対合同変正則写像空間の位相幾何

メタデータ	言語: 出版者: 神山靖彦 公開日: 2009-03-17 キーワード (Ja): 有理関数, 複素共役対合, 多項式, 重根, 配置空間, ループ空間, 安定分解, 生成多様体 キーワード (En): rational function, conjugation, polynomial, multiple root, configuration space, loop space, stable splitting, generating variety 作成者: 神山, 靖彦, 志賀, 博雄, 手塚, 康誠, Kamiyama, Yasuhiko, Shiga, Hiroo, Tezuka, Michishige メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/9229

対合同変正則写像空間の位相幾何

１５５４００８７

平成１５年度～平成１７年度科学研究費補助金

（基盤研究（C））研究成果報告書

平成１８年3月

研究代表者　　　神　山　靖　彦

琉球大学理学部助教授

〈はしがき〉

本研究は『対合同変正則写像空間の位相幾何』と題し，2003 (平成 15) 年度から 2005 (平成 17) 年度までの 3 年度にわたる継続研究として，科学研究費補助金 (基盤研究 (C)) の交付 (課題番号 15540087) を受けて行ったものである．ここにその研究成果を報告する．

3 年度にわたる本研究の分担者は次の研究組織の項の記載通りである．この研究の遂行においてお世話下さった関係各位に心からの謝意を表する．

研究代表者　神山　靖彦

研究組織

研究代表者: 神山　靖彦 (琉球大学理学部数理科学科助教授)
研究分担者: 志賀　博雄 (琉球大学理学部数理科学科教授)
研究分担者: 手塚　康誠 (琉球大学理学部数理科学科教授)

交付決定額 (配分額)　(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 15 年度	1,200,000	0	1,200,000
平成 16 年度	1,100,000	0	1,100,000
平成 17 年度	700,000	0	700,000
総計	3,000,000	0	3,000,000

研究発表

(1) 学会誌等
[ ] 内にこの報告書における記載ページを示した.

1. Yasuhiko Kamiyama, Relationship between polynomials with multiple roots and rational functions with common roots, Mathematica Scandinavica, 96 (2005), 31–48. [15–37]

2. Yasuhiko Kamiyama, Spaces of conjugation-equivariant full holomorphic maps, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 42 (2005), 157–164. [38–46]

3. Yasuhiko Kamiyama, Akira Kono and Michishige Tezuka, Topology and its Applications, 146 (2005), 471–487. [47–67]

4. Yasuhiko Kamiyama, Geometric construction for the fibre of the double suspension, JP Journal of Geometry and Topology, 4 (2004), 23–34. [68–79]

5. Yasuhiko Kamiyama, A polynomial model for the double-loop space of an even sphere, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 47 (2004), 155–162. [80–90]

6. Yasuhiko Kamiyama and Michishige Tezuka, On tangent bundles of certain homogeneous spaces, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 11 (2004), 329–334. [91–96]

7. Yasuhiko Kamiyama, Homology of the completion of instanton moduli spaces, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 10 (2003), 169–178. [97–112]

8. Yasuhiko Kamiyama, Generating varieties for the triple loop space of classical Lie groups, Fundamenta Mathematicae, 177 (2003), 169–178. [113–132]

9. Spaces of real polynomials with common roots, Geometry and Topology Monographs, 掲載が受理され印刷中. [133–142]

10. Remarks on the space of real rational functions, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 掲載が受理され印刷中. [143–153]

11. Yasuhiko Kamiyama, Configuration spaces and rational functions, 2005年7月に東京大学で開催されたCOE Conference "Groups, Homotopy and Configuration Spaces" において, plenary talk（主要講演）を行った際に用いたOHPフィルム. [154–188]

(2) 口頭発表

神山　靖彦

1. The configuration space of the n-arms machine, Topology Seminar, Aberdeen大学, 2005, 09.
2. Configuration spaces and rational functions, plenary talk（主要講演）, COE Conference "Groups, Homotopy and Configuration Spaces", 東京大学, 2005.07.
3. Configuration spaces and rational functions, 水戸トポロジーセミナー, 茨城大学, 2005.01.
4. Configuration spaces and rational functions, plenary talk（主要講演）, 3rd Japan-Mexico Joint Meeting on Topology and its Applications, Oaxaca, 2004.12.
5. Polynomial model for certain homotopy fibers, 研究集会「空間の代数的モデルと幾何的モデル」, 岡山大学, 2003.09.

