非線型電流電圧特性のダイオードによる実現

非線型電流電圧特性のダイオードによる実現

大嶺真也*・細谷将彦**

*ＣＳＫシステムズ沖縄　**琉球大学理学部物質地球科学科（物理系）

OHMINE, Shinya* & Masahiko HOSOYA**: Realization of nonlinear current-voltage characteristics with diodes

Abstract

This is to show a general method to realize any zig-zag current-voltage characteristics by a circuit including diodes. It is shown that all the 2n ON-OFF states of n diodes are not realizable when the number of external terminal is small. In the case of two-terminal circuits, the simplest method to represent any zig-zag characteristics is provided and its applicability is discussed.

序　論

ダイオードは、ＯＮとＯＦＦという明確な２状態をもつ、典型的な非線型素子である。ゆえに、ダイオードを含む回路（以下「ダイオード回路」という）を理解することは非線型回路の基本を理解することである。しかし奇妙なことに、ダイオード回路は系統的な解析法が確立されておらず、従って設計法もない。そこでこの論文はその第１歩となることを目指す。ダイオード回路の基本的な問題は次のようなものである。

（１）与えられたダイオード回路に対し、各ダイオードがＯＮ・ＯＦＦいずれの状態をとるかを、試行錯誤によらず求める方法はあるか。

（２）任意の折れ線特性が与えられたとき、それを実現するダイオード回路はどんなものか。

（３）それらの中で最も簡単な回路はどれか。

このうち本論文では（２）をとりあげ、まずダイオード回路の特性はどのようなものかを明らかにし、次に出力特性が与えられたとき、ダイオードをいかに組み合わせれば実現できるかを論じる。また、それを考える中で（３）に対する答えが自ずと得られ、また（１）に対する手がかりが得られる。

受理：2001年６月29日

*CSK Systems Okinawa, Okinawa Media-Mall 3rd Floor, Tubogawa 245-3, Naha, Okinawa 900-0025, Japan

**Department of Physics and Earth Sciences, Faculty of Science, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 903-0213, Japan

ダイオード回路の出力特性

今問題にするダイオード回路とは、Ｆｉｇ．１のように、内部にダイオードを何個か含み、外部への出力端子をいくつか持つ回路である。

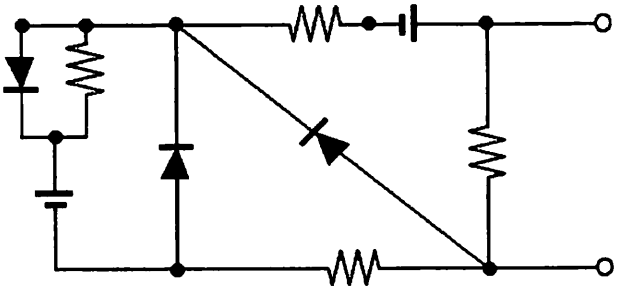


Fig. 1. An example of diode circuit.

この回路が与えられたとき、外部に対してどのような出力特性を持つかが最初の問題である。回路の構成素子はダイオードの他には、抵抗と直流電源のみとする。直流電源には電圧源と電流源があるが、両者は適当な考慮をはらえば互いに変換できるので、電圧源だけを考えることにする。ダイオードは理想ダイオードで、ＯＮのとき短絡、ＯＦＦのとき開放となるものとする。つまり、特性はＦｉｇ．２のようになる。

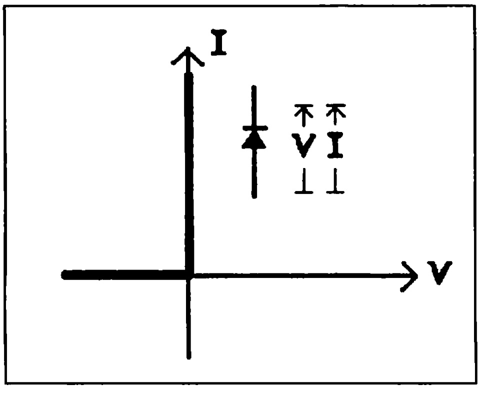


Fig. 2. Characteristic of a diode.

