタとしての作用しかなくqの選定は漸近安定領域の広さに影響を与えないので，計算の都合上単に$q=1$とした。

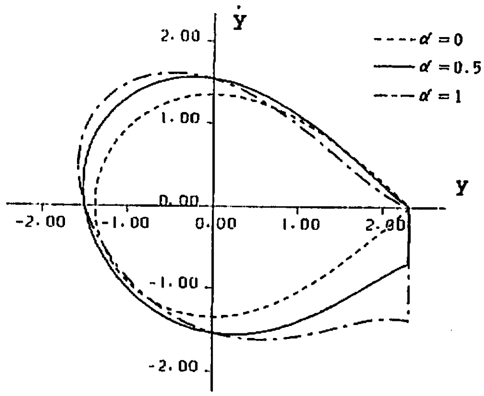

Fig. 2 : Cross-sections of stability boundaries in the plane z=0

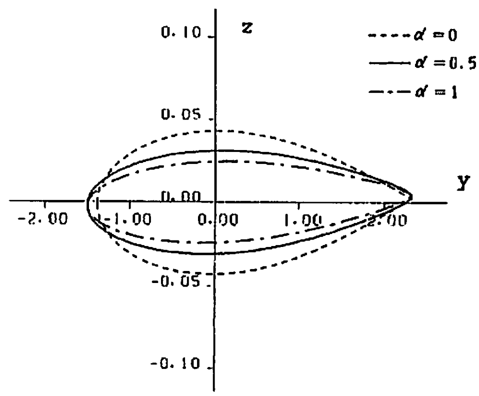

Fig. 3 : Cross-sections of stability boundaries in the plane ẏ=0

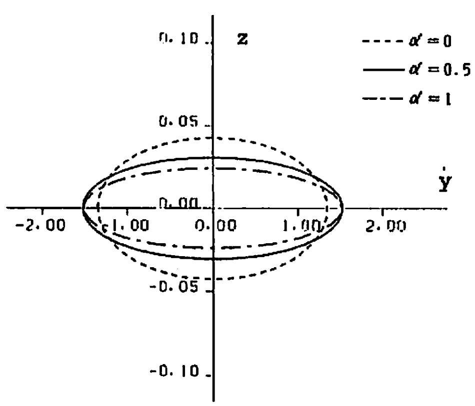

Fig. 4 : Cross-sections of stability boundaries in the plane y=0

6.　おわりに

本論文では，Liénard 形非線形システムにさらに一次遅れ要素を付加したシステムのリアプノフ関数構成法について論じた。最初にシステムの変換を行い，この変換されたシステムに対して安定定理を導くが，定理を証明するため，一つのリアプノフ関数を提案した。リアプノフ関数に含まれる正定行列Pは行列方程式を解くことによって得られる。行列Pの存在条件については，システムの一部の項を原点近傍で近似すればいわゆる非線形フイードバック制御システムの形式になることに着目し，ルーリエ形リアプノフ関数の存在条件より論じられている。