志賀　博雄

1. The set of isomorphism classes of graded algebra of dimension 8, 研究集会「空間の代数的幾何的モデルとその周辺」, 高知大学, 2005.09.

研究成果

1. 研究目的

$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ で，リーマン球面 $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ への，基点を保つ正則写像の空間を表す．我々が要請する基点の条件は，$f(\infty) = [1, \dots, 1]$ である．このような正則写像は，有理関数で書ける:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n) =& \{(p_0(z), \dots, p_n(z)) : \text{各 } p_i(z) \text{ はモニックな} \\ & \text{複素 } k \text{ 次多項式で，全ての } p_i(z) \text{ に共通する根はない}\}.\end{aligned} \tag{1}$$

正則性を忘れることにより包含写像

$$i_k : \mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \Omega_k^2 \mathbb{C}P^n \simeq \Omega^2 S^{2n+1} \tag{2}$$

がある．

Segal [S] は，i_k が $k(2n-1)$ 次元までホモトピー同値であることを証明した．その後，Cohen-Cohen-Mann-Milgram [CCMM] は，$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の安定ホモトピー型を以下のように決定した:

$$\Omega^2 S^{2n+1} \underset{s}{\simeq} \bigvee_{1 \leq q} D_q(S^{2n-1})$$

を $\Omega^2 S^{2n+1}$ の Snaith stable splitting とする．このとき，

$$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{q=1}^{k} D_q(S^{2n-1}) \tag{3}$$

が成立する．このように，$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ については，十分な結果が得られているわけである．

さて，本研究の目的は次の 2 つである．

(i) $\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の上には，複素共役による対合が作用する．この対合と可換な正則写像全体を $\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ で表す．(1) の表示では，

$$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n) = \{(p_0(z), \dots, p_n(z)) \in \mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n) : \text{各 } p_i(z) \text{ は実多項式}\}$$

である．

$\Omega^2_k\mathbb{C}P^n$ の元のうち，対合同変なものからなる空間を $\mathrm{Map}^T_k(\mathbb{C}P^1,\mathbb{C}P^n)$ と表す．すると，(2) と同様に，包含写像

$$j_k : \mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \mathrm{Map}^T_k(\mathbb{C}P^1,\mathbb{C}P^n) \tag{4}$$

がある．Brockett [B] 及び Segal [S] は，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^1)$ の homotopy type を決定した．しかし，$n \geq 2$ のときの $\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ については未解決であった．

本研究の目的の 1 つは，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ について，Segal タイプの定理及び (3) のタイプの stable splitting を証明するのが 1 つの目的である．特に，(4) に関連して，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の stable summands は，$\mathrm{Map}^T_k(\mathbb{C}P^1,\mathbb{C}P^n)$ のそれで十分か?ということを問題とする．もしその答えが肯定的であるならば，j_k は homology の単射を誘導するので，興味ある結論となる．

(ii) 本研究のもう 1 つの目的は，一言で言えば，単独の多項式で根の重複度に制限をおいたもののなす空間と，多項式の n 組で共通根の個数に制限をおいたもののなす空間との関係を研究することである．

$C_k(\mathbb{C})$ で，$\mathbb{C}$ 上の，順序を忘れた相異なる k 点からなる配置空間を表す．Arnold [A] は，初めて $C_k(\mathbb{C})$ について系統的な考察を行った．その方法は以下の通りである：$C_k(\mathbb{C})$ の元は，重根を持たないモニックな k 次式

$$f(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k$$

と書ける．これを一般化して，

$$P^l_{k,n} = \{ f(z) : f(z)\ \text{はモニックな}\ k\ \text{次式で，}\ n\ \text{重根はたかだか}\ l\ \text{個} \} \tag{5}$$