すなわち、　Ｖ＝０（短絡）とＩ＝０（開放）であるのだが、この２つの特性式は等号を不等号に変えれば、互いに他の特性式が成り立つ範囲を指定している。すなわち、
Ｖ＜０がＩ＝０の成り立つ範囲だし、Ｉ＞０がＶ＝０の成り立つ範囲である。このように特性式の等号を不等号に変えたものが他の特性式の成立範囲を示す条件になるのは、一般に起こることである。

ダイオードはＯＮとＯＦＦの２状態をとれるから、ダイオードをｎ個含む回路は２ｎとおりの状態をとりうる。しかし、それが全部実現するのではなく、２端子の場合は（ｎ＋１）とおり、３端子の場合は（ｎ（ｎ＋１）／２＋１）とおりに過ぎない。これを以下に示す。

一般に回路における任意の枝の電圧Ｖは、次のように外部端子間の電圧Ｖiの線形結合になる。

$$V=(\Sigma \alpha_i V_i)+\beta$$

ここで、α_i、β は定数である。
もし、この枝の素子がダイオードであるならば、この式を境界として、ＯＦＦからＯＮ、またはＯＮからＯＦＦに切り換わる。ゆえに、m端子回路ならば、(V_1, V_2, V_3, ・・・Vm)のm次元空間において、Ｖ＝０という超平面を境に、空間はこのダイオードがＯＮとＯＦＦの領域に分かれる。別のダイオードはまた別の超平面によって、空間を２分し、新しく領域を作り出す。しかし、ダイオードが１つふえるごとに、領域は２倍になるわけでは必ずしもない。

たとえば、３端子の場合、そのうちどれか１端子はアースであるから、残り２端子の電圧Ｖ１とＶ２が外部変数である。回路中のダイオードのＯＮ・ＯＦＦ境界は（V_1, V_2）の２次元空間にあらわすことができる。Ｆｉｇ．３において①、②、③がそれぞれダイオードの境界であるとする。①と②によって空間は４つに分けられるが、その４つのうち③は３つとしか交わらない。ゆえに③が付け加わっても、空間は７つにしか分けられない。このように、ダイオードが増えても、その境界はそれまでの領域すべてを通るとは限らないので、領域を２倍にふやすとは限らないのである。今の場合、図には書いていないが、４番目のダイオードによる境界を追加すれば、それによって増える領域は４個である。一般に３端子回路で、ｎ番目のダイオードは領域をｎ個ふやすので、ｎ個までの領域の数を求めてみると、（ｎ（ｎ＋１）／２＋１）個になる。

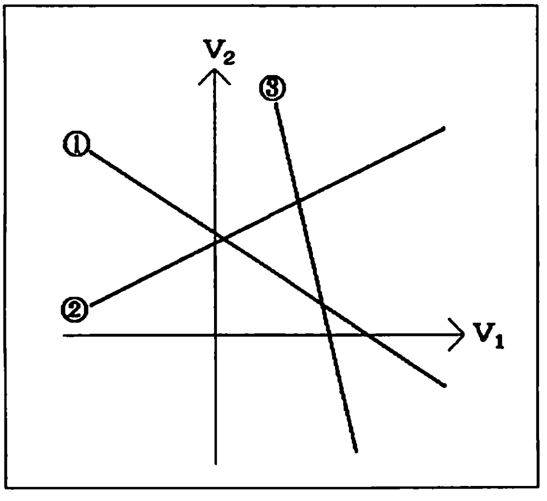


Fig. 3. Boundary lines which separate state "ON" from "Off" of each diode.

特に２端子のばあいは、外部変数は１個であるので、１次元空間、すなわち直線を境界点で分割してゆくことになるから、１個のダイオードによって領域は１つしかふえず、ｎダイオードの場合、（ｎ＋１）とおりしか状態はないことになる。従って、外部端子の電圧を－∞から＋∞まで変化させるとき、各ダイオードの境界点をそれぞれ１回ずつ通る。この間、各ダイオードが、ＯＮからＯＦＦ、またはＯＦＦからＯＮに切り換わるのは１度だけである。

なお、ダイオード回路が電源を含まない場合（受動回路）は、上のVの式が定数項を含まないので、２端子回路はダイオードを何個含んでいても、境界点が全部原点に重なってしまい、状態は２とおりしかない。

