琉球大学学術リポジトリ

ＡＣＴによる熟練者の問題解決研究

メタデータ	言語:
	出版者: 琉球大学教育学部附属教育実践研究指導センター
	公開日: 2008-11-19
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 狩俣, 智
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/8030

ＡＣＴによる熟練者の問題解決研究

狩　俣　　智*

（1994年８月31日受理）

数学の熟練者が自己の専門分野の問題をどのように解決するかについて情報処理心理学の知見に基づいて考察した。

大学院で数学を専攻する学生が本研究の被験者になった。被験者に大学の専門課程の問題を発語思考で解かせて被験者の言語プロトコルを採取した。

言語プロトコルは，認知のプロセスモデルＡＣＴに照らして解析され，推論の軌跡を示す証明木，スキーマを表現する宣言型符号化構造，手続き型知識を表現するプロダクションルールに表現された。

プロトコル解析によって明らかになった被験者の問題解決の特徴として，後ろ向き推論を用いてサブゴール系列を作りだして問題を解決したこと，また，推論が行き詰まったときジャンプと呼ばれる直観的な閃き（ひらめき）によって問題を解決したことをあげることができる。

考察では，サブゴールの導出がどのような知識に基づいて産出されるのか，また，数学の学習場面に於て，直観的な閃きがどのような知識に基づいて引き起こされるのかについてＡＣＴ理論に照らして議論した。

１．序　論

本論は，数学の熟練者が，専門領域の課題にアクセスする際に表出する特徴を情報処理心理学の情報処理モデルに照らして考察したものである。

生徒の問題解決のしかたを熟練者のしかたに近づけることが数学教育の目的の一つであると仮定すれば，数学の熟練者がどのように問題にアクセスするかを考察することは，数学教育上興味深い問題である。

問題解決に於ける熟練者の研究は，熟練者と初心者との問題解決の違いの研究という文脈において行われてきた。本論で言う熟練者（expert）とは，その領域で数千時間の経験を積んだ人をさす。また，初心者（novice）とは，学習途上にあって，数百時間の経験を積んだ人をさす（Posner, 1989）。

初心者と熟練者の問題解決の違いで確実視されている実験結果には，まったく驚きに値しない結果もあれば発見と呼ぶにふさわしい実験結果もある。これらをまとめると，「熟練者は初心者よりも解決が正確で速い」（de Groot, 1965；Chi, Glaser & Ress, 1981），「初心者は後ろ向き推論を使用して問題を解くが，熟練者は前向き推論によって問題を解決できる」（Simon & Simon, 1978；Larkin, 1981；Koedinger & Anderson, 1990），「熟練者は自分の問題解決がどのように進んでいるかについてモニターしたり，適切な部分について努力を集中することに優れている」（Shoenfeld, 1981; Larkin, 1983），「熟練者は問題の難易度を的確に推測することができる」（Chi, Glaser & Ress, 1982），「熟練者は問題解決の抽象的なアプローチプランを述べることができる」（Chi, 1978；Chi, Glaser & Ress, 1982），「熟練者は，問題の背後に潜む抽象的概念を想起することができる」（安西，横山，1984；安西，1986を見よ）を代表的な研究として示すこ

＊　琉球大学教育学部（附属中学校）

とができる。

これらの研究は，課題領域を一定に保った状態で，熟達化の水準を変えることにより，熟達化の効果を課題領域と切り離して横断的に論じる研究手法である――例えば，初心者と熟練者に，同じ課題を解かせ遂行（performance）の違いを比較する。

この手法の問題点は，課題を，初心者の解決能力に応じて設定するために，熟練者にとっては課題の解決が非常に容易なものとなり――例えば，博士号を有する物理学者に，高校の初等物理学の問題を解かせた研究（Simon, 1983）――熟練者が専門分野の課題に示す熟練者特有の遂行が表出しない懸念があることである。

問題解決に専門的知識を要する課題を扱った研究には，医師の症状診断を取り上げた研究（Feltovich, 1981 ; E.D.Gagne', 1985, Cognitive Psychology of School Learning に紹介されている）があるが，研究する側に，その領域の専門的知識が要求される制約も手伝ってこのような研究は少ない。そこで，本論では，数学の熟練者（大学院で数学を専攻している学生）に，大学の専門課程の知識を要する課題――数学を専攻した者でないと解けないような問題――を発語思考で解かせ，熟練者が自己の専門領域の課題にどのようにアクセスするのかを考察することにした。