とおく．n を固定し，k は大きく，l は小さくする数学的帰納法により，$P^l_{k,n}$ の情報を全ての k, n, l について得る．特に，$n = 2, l = 0$ とおけば，$P^0_{k,2} = C_k(\mathbb{C})$ の情報が得られる．

Arnold はこの方法により，$P^l_{k,n}$ の homology を決定しようとした．しかし，数学的帰納法を繰り返すことから生じる困難により，未解決な部分が多かった．本研究のもう 1 つの目的は，$P^l_{k,n}$ の homology を完全に決定することである．つまり，Arnold の問題を完全に解決することである．

そのための方法として，次のような要請をする：数学的帰納法を利用して $P^l_{k,n}$ の homology を決定しようとすれば，Arnold と同じような困難が生じるであろう．そこで，全く異なる方法を考える．そのために，$P^l_{k,n}$ を，$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^{n-1})$ に類似した多項式の n 組で，共通根の個数に制限をおいたもののなす空間と比較する．

2. 主要結果

まず，§1 (i) に関する主論文は [9] である．Brockett [B] 及び Segal [S] により，同相

$$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^1) \cong \coprod_{i=0}^{k} \mathbb{C}^{|k-2i|} \times \mathrm{Rat}_{\min\,(i,k-i)}(\mathbb{C}P^1)$$

が証明されている．以下，$n \geq 2$ とする．[9] ではまず，対合同変連続写像空間 $\mathrm{Map}_k^T(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n)$ に対し，

$$\mathrm{Map}_k^T(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \simeq \Omega S^n \times \Omega^2 S^{2n+1}$$

であることを証明した．

次に，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ に対し，Cohen-Cohen-Mann-Milgram タイプ，つまり (3) のタイプの定理を証明した．これが [9] の主定理である．つまり，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の安定ホモトピー型を，$\mathrm{Map}_k^T(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n)$ の stable summands を用いて記述したわけで，詳しくは以下の通りである：

定理 1. *ΩS^n の各 stable summand の weight を 1, $\Omega^2 S^{2n+1}$ の Snaith stable splitting の各 stable summand の weight を 2 と定義する．このとき，$RRat_k(\mathbb{C}P^n)$ は，$\Omega S^n \times \Omega^2 S^{2n+1}$ の weight が k 以下の stable summands の 1 点和と安定ホモトピー同値である．*

この主定理より，(4) の包含写像 j_k は $(k+1)(n-1)-1$ 次元までホモトピー同値であるという，Segal タイプの定理も得られる．

主定理は §1 で書いた問題，つまり，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の stable summands は，$\mathrm{Map}_k^T(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n)$ のそれで十分か?という問題は，肯定的解決を与えている．従って [9] の結論は，十分に満足できるものである．

次に，§1 (ii) に関する主論文は [1] である．主定理を述べる前に，Vassiliev の定理を思い出す．まず，§1 の Cohen-Cohen-Mann-Milgram の定理で，$n=1$ の場合と，Brown-Peterson による $C_k(\mathbb{C}) = P_{k,2}^0$ の stable splitting より，次の安定ホモトピー同値が分かる:

$$P_{k,2}^0 \underset{s}{\simeq} \mathrm{Rat}_{[\frac{k}{2}]}(\mathbb{C}P^1).$$

更に Vassiliev ([V]) は，これを $n \geq 2$ に対し，次のホモトピー同値に一般化した:

$$P^0_{k,n} \simeq \mathrm{Rat}_{[\frac{k}{n}]}(\mathbb{C}P^{n-1}). \tag{6}$$

[1] の目的は，(6) のタイプのホモトピー同値を $P^l_{k,n}$ に対し証明することである．そこで，$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^{n-1})$ の一般化 $X^l_{k,n}$ を次のように定義する:

$$X^l_{k,n} = \{(p_0(z), \ldots, p_{n-1}(z)) : \text{各 } p_i(z) \text{ はモニックな複素 } k \text{ 次多項式で，全ての } p_i(z) \text{ に共通する根はたかだか } l \text{ 個}\}. \tag{7}$$