ゆえに、２端子２ダイオード回路の出力特性はたとえばＦｉｇ．４のようになる。

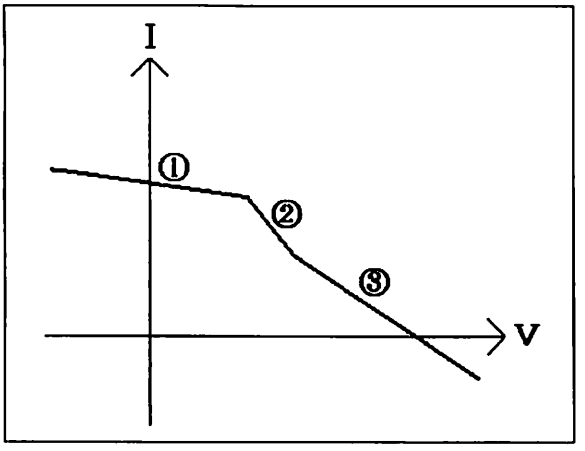


Fig. 4. Characteristic lines of two diodes.

ここで３つの出力直線をVが低い方から次のように（１）、（２）、（３）とすると

$$I = G_1 V + I_1 \qquad (1)$$

$$I = G_2 V + I_2 \qquad (2)$$

$$I = G_3 V + I_3 \qquad (3)$$

（１）の成り立つ範囲は（２）の等号を不等号に変えることにより、

$$I \leqq G_2 V + I_2 \qquad (4)$$

（２）の成り立つ範囲は、（１）と（３）の等号を不等号に変えることにより、

$$G_1 V + I_1 \geqq I \geqq G_3 V + I_3 \qquad (5)$$

であり、同様に（３）の範囲は

$$I \geqq G_2 V + I_2 \qquad (6)$$

である。このように、特性の式は、それに隣り合う特性の成立範囲を指定する不等式を与える。

３端子以上になったときは、特性が複数の式で与えられるだけで同様である。たとえばＦｉｇ．５のような３端子２ダイオード回路を考えてみよう。

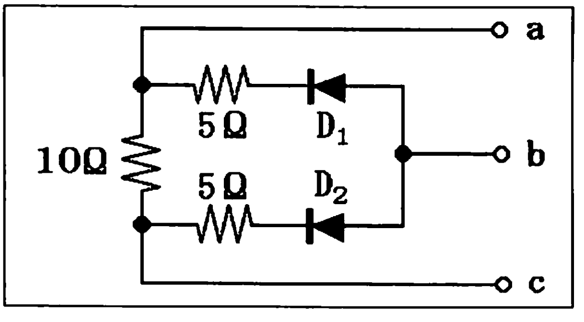


Fig. 5. An example of 3-terminal network.

