回路論への反傾写像の応用

Bulletin of the College of Science
University of the Ryukyus No.40: 1-4 (1985)

Use of contragredient mapping for circuit analysis

Masahiko HOSOYA

Department of Physics, University of the Ryukyus,
Nishihara, Okinawa, 903-01 JAPAN

(Received 7 May 1985)

ABSTRACT

It is shown that successive application of Thevnin's theorem can be done easily by introducing the contragredient mapping of the transformation of each usual four-terminal network.

回路論への反傾写像の応用

細 谷 将 彦

二端子回路はテブナンの定理により，次の回路と同等である。ここに現れる2個の定数 E_0, Z_0 を以後テブナンの定数と呼ぶことにする。

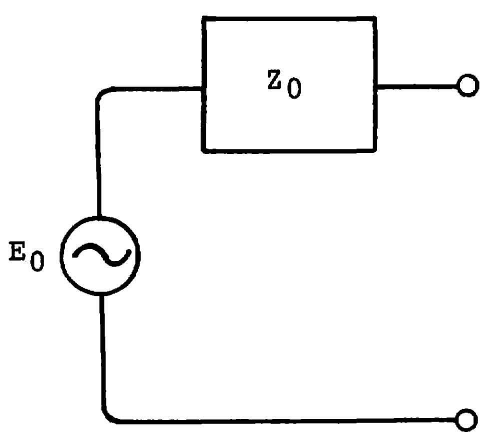

Fig.1 Thevenin equivalent network.

この定理は二端子回路の特性をわずか2個の定数に集約してしまうものであるから，一般の回路において，二端子回路とみなせる箇所にこの定理を適用すれば回路の解析は大いに簡単化される。しかしながら二端子回路も複雑な場合にはテブナンの定数を求めるのが面倒になる。そこで，この論文では下図のような二端子回路の場合，簡単にテブナンの定数を求める方法があることを示す。

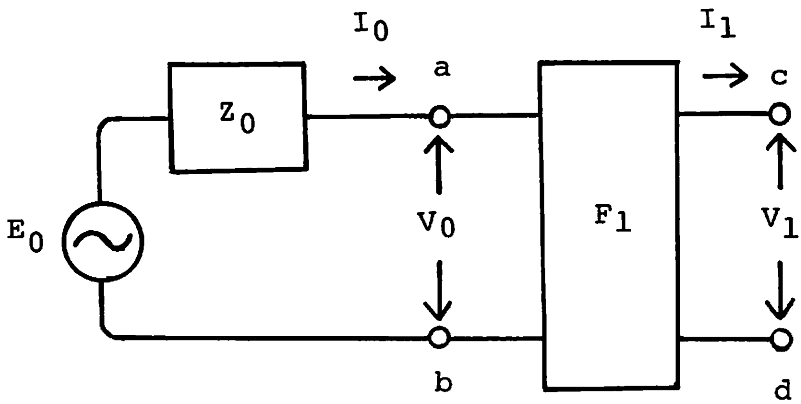

Fig.2 A Thevenin network coupled with a four-terminal circuit. The whole circuit should be transformed into another Thevenin equivalent network.

この回路は既にテブナンの定数が知られている二端子回路に，やはり既知の四端子回路 F_1 を接続した回路である。a−b 及び c−d における電圧，電流をそれぞれ図のように V_0, I_0, および V_1, I_1とすれば，次の関係が成り立つ。

$$V_0=E_0-Z_0\cdot I_0\cdots\cdots\cdot(1)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_0 \\ I_0 \end{pmatrix}\cdots\cdots(2)$$

ここでE_0, Z_0, A, B, C, D は既知である。

今考えるべき問題は a−b から左を見た二端子回路のテブナンの定数 E_0, Z_0 を，c−d から左を見た二端子回路のテブナンの定数 E_1, Z_1に変換する方法である。このこと自体はもちろん簡単に解ける問題であるが， c−d より右側に更に四端子回路が何段もつながった場合のために，一般性のある変換のしかたを提案するのが本論文の主旨である。

(1)式は次のように書くことができる。

$$\left(\frac{1}{E_0},\ \frac{Z_0}{E_0}\right)\begin{pmatrix} V_0 \\ I_0 \end{pmatrix}=1\cdots\cdots(3)$$