このとき，[1] の主定理は:

定理 2. $(n, l) \neq (2, 0)$ のとき，次のホモトピー同値がある:

$$P^l_{k,n} \simeq X^l_{[\frac{k}{n}],n}. \tag{8}$$

明らかに，(6) は (8) で $l = 0$ の場合であることに注意する．

さて定理2により，§1 で述べた Arnold の問題，つまり $P^l_{k,n}$ の homology を決定するという問題は，完全に解決されることを説明する．定理 2 より，$P^l_{k,n}$ の homology を計算するためには，$X^l_{k,n}$ の homology を計算すればよい．ここで $X^l_{k,n}$ は (7) で与えられる．

$J^l(2n-2)$ を ΩS^{2n-1} を構成する James construction の l-th stage とし，包含写像 $J^l(2n-2) \hookrightarrow \Omega S^{2n-1}$ の homotopy fiber を $W^l(n)$ と書く:

$$W^l(n) \to J^l(2n-2) \to \Omega S^{2n-1}. \tag{9}$$

$W^l(n)$ の Snaith 型の stable splitting を

$$W^l(n) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{1 \leq q} D_q \xi^l(n)$$

と書く．このとき，[K] により

$$X^l_{k,n} \underset{s}{\simeq} \bigvee_{q=1}^{k} D_q \xi^l(n)$$

が分かっている．この右辺は，$W^l(n)$ の homology が分かれば，各元の weight を考慮することにより決定され，$W^l(n)$ の homology は，(9) から作られる fibration

$$\Omega^2 S^{2n-1} \to W^l(n) \to J^l(2n-2)$$

の Serre spectral sequence により決定される．

以上により，$P^l_{k,n}$ の homology は完全に決定されるのである．

3. 各論文の概略

以下で研究発表 (1) に書いた各論文の概略を説明する．

1. §2 の後半で述べたように，この論文は本研究課題の 2 つの主論文のうちの 1 つである．

2. 写像 $f: S^2 \to \mathbb{C}P^n$ が充満 (full) であるとは，f の像が $\mathbb{C}P^n$ のいかなる真の射影部分空間にも含まれないことと定義する．充満な正則写像から調和写像を構成する方法が知られているので，充満写像からなる空間を研究することは興味あることである．

   $\mathrm{F}_k(\mathbb{C}P^n)$ で，充満写像からなる $\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の部分空間を表す．次の包含写像の列がある:

$$\mathrm{F}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \Omega^2_k \mathbb{C}P^n \simeq \Omega^2 S^{2n+1}.$$

   右の包含写像が誘導する homology の写像は，§1 で触れた，Cohen-Cohen-Mann-Milgram の定理で述べたように単射である．しかし左の包含写像については，安定的状況（つまり上の包含写像の列の左端は k を大きくしていくと右端にホモトピー同値になっていく状況）は分かっているものの，大域的には homology の単射を誘導しない．実際，$\mathrm{F}_k(\mathbb{C}P^2)$ の homology は決定されており，その状況で既に単射でない．

   さて，この包含写像の列の対合同変版を考える．

$$\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{F}_k(\mathbb{C}P^n) \cap \mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$$

   とおく．ここで，$\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ は，§1 (i) で定義した．すると，次の包含写像の列がある:

$$\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n) \hookrightarrow \mathrm{Map}^T_k(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \simeq \Omega S^n \times \Omega^2 S^{2n+1}. \tag{10}$$

   [2] では，$\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^2)$ の homology を完全に決定した．特に，(10) の左の包含写像は，homology の単射を誘導しない．