特性は次の4組の式で与えられる。

(A) $D_1=ON,\ D_2=ON$; $V_a \leq V_b$ および $V_b \geq 0$ で

$$I_a = (3/10)V_a - (1/5)V_b \quad (7)$$

$$I_b = -(1/5)V_a + (2/5)V_b \quad (8)$$

(B) $D_1=ON,\ D_2=OFF$; $V_a \leq V_b \leq 0$ で

$$I_a = (3/10)V_a - (1/5)V_b \quad (9)$$

$$I_b = -(1/5)V_a + (1/5)V_b \quad (10)$$

(C) $D_1=OFF,\ D_2=ON$; $V_a \geq V_b \geq 0$ で

$$I_a = (1/10)V_a \quad (11)$$

$$I_b = (1/5)V_b \quad (12)$$

(D) $D_1=OFF,\ D_2=OFF$; $V_a \geq V_b$ および $V_b \leq 0$ で

$$I_a = (1/10)V_a \quad (13)$$

$$I_b = 0 \quad (14)$$

ダイオード回路の最も簡単な等価回路

さて、ダイオードの問題を一般的に考えるために、ダイオード回路を最も簡単な等価回路に変換する。ダイオードを含まない回路の最も簡単な等価回路はＨｏｓｏｙａ[1,2]によって与えられている。一般に、その回路はテブナン素子、すなわち理想電圧源と抵抗が直列に接続された素子によって構成される。ただし、そのうち理想電圧源はループをなす場合、消去することができる。その等価回路構成法の骨子は、外部との端子以外に内部の節点があれば、その全てを一般化Ｙ－Δ変換により消去できるので、内部の節点は一つもないのが、最も簡単な等価回路になるということである。ダイオード回路においても、ダイオードのつながっていない内部節点は一般化Ｙ－Δ変換により全て消去できる。しかし、ダイオードがつながっている節点は、それが最も単純な３端子Ｙ型回路の場合さえΔ型回路に変換不可能（付録参照）なので、一般にはもちろん消去できない。ｎ個のダイオードを含む回路では、最悪の場合、全てのダイオード両端の節点が内部にあり、かつそれらの節点が全て別々となるから、１つのダイオードについて２個、合計２ｎ個の内部節点は消去できない。従ってｍ端子回路では、ｎ個のダイオードを含むばあい、最も簡単な等価回路の節点は一般には（ｍ＋２ｎ）個である。そして、ダイオードの両端間に並列に入っている枝は通常の並列合成により、１個のテブナン素子に変換できる。この結果を２端子回路で、ダイオードが１個、２個、３個の場合についてＦｉｇ．６に示す。

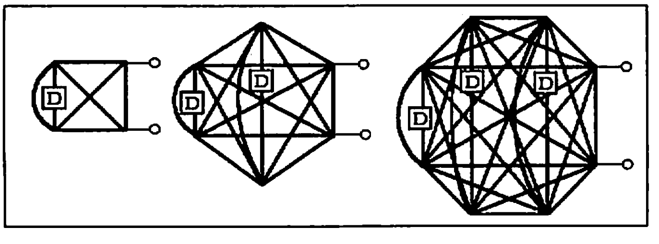


Fig. 6. The simplest equivalent circuits of two-terminal 1-, 2-, 3-diode ones which are reduced with star-mesh transformation.

ここで四角の中にDと書いたのがダイオードで、太い実線で書いた個所には一般にテブナン素子が入る。

更に簡単な等価回路

さてm端子nダイオード回路は（2m+n）節点の等価回路にまで簡単化できる。この結果は一般的なものであるから、元の回路が実在するものである限り、必ず求められる等価回路である。しかし、Fig. 6に見られたように、あまりに多くの節点を持ち、その結果素子の数も多くなる。そこで、もっと簡単な等価回路がないか検討してみる。すると、2端子回路の場合、単に（n+1）個の状態を持つダイオード回路を作り出すだけなら、もっと節点を減らし、素子を減らすことが出来る。1つの特性をあらわすには1個のテブナン素子が必要であるから、（n+1）個の特性をあらわすには（n+1）個必要であると単純に考えれば、テブナン素子（n+1）個とダイオードn個を組み合わせれば良いことになるが、たしかめてみると実際そうである。ただし、このような回路が任意のダイオード回路に等価にできるかどうかは疑問であるので、以下、この可能性を吟味してゆく。

まず、この考えを2端子1ダイオードに適用すれば、テブナン素子2つとダイオード1つを組み合わせれば良いはずである。3個の素子を2端子の間に接続する方法はFig. 7の6通りである。しかし、そのうち×をつけた4種はダイオードがONかOFFのいずれかの状態で、2端子間が短絡または開放となるので、任意の特性を持たせることはできないから、失格である。結局、○をつけた2とおり、すなわち第2と第4の回路のみが有効である。第2の回路は、ダイオードがONのとき、開放電圧V_1、内部抵抗R_1、OFFのとき、開放電圧V_1+V_2、内部抵抗R_1+R_2という単純な特性をもち、任意の2特性をシミュレートできる。また第4の回路は、ダイオードがONのとき、開放電圧がV_1、内部抵抗がR_1、OFFのとき、開放電圧が（$R_2V_1+R_1V_2$）／（R_1+R_2）、内部抵抗がR_1R_2／（R_1+R_2）となり、やはり任意の2特性をシミュレートできる。