2．情報処理アプローチ

2．1　問題解決

情報処理心理学の情報処理理論は人間を情報処理システムと見做す。この理論の特徴は，問題解決を課題環境としての「問題」と情報処理システムとしての「問題解決者」との間の相互作用として捉えることである（H.Kahney, 1986）。

問題を解決するために，人間は与えられた問題情報――例えば，初期状態，目標，操作子および操作子の制約など――についての心的表象（mental representation）を構成しなければならない。

問題に関する心的表象は問題空間（problem space）と呼ばれている。重要な点は，問題空間は，問題についての個人的表象であり，問題説明の中に示されている以上の情報を含んでいるという考えかたである。

問題に遭遇した際に，問題解決者は，目の前の問題に関連する貯蔵された全ての知識に起動をかける。問題解決過程のの中で，問題解決者は一連の知識状態（knowlege state）を構成しながら進んで行く。知識状態とは，問題解決のプロセスのそれぞれのポイントで役に立つ，あるいは役にたつようになる情報を含んでいるものである。知識状態の変換は，それを別の知識状態に変える心的操作子（mental operator）を適用することで実行される。

問題解決とは，問題が未解決な時点の知識状態を，目標が達成されているときの知識状態まで変換する心的変換作業である。すなわち，問題解決者は，知識状態を変換するための操作子を選択して適用する立場に置かれている（以上の議論は Simon, 1981に詳しい）。

2．2　認知のプロセスモデル

情報処理アプローチにおいては，認知のプロセスモデルに照らして認知活動を理解しようとする。

本論が採用した認知のプロセスモデルは，Andersonが提唱したＡＣＴ（Adaptive Contorol of Thought ; 1983）である――Anderson自身は，このプロセスモデルを10余年にわたって何度か修正してＡＣＴ*，ＡＣＴＰ，ＤＣ等として発表しているが，本論ではこれらの概念をＡＣＴと総称することにしたい。

ＡＣＴは，人間の情報処理の機能を統一的に表現する，現在最も有力なモデルであると言われる（Posner, 1989）。

ＡＣＴの中心的概念はプロダクションシステムである。しかし，ＡＣＴは，伝統的な意味でのプロダクションシステムは異なっている。例えば，宣言型の知識や手続き型

の知識がシステム内に存在することや数値強度変数が各プロダクションに付随することが伝統的なプロダクションシステムと大きく違う点である。すなわち，ＡＣＴには，さまざまな種類の記憶が含まれている――意味ネット状の知識が記憶されている宣言的記憶（declarative memory），システムによって実行される活動が記憶されているプロダクション記憶（production memory），システムが現在，同時に扱い得る情報から構成される作業記憶（working memory）がある。ただし，宣言的記憶，プロダクション記憶，作業記憶の区別は，人間の脳が，別々の生理的貯蔵庫に別れているという意味ではない。すなわち，ＡＣＴは人間の脳の解剖学上のモデルではなく，人間の認知活動における，情報の入力から出力に至るまでの情報の変換に視点をおいた情報処理の枠組を示すモデルである。

以下，ＡＣＴの主要な構成要素とその相互関係，情報処理機能の概要を述べる。

図１　ＡＣＴの構成要素と相互関連図

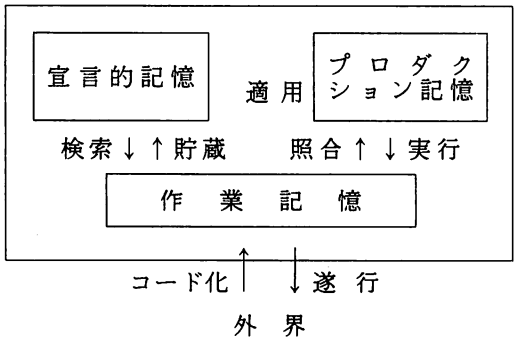

図１において，コード化（encording）は，外界についての情報を作業記憶に取り込む過程である。遂行（performance）の過程は，作業記憶内にある命令を行動に変換する。

貯蔵（storage）は，作業記憶中の情報を宣言的記憶中に恒久的な記録として創造して貯蔵する。

検索（retrieval）の過程は，宣言的記憶から情報を引き出してくる。照合（matching）とは，作業記憶の情報をプロダクションルールの条件部とつき合わせる過程である。実行（execution）とは，照合されたプロダクションルールの実行部を作業記憶に入れる過程である。照合と実行の過程をプロダクション適用（production application）という。