3. G は，コンパクト，単連結，単純リー群とする．$M(k,G)$ で，S^4 上の G-instantons の framed moduli space を表す．ホモトピー論的には包含写像

$$\coprod_{1\leq k} M(k,G) \hookrightarrow \Omega^4 BG$$

がある．$M(k,G)$ の non-trivial な homology classes を構成することは興味あることである．そのために，Boyer-Mann-Waggoner ([BMW]) は，$\coprod_{1\leq k} M(k,G)$ に，$\Omega^4 BG$ と compatible な $\mathscr{C}_4$-structure を導入した．それにより，$M(1,G)$ の homology classes に homology operations と loop sum を施すことにより，$M(k,G)$ の homology classes を構成することができる．

但し，そのようにして構成された homology classes が非零であることを証明するのは難しく，彼らはできていない．これについては，[8] のところで述べる．

さて，何れにせよ，$M(1,G)$ の topology を研究するのが第一歩で，彼らは次のことを証明した: $C_G(SU(2))$ で，$SU(2)$ を G に適切に埋め込んだときの中心化群を表す．このとき，同相

$$M(1,G) \cong \mathbb{R}^5 \times G/C_G(SU(2)) \tag{11}$$

が存在する．

G として，古典群 $SU(n)$, $Sp(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$ の何れかを考える．(11) の $G/C_G(SU(2))$ は，$G=SU(n)$ のときは $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の unit tangent bundle, $G=Sp(n)$ のときは $\mathbb{R}P^{4n-1}$ であることが容易に分かるので，それらの homology もやさしい．しかし，$G=\mathrm{Spin}(n)$ のときには明らかでない．

[3] では，$G=\mathrm{Spin}(n)$ のときの，$G/C_G(SU(2))$ を考察した．まず，埋め込み

$$SU(2) \hookrightarrow SO(4)$$

を

$$A+\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

と定義し，

$$X_n = SO(n)/SO(n-4) \times SU(2) \tag{12}$$

とおく．このとき，微分同相

$$G/C_{\mathrm{Spin}(n)}(SU(2)) \cong X_n$$

が存在する．そこで，X_n の $\mathbb{Z}$ 上の homology を完全に決定した．特に，それは higher torsion を持つ．更に，$\mathbb{Z}/2$ 係数の cohomology ring 及び Steenrod operations も決定した．なお，この結果は [8] で利用された．

4. §2 で述べたように，(7) で定義した $X^l_{k,n}$ は，homotopy fiber $W^l(n)$ のある stable summands の 1 点和と安定ホモトピー同値であるということが，[K] で証明された．しかし，非安定な意味で $X^l_{k,n}$ は $W^l(n)$ と近いか?という問題は，自然な疑問ではあるが未解決であった．[4] では，(2) のような非安定写像

$$X^l_{k,n} \to W^l(n)$$

を構成し，これについて §1 で述べた Segal 型の定理 ([S]) を証明した．

5. §1 で述べた SEgal の定理及び Cohen-Cohen-Mann-Milgram の定理は，(2) を介して，$\mathrm{Rat}_k(\mathbb{C}P^n)$ は $\Omega^2 S^{2n+1}$ の非常によい有限次元モデルであることを示している．つまり，奇数次元球面の 2 回ループ空間のモデルは，共通根を持たない k 次多項式の $n+1$ 組で構成される．

では，偶数次元の球面の 2 回ループ空間のモデルを構成することは可能か?という問題を考える．[5] ではこの問題を解決した．

$$G^n_k = \{(p_0(z), \ldots, p_n(z)) : \text{各 } p_i(z) \text{ はモニックな複素 } k \text{ 次多項式で，} \\ \text{ある } \alpha \in \mathbb{C} \text{ が，} p_0(\alpha) = \cdots = p_{n-1}(\alpha) = 0 \text{ ならば，} p_n(\alpha) \notin \mathbb{R}\}.$$