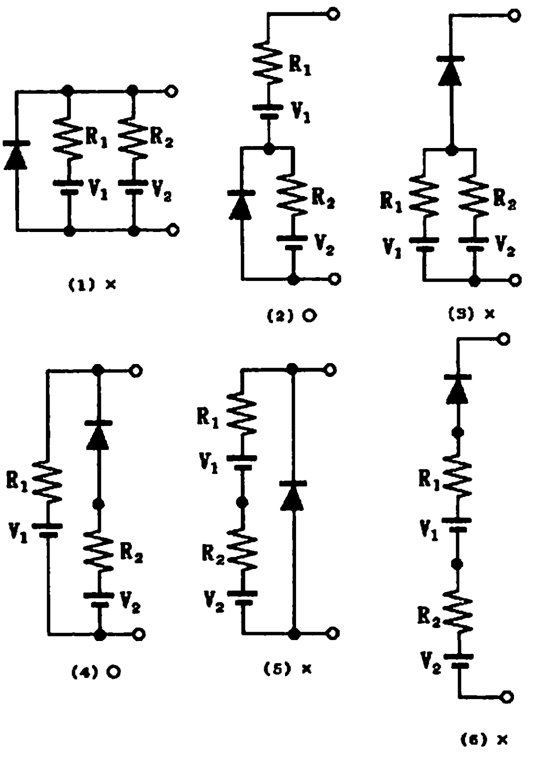


Fig. 7. A set of the three elements, one diode and two Thevenin's elements.

これを眺めると、基本の素子として、テブナン素子の他に、ダイオード１個とテブナン素子１個を並列接続したもの、及び同じく直列接続したものをとることを思いつく。すなわちＦｉｇ．８の３種の基本素子で等価回路が作られると期待される。以後、これらをテブナン素子Ｔ、並列ダイオード基本素子Ｄｐ、直列ダイオード基本素子Ｄｓと呼ぶ。

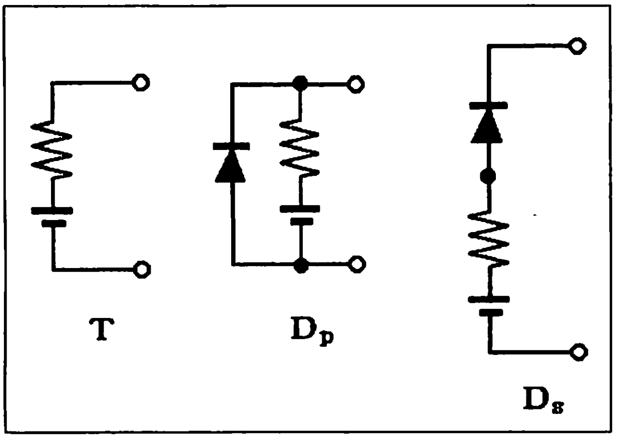


Fig. 8. Three fundamental elements which constitutes the simplest equivalent circuit.

なお、これら３種の基本素子に帰着させられない回路は、ダイオードｎ個でテブナン素子（ｎ＋１）個で作られる回路においても存在する。例えばダイオード２個でテブナン素子３個の場合、Ｆｉｇ．９のような回路がそれである。従って、以下の考察は一般のダイオード回路の等価回路を求めるのではなく、２端子の場合最も簡単に（ｎ＋１）個の特性を持つ回路を作るにはどうしたらよいかというものである。

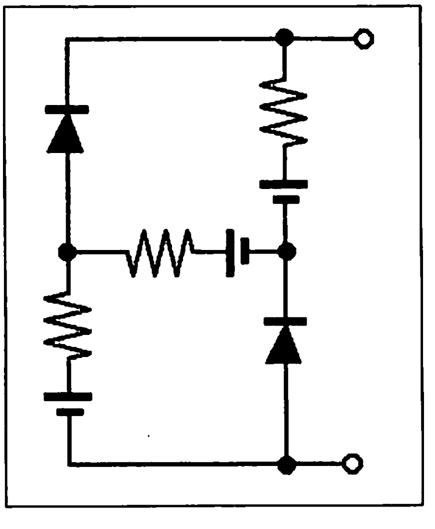


Fig. 9. An example which does not consist of the three fundamental elements.