適用（application）は，適用することにより新しいプロダクションが学習される過程である。

ＡＣＴ理論の中心問題は，人間の学習と知識である。ＡＣＴ理論によると，学習の段階は，宣言的段階（declarative stage）と手続き的段階（procedural stage）の二つに分けられる。宣言型知識と手続き型知識は，知識の状態の変化として統一的に扱われている。ＡＣＴ理論では，人間の知識は，宣言型に符号化された構造をした宣言的知識（表１）とプロダクションルールの形に符号化された手続き型知識（表２，表３）の両方でモデル化される。

表１　宣言型知識（宣言型符号化構造）の例

背景情報

S_1は△ＸＹＺの一辺

S_2は△ＸＹＺの一辺

S_3は△ＸＹＺの一辺

条　件

S_1はS_2と合同

結　論

△ＸＹＺは二等辺三角形

コメント

二等辺三角形の定義である

表２　手続き型知識（一般的解釈手続き）の例

Ｐ１：ＩＦ　ゴールがある陳述の証明で，結論部分にその言明をもつ

	スキーマがあるならば,
THEN	スキーマの背景情報が照合することを下位ゴールとして設定し,
	その後に, 条件の証明を下位ゴールとして設定せよ。

表3　特殊化した手続き型知識の例

P2：IF	ゴールが△XYZが二等辺三角形であることの判断で,
	S_1は△XYZの一辺で,
	S_2は△XYZの一辺で,
	S_3は△XYZの一辺で,
	S_1はS_2と合同ならば,
THEN	△XYZは二等辺三角形であると判断せよ。

ACTは, 学習の初期の段階では, 宣言型に符号化された知識を, 一般的な解釈手続きをと呼ばれるプロダクションルールで解釈して使用する。しかし, 学習が進むにつれて, 宣言型に符号化されていた情報を埋め込んだ特殊化したプロダクションルール――例えば, 表1のような宣言型知識を, 表2のような一般的解釈手続き知識（プロダクション）を利用して使用するうちに, 表3のような手続き型知識（特殊化したプロダクション）が獲得される――が生成される（詳細は, 狩俣, 1993を見よ）。ACTが, このような特殊化したプロダクションを獲得すると, ACTは, 宣言型知識の解釈過程を経ずに, 特殊化したプロダクションを直接使用して情報処理を行うことができるようになる。このような知識使用の段階が手続き的段階と呼ばれるものである。

さらに, ACTは, 合成, 一般化, 弁別などの知識の調整により, 新しい知識を獲得する。技能の向上は, 宣言的段階から手続き的段階への移行や知識の合成, 一般化, 弁別等の知識の調整で説明される。

Andersonは, ACT理論をコンピュータ上で, 問題解決をする人工知能――Lispで表現されている――として実現している。

Andersonの膨大な理論を本論の紙頁だけで概観することは不可能である（例えば, 狩俣, 1993, P13-P33を参照せよ）。

3. 方　法

3. 1　被験者

大学院（修士課程）で数学を専攻する学生Sが本研究の被験者になった。

3. 2　課　題

Banach空間の部分集合として定義されたある集合が閉集合であることを示す問題（表4；中村正弘, 関数解析入門, 槙書店から引用, 筆者修正）を使用することにした。

表4　課　題

TはBanach空間VからV'への有界な線型作用素である。

$F = \{x \mid \| Tx \| \leqq \delta\}$

は閉集合であることを証明せよ。

3. 3　プロトコルの採取

プロトルコの採取に先だって, 実験者（筆者）は, 被験者Sに対して, 「数学の専門家がどのように問題を解くのかについての情報を得たいのでこれから説明する発語思考によって問題を解いてほしい」と告げた。

プロトコルの採取は, 被験者Sと実験者がテーブルを挟んで対面してすすめられた。

まず, 被験者Sは, 発語思考（think aloud；例えば, Posner, 1989に詳しい）の訓練を受けた。発語思考の訓練は, 自宅の玄関の入口の扉を開いて入って, 自分の部屋の机に向かって腰掛けるまでの行動を