とおく．

自然な包含写像

$$G^n_k \hookrightarrow \Omega^2 S^{2n}$$

がある．これについて，Segal 型及び Cohen-Cohen-Mann-Milgram 型の定理を証明した．

6. (12) で定義された X_n に対し，その tangent bundle の total Stiefel-Whitney class 及び total Pontrjagin class を決定した．前者につい

ては，まずBorel-Hirzebruchによるルートを計算する方法で決定した．次に，[3]において$H^*(X_n;\mathbb{Z}/2)$へのSteenrod operationsが分かっているので，それからX_nのWu classを決め，Wu formulaによってtotal Stiefel-Whitney classを決めることにも成功した．

7. §2で述べた$X^l_{k,n}$は，集合論的には

$$X^l_{k,n} = \coprod_{i=0}^{l} \mathbb{C}^i \times \mathrm{Rat}_{k-i}(\mathbb{C}P^{n-1}) \tag{13}$$

という分解をもつ．

一方，$M(k,G)$を[3]で述べたinstantonsのmoduli spaceとする．(13)の右辺で，$\mathrm{Rat}_{k-i}(\mathbb{C}P^{n-1})$の部分は$M(k-i,G)$に変え，$\mathbb{C}^i$の部分は適切に変えたものはどういう空間か?ということを問題とする．

$M(k,G)$のUHlenbeck完備化

$$\overline{M}(k,G) := \bigcup_{i=0}^{k} \mathrm{SP}^i(\mathbb{R}^4) \times M(k-i,G)$$

を考える．ここで，$\mathrm{SP}^i(\mathbb{R}^4)$は$\mathbb{R}^4$の$i$重対称積である．

$\overline{M}(k,G)$の$i=0$から$i=l$までのstrataの和について，$X^l_{k,n}$と類似の性質を期待するのは自然なことである．[7]では，$l=1$の場合について，このことを精密に研究した．

8. この論文はBottの生成多様体 (generating variety) の理論で，S^1の代わりにS^3をとったとき成立する性質を解明した．これをやる動機は，[3]で述べた概略と関係する．

まずBottの定理を思い出す．Gはコンパクト，単連結リー群とし，S^1をGの部分群とする．写像

$$f : G/C_G(S^1)) \to \Omega G \tag{14}$$

を，

$$f(gC_G(S^1))(x) = gxg^{-1}x^{-1}$$

により定める．S^1が適切なcircleであるときには，

$$f_* : H_*(G/C_G(S^1);\mathbb{Z}) \to H_*(\Omega G;\mathbb{Z})$$

を生成するというのが Bott の定理であり，このとき，$G/C_G(S^1)$ を生成多様体とよぶ．

さて，Boyer-Mann-Waggonner ([BMW]) は，(14) で S^1 を S^3 に変えた状況が，instanton moduli space $M(1,G)$ に関連して自然に生じることを指摘した．(11) について，

$$J : G/C_G(SU(2)) \to \Omega_0^3 G$$

を

$$J(gC_G(SU(2)))(x) = gxg^{-1}x^{-1}$$

により定める．すると，次の図式はホモトピー可換である:

$$\begin{array}{ccc} M(1,G) & \xrightarrow{i_1} & \Omega_1^3 G \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ G/C_G(SU(2)) & \xrightarrow{J} & \Omega_0^3 G \end{array}$$

[3] の概略で述べたように，Boyer-Mann-Waggoner は，上側の包含写像 i_1 が homology のどういう振る舞いをするか知りたかったが，できなかった．[8] では，下側の写像 J を詳しく研究した．主結果は，G が古典群のとき，

$$J_*; H_*(G/C_G(SU(2)); \mathbb{Z}/2) \to H_*(\Omega_0^3 G; \mathbb{Z}/2)$$

は単射であるという注目に値するものである．

この主結果を [3] の概略で述べた Boyer-Mann-Waggoner の計画に適用すると，$H_*(M(k,G); \mathbb{Z}/2)$ に非常にたくさんの非零な元が構成されることになる．