さて上記３種の素子を、次の規則を守りながら、直列または並列に合成していけば、ｎ個のダイオードを使って、一応（ｎ＋１）個の状態をそれぞれ任意の特性に合致させて作り出すことができる。

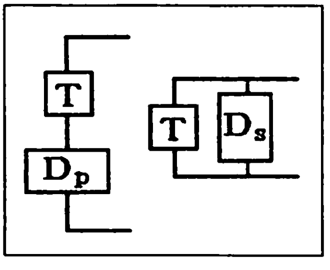
（１）　必ず１個のＴから出発し、それにD_pやD_sを追加していく。

（２）　D_pを増やすときはそれまでの回路に直列に入れる。

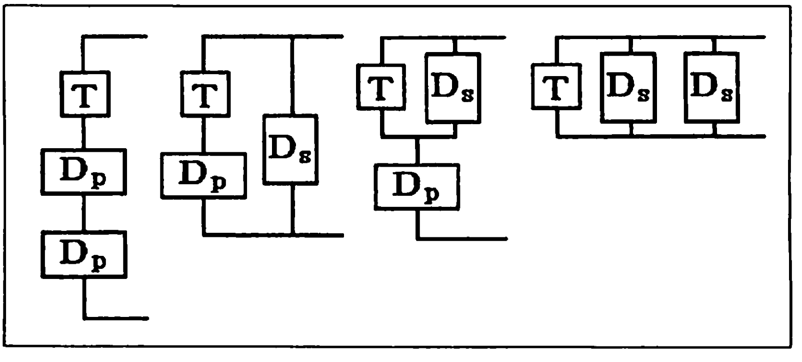
（３）　D_sを増やすときはそれまでの回路に並列に入れる。

規則（１）が必要なのは、D_pやD_sだけだと、それら全部がそれぞれ短絡や開放になったときに、合成回路も短絡か開放になり、一般の特性に合致させることが不可能だからである。また（２）は、D_pがそれまでの回路と並列に入ると、ダイオードがＯＮになったときに、それまでの回路を全て短絡してしまうことによる。同様に（３）はD_sがそれまでの回路と直列に入ると、ダイオードがＯＦＦになったときに、それまでの回路を全て開放してしまうことによる。これによれば、最初Ｔだけの回路から出発して、ダイオードを１つずつふやしていく際に、D_pにするかD_sにするか２通りの選択があるから、ｎダイオードの回路は2^nとおりあることになる。ｎ＝３以下の場合に、これらをＦｉｇ．10に示す。

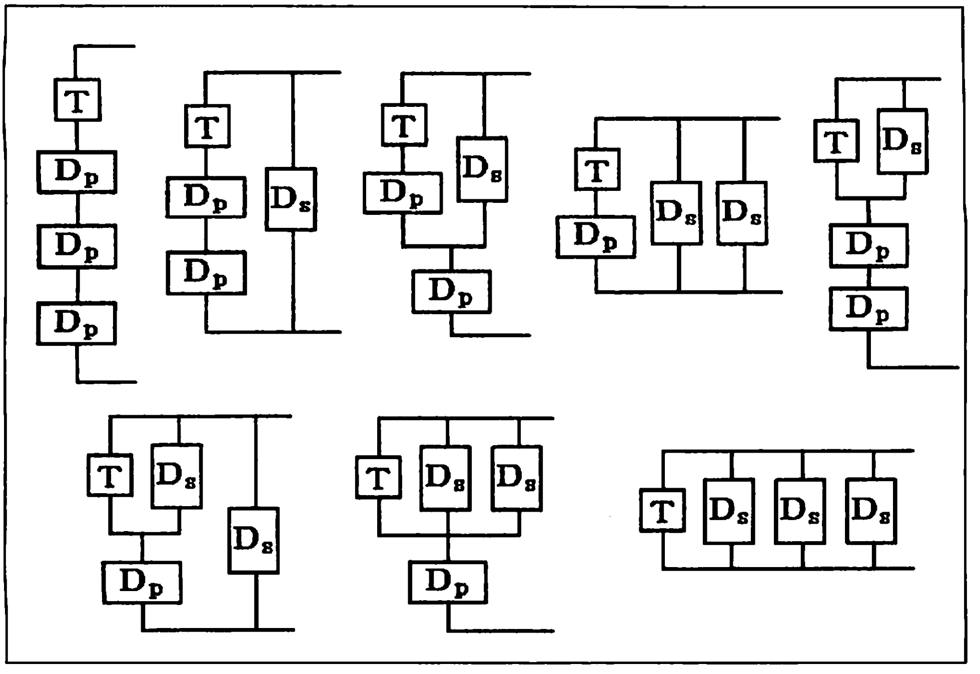
このような回路を並直列最小等価回路と呼ぶことにする。上記の３つの規則に従って、並列と直列の組み合わせのみによって作られている回路の意味である。並列と直列のみによって作られていても、上記の規則を満たさないものは、含まれるテブナン素子のパラメータをどこかで減らしてしまうので、こうは呼ばない。



（a）1-diode.