空想で実行させ，見えるものの全てを報告させた。次に3桁の数に2桁の数を掛ける計算を暗算でさせて，声を出して語らせた。

発語思考の訓練を終えた後，Sに対して，課題が提示され発語思考で解決することが求められた。Sのプロトコルは全て録音された。

3．4　プロトコルの処理

録音されたSのプロトコルは一字一句そのまま筆写（transscript）された。筆写されたプロトコルは分節化され，要約された後，コード化された。分節化というのは，コード化できるように概ね独立なユニットに分けることである。分節化の手がかりは，文の終わり，フレーズ（句），ポーズ（休止），あるいはアイディアの終了である。要約とは，分節化されたプロトコルを問題局面ごとに大まかに整理することである。プロトコルの要約はSの問題解決過程の全体を問題局面に分けて把握するために行う。

コード化というのは，分節の内容を形式言語に翻訳することである。何を形式言語とするかは作業の性質や関心のある仮説に依存する。本研究の目的は，熟練者の問題解決過程の特徴をACTに照らして検討することであり，認知モデルとしてのACTを修正することではない。また，本論の関心は，主として，Sがたどる目標と下位目標の系列ならびにSが問題解決で使用したスキーマと知識の獲得の概要である。したがって，本論で必要な形式言語は，LISPなどのような計算機言語でなくてもよく，証明木（proof tree notation ; Koedinger, K.R & Anderson, J.R,1990），宣言型符号化構造，プロダクションルールで十分である。

4．結　果

Sは，問題を読み始めて，問題を解き終えるまでに，多くの時間を必要としなかった。Sが問題読解に要した時間は1分32秒，問題解決に要した時間（問題読解の時間を除く）が2分33秒であった。Sのプロトコルを前述の手順をもとづいて分節化したものが表5のプロトコルである。また，表6は，プロトコルの要約である。

表5問題解決のプロトコル

1．問題を読む。
2．TはBanach空間VからV'への有界な線型作用素である。
3．Fは閉集合であることを証明せよ。
4．Fは集合。
5．集合Fの要素xは，$\|Tx\| \leqq \delta$を満たす。
6．TはVからV'への写象だから，
7．xはVの要素で，
8．TxはV'の要素。
9．VとV'はノルム空間だから，
10．$\|x\|$，$\|Tx\|$は一応，実数だと考えておく。
11．集合Fの要素xは，$\|Tx\| \leqq \delta$を満たす。
12．FはVの部分集合。
13．これが閉集合であることを証明せよ。
14．Tは有界な線型作用素が仮定で，
15．そういうことがわかったうえで，
16．結論はFが閉集合。
17．これを証明したい。
18．Fが閉集合であることを証明するには
19．Fの元で，収束する点列の極限がFに含まれることを示せばよい。
20．Fからとりだした点列$\{x_n\}$を$x_n \to \alpha$としてαがFに含まれることを示す。
21．う・・・・・ん。
22．どのように示すか。
23．あ，そうか。
24．αがFに含まれるということは，
25．αが集合Fの条件を満たすことだから，
26．$\|T\alpha\| \leqq \delta$を示せばいい。
27．そのことをどうして示そうか。
28．x_nはαに収束することを利用できないかな。
29．x_nはαに収束するからTx_nは$T\alpha$に収束

しないかな。
30. Tは線型作用素だから・・・・・
31. 線型・・・・・
32. これは使えそうにないな。
33. えーと，いま，何していたのか。
34. Tx_n が $T\alpha$ に収束することを示そうとしていた。
35. 収束すれば何が分かるのか。
36. 収束すると・・・・・。
37. あそうか，$Tx_n \to T\alpha$ であればたしか，$\| Tx_n \| \to \| T\alpha \|$ である。
38. うーん，たしか・・・・・
39. $| \| Tx_n \| - \| T\alpha \| | \leqq \| Tx_n - T\alpha \|$ だから間違いない。
40. ということは・・・・・
41. x_n はFの要素だから $\| Tx_n \| \leqq \delta$ で，
42. $\| Tx_n \| \leqq \delta$ だから $\| T\alpha \| \leqq \delta$ だ。
43. これでいい。
44. ということは，$Tx_n \to T\alpha$ が示されればいい。
45. とにかくTは有界で線型だから
46. 線型だから $\| Tx_n - T\alpha \| = \| T(x_n - \alpha) \|$
47. 有界だから $\| T(x_n - \alpha) \| \leqq c \| x_n - \alpha \|$
48. $x_n \to \alpha$ ならば $\| x_n - \alpha \| \to 0$ だから
49. $\| Tx_n - T\alpha \| \to 0$ となって，
50. $x_n \to \alpha$ ならば $Tx_n \to T\alpha$
51. これで終わりだ。