これを見ると$(1/E_0, Z_0/E_0)$というベクトルは(V_0, I_0)というベクトルを基底と考えたときの逆基底ベクトルになっていることがわかる。そこで，(V_0, I_0)が(2)式による線形変換を受けるのならば，その逆基底もしかるべき線形変換を受けることになる。(例えば堀淳一，1969) いわゆる反傾写像である。実際に求めてみると次の通りである。

$$\begin{pmatrix} 1/E_1 \\ Z_1/E_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{AD-BC} \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/E_0 \\ Z_0/E_0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (4)$$

特に相反定理が成り立っているときは，$AD-BC=1$であるから，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1/E_1 \\ Z_1/E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/E_0 \\ Z_0/E_0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (5)$$

このように，元の四端子行列から簡単に求まる行列で変換できるのである。しかもこの変換は下図のように，右側に更に四端子回路が何段もつながった場合にも逐次的に適用していけることは明らかである。これは回路の解析を数値的に行う際に極めて実用的である。

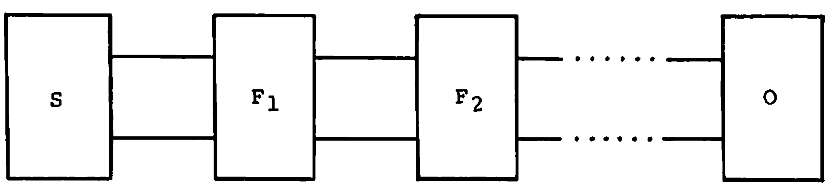

Fig.3 A combined circuit which can be analyzed by successive contragredient mapping defined in the present paper.

ここでSとOは二端子回路，F_1，F_2，…は四端子行列の与えられている四端子回路である。これに上記の変換をSの出力から順に右側へ実行してゆけば，各段の出力のテブナンの定数が数値として計算できる。従来の四端子行列の利用のしかたでは，入出力が電圧と電流であるが，電圧と電流を同時に入力側から決めることはできないので，数値を入れた解析を左から順次にやっていくことは一般にできなかったのである。そのためこれまでの逐次解析の試みは全て何らかの近似をほどこしているとみなせる。(藤井信生，1974；Sussman and Stallman, 1975)

本論文のやりかたを吟味してみると，回路解析に関する二つの一般的な新しい観点が生まれる。一つは四端子行列で真に変換すべきものは電圧・電流ではなく，テブナンの定数であることの一般化である。即ち，回路解析においては，電圧・電流のような「変数」(未知量) をなるべく使わずに，回路「定数」(既知量) の方を使うべきであるという考えである。従来の大抵の回路解析は，未知量である電圧・電流に対する方程式を立て，それを解くことを目標としてい

る。そのやり方では，回路全体に渡る連立方程式を解かねばならなくなる。部分的な解析は一般にはできないのである。ところが，本論文のように，既知の定数から新たな定数を求めるやり方では，出力側に接続される回路とは無関係に解析ができる。従って回路を何段かの部分に区切って，逐次的に計算していけるのである。二番目の観点は，回路の「定数」の範囲を能動回路の場合にまで拡張すべきであるということである。従来回路定数は最も一般化された場合でもインミタンスとして受動回路だけに定義される傾向があった。例えば二端子回路の定数としては，受動的な場合のインピーダンスやアドミッタンスのみが考えられてきた。これは受動と能動というはっきり物理的意味のちがう定数を同等に扱うことへの疑問によるかと思われる。しかし E_0 と Z_0 そのままを扱わず，(3)式の $1/E_0$ と Z_0/E_0 という定数にしてみれば，これらは出力特性のそれぞれ電圧と電流の係数であり，電圧と電流を数学的に同等のものとみなす限り，差別できないものである。両者の間には能動・受動の差は無い。実際 $1/E_0$ は理想電源電圧の逆数であるが， Z_0/E_0 はテブナンの回路をそれと同等なノートンの回路に置き変えたときの理想電源電流の逆数である。このように能動的な回路においても適当な量を定義しなおせば，それらは互いの間に本質的な違いのない定数となるのである。

以上の二つの観点を今回よりも一般的な回路に適用した新しい一般的な回路解析法について発表を準備中である。

謝　辞

線形写像の基本的概念に関して本学部数学科の石川弘教授に，ナレータ・ノレータの起源に関して東京工業大学の藤井信生助教授に，それぞれ親切な御教示を戴いたので心から感謝する。

文　献

藤井信生，1974，「リニア回路の設計」（産報出版） p.10, p.54

堀　淳一，1969，「物理数学 1」（共立出版） p.20

Sussman, G.J. & Stallman, R.M. (1975) Heuristic techniques in computer-aided circuit analysis. IEEE Trans. Circ. Syst. Vol. CAS-22: 857