（b）2-diodes.



(c) 3-diodes.

Fig.10. The simplest equivalent circuit of two-terminal one with diodes.

並直列最小等価回路の特性

n個のダイオードと（n＋1）個のテブナン素子を用いれば、一応（n＋1）とおりの特性をもつ回路が作れることがわかったが、この回路は果たして任意の特性を表すことができるであろうか。ただし、1ダイオードの場合は、すでに任意の特性を表せることは示した。そこで、次に2ダイオードの場合を検討してみる。

2ダイオード回路の特性は3つの直線からなる。それらの傾きを電圧の低い側から順にG_A, G_B, G_Cとする。G_A, G_B, G_Cの変化で分類するとＦｉｇ．11のように4とおりある。これらを簡単に表すために、折れ曲がりのしかたに名前をつける。折れ曲がり点で上に突き出た形をＭＯＵＮＴＡＩＮ型、下に突き出たのをＶＡＬＬＥＹ型と呼び、それぞれＭ、Ｖと略することにする。これを使えば、Ｆｉｇ．11の4つの特性は、ＭＭ、ＭＶ、ＶＭ、ＶＶと表せる。

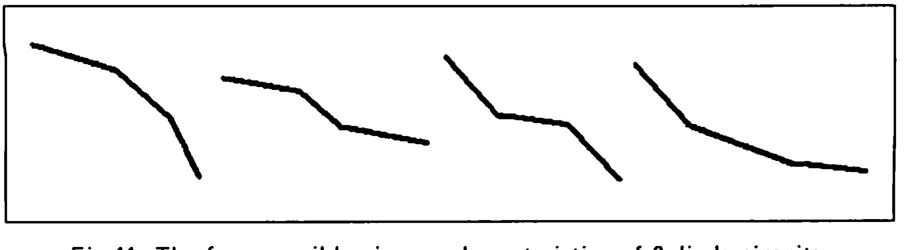


Fig.11. The four possible zig-zag characteristics of 2-diode circuits.

電圧を低い側から変化させていくと、M型の点ではどれか1個のダイオードがＯＦＦからＯＮになり、Ｖ型では逆のことが起きるのである。これはダイオードを抵抗の1種とみなすなら、抵抗というものの本質から一般に言えることである。すなわち、ダイオードがＯＦＦからＯＮになることは、その抵抗が無限大からゼロになることであるが、回路においてどこかの個所の抵抗が低くなれば、全体の抵抗も必ず低くなるのである。それは、合成抵抗というのは、2端子間の電流の通りやすさを総合的に表すものであるが、回路中のどこか1箇所でも通りやすくなれば、必ず全体的にも通りやすくなることを考えればわかる。

並直列最小等価回路の便利な特徴の一つは、外部端子2個のうち1個をアースと決めれば、全ての枝にアースに近い方と遠い方の区別がつき、これにより向きを定義できることである。アースに遠い方から近い方への向きを「下（くだ）り」、逆を「上（のぼ）り」と呼ぶことにする。すると、M型の点で切り換わるダイオードは下りを向いていなければならず、Ｖ型で切り換わるダイオードは上りを向いていなければならない。すなわちM型の点の数は下り向きダイオードの数と一致し、Ｖ型は上り向きと一致する。以上により、特性が知れれば、ダイオードの向きや、そのＯＮ・ＯＦＦについて、かなりのことがわかる。特に、1ダイオード回路は特性によって完全にダイオードの向きもＯＮ・ＯＦＦもわかる。たとえばM型ならダイオードは下り向きであり、外部電圧の低い側でＯＦＦ、高い側でＯＮである。このように、並直列最小等価回路では、序論の（1）の問題にある程度答えることができるのである。