9. §2 の前半で述べたように，この論文は本研究課題の 2 つの主論文のうちの 1 つである．なお，密接に関連する論文として，つぎの [10] も参照．

10. §2 の定理 1 を証明するために，まず $\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の homology を計算するのだが，[9] では以下のように計算した: §1 の $\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ を開集合として含む空間 Y_k^n を，

$$Y_k^n = \{(p_0(z), \ldots, p_n(z)) : \text{各 } p_i(z) \text{ は実多項式で，実軸上には 1 つも共通根はない．}\}$$

但し，実軸以外には共通根は幾つあってもいいものとする．Y_k^n は，ΩS^n を構成する James construction の k-th stage とホモトピー同値であることが知られている．そこで，$H_*(T_k^n)$ から出発して，実軸上の共通根の個数を減らしていく数学的帰納法を行い，実軸上の共通根の個数が 0 になると $H_*(\mathrm{RRat}(\mathbb{C}P^n))$ が得られるという方法が，[9] の計算方法である．

これに対し，[10] では $\mathrm{RRat}_k(\mathbb{C}P^n)$ の homology を，Y_k^n や数学的帰納法を用いず，Vassiliev スペクトル系列のみから計算した．この方法は，非常に簡潔である．

[10] では，更に [2] で述べた対合同変な充満正則写像空間 $\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^n)$ の研究も行った．[2] では，$\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^2)$ の homology を決定したが，[10] では安定的状況を研究した．興味深いのは次のことである: $\mathrm{F}_k(\mathbb{C}P^n)$ の安定的状況の定理から期待できるように，(10) 包含写像の列の左端は k を大きくしていくと右端にホモトピー同値になっていくことは正しい．これにより，左端を知るためには右端を見ればある程度分かる．

しかし，そればかりでなく，$k < 2n-1$ のときには，$\mathbb{R}^k$ 内の直交 n 枠のなす Stiefel 多様体

$$SO(k)/SO(k-n)$$

が，より効率的な $\mathrm{RF}_k(\mathbb{C}P^n)$ の情報を与える．

11. 研究発表の (2) 口頭発表で述べたように，研究代表者は，2005 年 7 月に東京大学で開催された COE 国際会議 “Groups, Homotopy and Configuration Spaces” において，“Configuration spaces and rational functions” というタイトルで plenary talk（主要講演）を行った．

    [11] はこの講演の際用いた OHP フィルムである．このフィルムは，会議中に多くの希望者にコピーが配布された．従って，このコピーは十分有意義な資料であり，研究成果に値するものである．

    この内容の概略は，§2 の後半である．特に，[1] と [K] を合わせると，Arnold の問題が完全に解決されることに焦点を絞っている．$P_{k,n}^l$ の homology の具体的な計算は，[1] ではページ数の関係で省略せざるを得なかったが，[11] では簡単な場合について説明してあり，この部分が特に参考になるはずである．

参考文献

[A] V. I. Arnold, On some topological invariants of algebraic functions, Trudy Moscov. Mat. Obshch. 21 (1970), 27–46; English transl. in Trans. Mpscow Math. Soc. 21 (1970), 30–52.

[BMW] C. P. Boyer, B. M. Mann and D. Waggoner, On the homology of $SU(n)$ instantons, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 529–561.

[B] R. I. Brockett, Some geometric questions in the theory of linear systems, IEEE Trans. Automatic Control 21 (1976), 449–455.

[CCMM] F. R. Cohen, R. L. Cohen, B. M. Mann and R. J. Milgram, The topology of rational functions and divisors of surfaces, Acta Math. 166 (1991), 163–221.

[K] Y. Kamiyama, Polynomial model for homotopy fibers associated with the James construction, Math. Z. 237 (2001), 149–180.

[S] G. B. Segal, The topology of spaces of rational functions, Acta Math. 143 (1979), 39–72.

[V] V. A. Vassiliev, Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications. Revised ed., Transl of Math. Monographs 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994).