表6　プロトコルの要約

第1段階：後ろ向き推論
$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$ とき $\alpha \in F$ を示せばよい。
第2段階：後ろ向き推論
$\alpha \in F$ を示すには，$\| T\alpha \| \leqq \delta$ を示せばよい。
第3段階：ジャンプ
$Tx_n \to T\alpha$ を利用して問題が解決できないかな。
第4段階：ジャンプ
もし $Tx_n \to T\alpha$ ならば，$\| Tx_n \| \to \| T\alpha \|$ でないかな。
第5段階：前向き推論
$| \| Tx_n \| - \| T\alpha \| | \leqq \| Tx_n - T\alpha \|$ だから，$Tx_n \to T\alpha$ ならば，$\| Tx_n \| \to \| T\alpha \|$ である。
第6段階：前向き推論
この場合，$\| Tx_n \| \leqq \delta$ だから $\| T\alpha \| \leqq \delta$ だといえる。
第7段階：後ろ向き推論
とすれば，$Tx_n \to T\alpha$ を示せばよいことが分かった。
第8段階：前向き推論
Tは線型で有界だから，$Tx_n \to T\alpha$ が示される。

Sは何度か後戻りをしながら，慎重に問題を読んだ（分節番号1－17）。Sが問題を読解して獲得した問題についての全体像（問題スキーマ）は表7のようなものだと考えることができる。ACT理論によれば，Sが獲得した問題スキーマは，宣言型に符号化されている。また，このスキーマには，問題説明に文章で示されている以上の情報が埋め込まれている。

表7　問題スキーマ（宣言型符号化構造）

背景情報
　　V，V'はBanach空間
　　V，V'は完備なノルム空間
　　$T : V \longrightarrow V'$ は線型写象
　　T : 有界（$\| Tx \| \leqq c \| x \|$）
　　$x \in V$，$Tx \in V'$
　　$T(ax + by) = aTx + bTy$
　　$\| x \|$，$\| Tx \| \in R$
　　$F \subseteq V$
　　$x \in F \rightleftarrows \| Tx \| \leqq \delta$
証明陳述
　　Fは閉集合
方　法
　　Fの集積点がFに含まれることを示せ。

Sは，問題を解き始めた。まず，Sは，後ろ向きに，ゴール「Fは閉集合」のサブゴールとして「$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$ならば$\alpha \in F$を導出した。

推論の軌跡１（証明木）

Fは閉集合（goal）

↓

$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$ならば$\alpha \in F$（subgoal Ⅰ）

Sは，さらに，後ろ向き推論によって，$\alpha \in F$のサブゴールとして，$\| T\alpha \| \leqq \delta$を設定した。

推論の軌跡２

$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$ならば$\alpha \in F$（subgoal Ⅰ）

↓

$\| T\alpha \| \leqq \delta$（subgoal Ⅱ）

プロトコル（分節番号28）で，「ジャンプ」(jump）が観察された。一般に，ジャンプとは，拡散的思考の一種で論理に依存しない思考――例えば，従来，数学者や数学教育者によって直観的な閃き（ひらめき）とよばれてきたもの――を言う。

「$x_n \to \alpha$が利用できないかな」(分節番号28)は，ジャンプが起こったことを示している。また，「x_nはαに収束するから，Tx_nは$T\alpha$に収束しないかな」（分節番号29）も思いつきによる予測でありジャンプが起こったことを示す証拠である。

推論の軌跡３

$x_n \to \alpha$を利用できないかな。

推論の軌跡４

$x_n \to \alpha$だから$Tx_n \to T\alpha$でないかな。

Sは，$x_n \to \alpha$から$Tx_n \to T\alpha$を導出するために，Tが線型であることを利用しようとするが，うまくいきそうもないと判断した（分節番号29－32）。Sが，なぜ，うまくいかないと判断したのかについては，プロトコルからは読み取れない。

Sは，その時点で，$Tx_n \to T\alpha$を示すことを，棚上げにして，$Tx_n \to T\alpha$をスタートポイントにして，$\| T\alpha \| \leqq \delta$が導出できないかどうかを検討しはじめた（分節番号35）。

Sは，$Tx_n \to T\alpha$から出発して，前向き推論によって，$\| T\alpha \| \leqq \delta$（subgoal Ⅱ）を導出した（分節番号37－42）。

推論の軌跡５

$\| T\alpha \| \leqq \delta$（subgoal Ⅱ）

↗　↖

$\| Tx_n \| \to \| T\alpha \|$　　$\| Tx_n \| \leqq \delta$

↗　↗　↖

$Tx_n \to T\alpha$　$x \in F \rightleftarrows \| Tx \| \leqq \delta$　$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$