さて、2ダイオード並直列最小等価回路はＦｉｇ．10（ｂ）の4とおりである。これらの回路は上記MM，ＭＶ，ＶＭ，ＶＶの4とおりの特性を全てあらわすことができるであろうか。調べてみるといずれの回路も4とおり全ての特性を表せる。

以上により、2個以下のダイオード回路に対しては、並直列最小等価回路は万能の等価回路である。しかし、3ダイオード回路になると、例えばＭＶＭの特性をＦｉｇ．10（ｃ）の最初の回路で表そうとすると、特性直線の傾きを電圧の低い側から順にG_A，G_B，G_C，G_Dとして、

$$1/G_B+1/G_D>1/G_C \qquad (15)$$

の関係が成り立たない場合、負性抵抗を用いなければ等価回路にはならない。ゆえに、3個以上のダイオード回路では並直列最小回路は万能ではない。しかし、たとえばＦｉｇ．10（ｃ）の2番目の回路を使えば、任意のＭＶＭ特性に合わせられる。従って、3ダイオードにおいても、8個の回路から選ぶことまで許せば万能になっている。

これが、もっとダイオードの多い回路になった場合、どのような並直列最小回路を選んでも表せない特性が存在しないだろうか。これを将来の課題として残しておく。また、2以上の端子の回路の場合、素子の数を最も減らした等価回路を求めるのも課題である。

付録：＜ダイオード回路における内部節点の消去不可能性＞

ダイオード回路においては、スター・メッシュ変換は一般に不可能である。たとえば次のＦｉｇ．12のような単純な回路さえ変換できない。

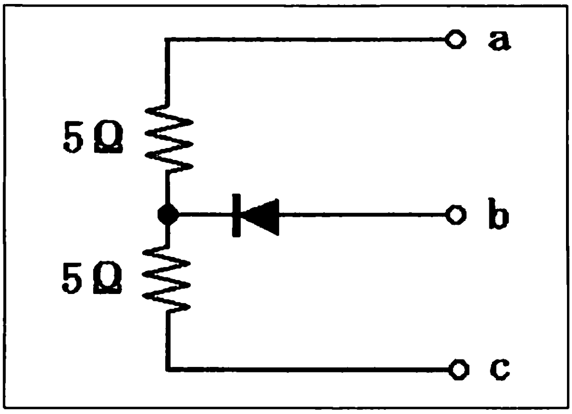


Fig.12. A Y-type example which has no corresponding Δ-type circuit.

それは対称性によって、次のようにわかる。この回路は端子ａとｃの交換に対して不変である。今、これに対応するΔ型回路を考え、端子ａ，ｂ，ｃ相互の間に入る素子をY_{ab}，Y_{bc}，Y_{ca}で表せば、ａとｃの交換に対して不変であるためには、まずY_{ca}は方向性のある素子であってはいけない。ゆえにＹｃａはダイオードを含んではいけない。次にY_{ab}とY_{bc}は同じ素子であって、もし方向性があるならｂ端子からみて、ａとｃに同じ向きを持たなければいけない。ゆえにダイオードが入るとすれば、ここに入る以外にはない。そこでできるだけ簡単になるように考えると、Ｆｉｇ．６の回路になる。しかし、元の回路は１ダイオードであるのに、２ダイオードになっているのは、起こり得る状態が２から３に増えているはずで、等価には成り得ないと予想できる。実際Ｆｉｇ．６の回路は、どれか1つの端子を開放して、他の２端子間の特性をみたならば、上の回路と同じになるが、３端子の全てに入力があったときには等価にならない。例えば上の回路でａｃ間に10Ｖかかっているとき、ｂｃ間に電流を流すには５Ｖ以上必要だが、Ｆｉｇ．６の回路ではｂｃ間に０Ｖ以上で電流が流れる。

引用文献

1）M. Hosoya, "The simplest equivalent circuit of a multi-terminal network", Bulletin of the Faculty of Science, University of the Ryukyus No.70, pp. 1-10, 2000.

2）M. Hosoya, "The straightforward expansion of Helmholtz-Thevenin theorem to multi-terminal networks", Bulletin of the Faculty of Science, University of the Ryukyus No.71, pp. 39-45, 2001.