（スタートポイント）（前提）　（集積点の定義）

Sは，$Tx \to T\alpha$から$\| T\alpha \| \leqq \delta$が導出できることを前向き推論によって確認した後，後ろ向き推論によって，$Tx_n \to T\alpha$を，$\| T\alpha \| \leqq \delta$のサブゴールとして設定した（分節番号44）。

推論の軌跡６

$\| T\alpha \| \leqq \delta$ (subgoal Ⅱ)

↓

$Tx_n \to T\alpha$ (subgoal Ⅲ)

再度，Ｓは，$Tx_n \to T\alpha$を証明するために，Ｔが有界で線型であることをスタートポイントにして前向き推論を開始した（分節番号45)。

まず，Ｓは，Ｔが線型であることから，$\| Tx_n \to T\alpha \| = \| T(x_n - \alpha) \|$を導きだし，さらに，Ｔが有界であることを利用して，$\| T(x_n - \alpha) \| \leqq c \| x_n - \alpha \|$を導出した。最後にＳは，$\| Tx_n - T\alpha \| \leqq c \| x_n - \alpha \|$と$x_n \to \alpha$から$Tx_n \to T\alpha$にたどりついた。

推論の軌跡７

$Tx_n \to T\alpha$ (subgoal Ⅲ)

↗　　↖

$\| Tx_n - T\alpha \| \leqq c \| x_n - \alpha \|$　　$x_n \to \alpha$

↑

$\| T(x_n - \alpha) \| \leqq c \| x_n - \alpha \|$

↑

$\| Tx_n - T\alpha \| = \| T(x_n - \alpha) \|$

↑

Ｔ：有界線型作用素

５．考　察

Ｓは，ゴールを達成するまでに三つのサブゴールを導出した。Ｓは，ゴールからの後ろ向き推論で，トップダウンにサブゴールを降ろしてきて，最後に，前提からの前向き推論によって，サブゴールを攻略するという双方向推論によって問題を解決した。

Ｓの問題解決の特徴として，Ｓがサブゴールを利用する方略を採用している点をあげることができる。

推論の軌跡　サブゴールの系列

Ｆは閉集合（goal）

↓①

$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$ならば$\alpha \in F$ (subgoal Ⅰ)

↓②

$\| T\alpha \| \leqq \delta$ (subgoal Ⅱ)

↓③

$Tx_n \to T\alpha$ (subgoal Ⅲ)

Ｓがサブゴールを導出する過程は，その特徴においていずれも異なってきた。

ゴール「Ｆ閉集合を示す」からサブゴール「$\alpha \in F$を示す」を導出するプロセス①はかなりスムーズである。この事実をＡＣＴ理論に照らすと，Ｓが手続き型の知識（プロダクション）を利用したと考えることができる。例えば，Ｓが（Ｐ１）のような手続き型に符号化された知識を使用した可能性が高い。

Ｐ１：ＩＦ	集合Ａが閉集合であることを証明することがゴールならば，
ＴＨＥＮ	Ａの元からなる収束する点列（$x_n \to x, x_n \in A$）の極限がＡに含まれること（$x \in A$）を示すサブゴールを設定して証明せよ。

サブゴール「$\alpha \in F$を示す」からその下位のサブゴール「$\| T\alpha \| \leqq \delta$を示す」を導出するプロセス②は，最初の後ろ向き推論に比べてスムーズではない。この事実をＡＣＴに照らして解釈すると，宣言型に符号化された情報を解釈した可能性が高い。例えば，Ｓが，（Ｐ２）のような手続き型知識を，問題スキーマ（表７）に適用して，$\| T\alpha \| \leqq \delta$を導出したと解釈することができる。

P2：IF	xが集合Aの元であることを証明することがゴールで，集合Aの元の条件が示されているならば，
THEN	xが条件を満たすことを証明するサブゴールを設定して証明せよ。

P3：IF	問題スキーマの背景情報に，$x_n \to \alpha$があれば
THEN	$x_n \to \alpha$を利用できないかを検討せよ

P4：IF	$x_n \to \alpha$を利用することが決定しており，背景情報に，T：写像があれば，
THEN	$Tx_n \to T\alpha$でないかについて検討せよ

表8　分節番号28までに獲得した問題スキーマ

背景情報

V，V'はBanach空間

V，V'は完備なノルム空間

T：V⟶V'は線型写象

T：有界（$\|Tx\| \leqq c\|x\|$）

$x \in V$，$Tx \in V'$

$T(ax+by) = aTx + bTy$

$\|x\|$，$\|Tx\| \in R$

$F \subseteq V$

$x \in F \rightleftarrows \|Tx\| \leqq \delta$

$x_n \to \alpha$，$x_n \in F$※

証明陳述

Fは閉集合

下位目標

$\alpha \in F$　(subgoal Ⅰ)※

$\|T\alpha\| \leqq \delta$　(subgoal Ⅱ)※

方　法

下位目標を証明する※

※の印は最初のスキーマ（表7）と違う部分

サブゴール「$\|T\alpha\| \leqq \delta$を示す」からその下位のサブゴール「$Tx_n \to T\alpha$を示す」を導出するプロセス③は，前段階，前々段階のサブゴール導出のしかたのいずれとも違っていた。③におけるSの推論の特徴は，ジャンプを使用して，サブゴールを作り出したことがあげられる。ACT理論によれば，人間の認知的機能は，プロダクションが実行——例えば，Andersonはプロダクションの実行を発火と呼んでいる——されることによって説明される。直観的な閃きのようなジャンプといえども例外とはしない。「$x_n \to \alpha$を利用できないかな」（分節番号28）は，プロダクション（P3）がスキーマ（表8）を読み込んで自動的（無意識）に発火したことによる発語と考えたほうがよい。

同様に，「$Tx_n \to T\alpha$でないかな」（分節番号29）も，プロダクション（P4）とスキーマ（表8）によって説明できる。

以上が、Sの直観的閃きの正体である。

ジャンプは，前向き推論の際にも現れた。「あそうか，$Tx_n \to T\alpha$であれば，たしか，$\|Tx_n\| \to \|T\alpha\|$である」（分節番号37）もジャンプだと考えることができる。実際Sは確信がないままに，$\|Tx_n\| \to \|T\alpha\|$を導出し，その後，$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqq \|x-y\|$を使用して確認した。ジャンプは，Sが，過去に，問題解決経験を通して獲得したプロダクション（P5）によるものと考えることができる。

P5：IF	$Tx_n \to T\alpha$を利用することが決定しており，背景情報にノルムについて

の情報があるならば，

THEN　$\| Tx_n \| \to \| T\alpha \|$ を検討せよ

Sの問題解決過程は，「後ろ向き推論」と「ジャンプ」によって特徴づけることができる。熟練者のジャンプは，まとをはずすことがなく，文字通りに的確であるといえる。

6．総括ならびに結論

本研究の問題解決者は，後ろ向き推論と前向き推論によって推論をすすめ，両者を途中で行き合わせる双方向推論によって問題を解決した。また，推論が停滞して進まないときジャンプによって知識状態を変換した。本研究で観察されたジャンプは「ひょっとしたら・・・・・じゃないかな」という類の予測であり，これは，数学者や数学教育者が，経験的に，直観的な閃き（ひらめき）という用語を用いて呼んできたものである。

本研究の問題解決者の場合，ジャンプは，前向き推論と後ろ向き推論に関係なしにいずれの際にも観察された――従来の研究（例えば，鹿島，1990）で，「突然ひらめいた」とか「分かった」と思うときには後ろ向き推論が働くとされてきたが――直観的な閃きと呼ばれるものが必ずしも後ろ向き推論と関係して生起するものではないことが示された。

本研究で見いだされた問題解決者の特徴の一つとして，推論が行き詰まったとき「別のスタートポイントをジャンプによって定めて，そこから前向き推論でゴールまでたどりつくことで，そのスタートポイントがサブゴールになり得ることを確かめ，今度は，それをサブゴールとして使用する」方略を使用した点をあげることができる。

問題解決者のこのような振舞から示唆されることは，サブゴールを導出するためには，この前提（情報）があるときこの結論（情報）が導きだせるという記憶（知識）――前提情報と結論情報の前後関係的知識と呼ぶことにする――を問題解決の経験を通して獲得する必要があるということである。

この知見は，問題解決者が，原因と結果についての知識（因果的知識）を獲得することによって，目的（ゴール）に対する手段（サブゴール）を設定することができるようになると結論づけたテレビゲームによる熟達化研究（安西，1985；問題解決の心理学の中に紹介されている）とも符合する。

本研究で見出された問題解決者のもう一つの特徴は，専門的知識を要する課題に対する熟練者の振舞は――初等幾何による研究（Koedinger & Anderson, 1990）で熟練者が示した前向き推論だけ（purely forward inference）を使用する振舞とは異なり――むしろ，後ろ向き推論を主体にした解決であったことである。

従来の初心者と熟練者の比較研究に於て，熟達化の特徴とされてきた前向き推論は，熟練者の問題解決の特徴ではなく，むしろ，過去に解いたことのある問題に対する振舞――例えば，物理学の専門家にとって，初等力学の問題を解くことは，問題解決ではなく，むしろ，再認である――の特徴として言い改める必要がある。

本研究の数学教育に対する示唆は，「後ろ向き推論」と「ジャンプ」の能力を高めることが生徒の問題解決のスキル（skill）を高めるに違いないということである。

後ろ向き推論のスキルを高めるための重要な視点は，前提情報と結論情報の前後関係的知識の獲得である。問題解決過程のさまざまな局面での経験を，前提と結論の前後関係的知識として体制化する努力を心がければ，サブゴール導出のスキルが高められるであろう。

数学の授業などに於て，後ろ向き推論を訓練する一つの手短な方法は，例えば，教師が，例題などを説明する場面で，後ろ向き推論を演示し，そこで，基になる前提と結論の前後関係的知識を示すことであろう。

同じく授業で，ジャンプのスキルを高めるための最も手短な方策は，やはり，例題などの説明場面で，教師自身が推論に行き詰まったように振舞って，そこで，ジャンプを使用して局面

を打開する振舞を演示することである。この場合も，教師自身が，問題解決の最中に頭の中で起こった出来事――何故そのことに気づいたのかの心的過程――を可能なかぎり説明することであろう。

本研究の主要な成果は，既成の情報処理モデルＡＣＴを使用して数学の熟練者の問題解決過程を詳細に分析し上記の結論を得たことである。

謝　辞

本論を一読いただき，難解な表現や表現の誤りなどを指摘下さった琉球大学教育学部附属中学校教諭の糸数剛氏に感謝する。

引用文献

Anderson,J.R , 1982, Acquisition of Cognitive Skill, Psychological Review, 1982, Vol.89, №4 , 369-406

Anderson,J.R , 1987, Skill Anquisition:Compilation of Weak Method Problem Solutions, Psychological Review, 1987, Vol.94,№2 , 192-210.

Koedinger,K.R & Anderson,J.R ,1990,Abstract Planning and perceptual Chanks : Elements of Expertise in Geometry, Cognitive Science, 14,511-550, 1990.

Anderson,J.R , 1983, Acqusition of Proof Skills in Geometry, in Machine Learning, R.S,Michalski (Ed) ,Tioga Publishing Company, 1983.

Anderson,J.R , 1986, Knowledge Compilation: The General Learning Mechanism, in Machine-Learning, R.S,Michalski (Ed), Tioga Publishing Conpany, 1986.

Simon,H,A ,1981, The sciences of the artificial, 2nd ed, MIT press.

Larkin , 1981, Enriching formal knowledge: A model for learning to solve problems in physics. In J.R.Anderson (Ed), Cognitive Skills and Their Acqistition.Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Posner,M.I , 1989, Foundations of Cognitive Science, 1989, Massachusetts Institute of Technology.

Schoenfeld,A.H , 1982, Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical solvers, Journal of Experiental Psychology : Learning, Memory and Cognition 8(5), 484-494.

Larkin , 1983, The role of problem representation in physics. In D.Gentner and A. Collins (Ed), Mentalmodels, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chi, Glaser & Ress , 1982, Expertise in problem solving. In R.J.Sternberg (Ed), Advances in the Psychology of Human Intelligence, Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Chi, Feltovich & Glaser , 1981, Categorization and representation of physics problems by experts and novices. Congnitive Science 5(2), 121-152.

de Groot,A.D , 1965, Perception and memory versus thought : some old ideas and recent findings, in B.Kleinmunts (Ed), Problem Solving, New York : Wilky.

H.Kahney , 1986, Problem solving : A Cognitive Approach, Open University.

安西祐一郎 , 1986, 知識と表像： 人口知能と認知心理学への序説, 産業図書, 87-94.

安西祐一郎 , 1985, 問題解決の心理学, 中央新書.

狩俣　智 , 1993, 幾何の学習に於ける前向き推論型例証と双方向推論型例証の効果、琉球大学大学院教育学研究科（学位論文）