有理関数空間の完備化の位相幾何

有理関数空間の完備化の位相幾何

（研究課題番号　１３６４００８５）

平成１３年度～平成１４年度

科学研究費補助金（基盤研究 (C)(2)）

研究成果報告書

平成１５年３月

研究代表者　　　　神山　靖彦

大学理学部助教授）

ま　え　が　き

本研究は『有理関数空間の完備化の位相幾何』と題し，2001（平成 13）年度から 2002（平成 14）年度までの 3 年間にわたる継続研究として科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）の交付（課題番号 13640085）を受けて行ったものである．ここにその研究成果を報告する．
3 年間にわたる本研究の分担者は次の研究組織の項の記載通りである．この研究の遂行においてお世話下さった関係各位に心からの謝意を表する．

研究代表者　神山　靖彦

研究組織

研究代表者:　神山　靖彦　（琉球大学理学部数理科学科助教授）
研究分担者:　志賀　博雄　（琉球大学理学部数理科学科教授）
研究分担者:　手塚　康誠　（琉球大学理学部数理科学科教授）

交付決定額（配分額）　（金額単位：千円）

	直接経費	間接経費	合計
平成 13 年度	1,000	0	1,000
平成 14 年度	1,000	0	1,000
総計	2,000	0	2,000

研究発表

(1) 論文

[ ] 内にこの報告書における記載ページを示した.

1. Yasuhiko Kamiyama and Takahiko Yoshida, Symplectic toric space associated to triangle inequalities, Geometriae Dedicata, 93 (2002), 25–36. [7–19]

2. Yasuhiko Kamiyama and Shuichi Tsukuda, On deformations of the complex structure on the moduli space of spatial polygons, Canadian Math. Bull., 45 (2002), 417–421. [20–26]

3. Yasuhiko Kamiyama and Shuichi Tsukuda, Holomorphic vector fields on moduli spaces of polygons, New Zealand Journal of Mathematics 31 (2002), 39–42. [27–32]

4. Yasuhiko Kamiyama, Polynomial model for homotopy fibers associated with the James construction, Math. Z. 237 (2001), 149–180. [33–66]

5. Yasuhiko Kamiyama, Sheaf cohomology of the moduli space of spatial polygons and lattice points, Tokyo Journal of Mathematics 24 (2001), 205–209. [67–72]

6. Yasuhiko Kamiyama, Homology of the completion of instanton moduli spaces, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin, 印刷中. [73–86]

7. Yasuhiko Kamiyama, Akira Kono and Michige Tezuka, Cohomology of the moduli space of $SO(n)$-instantons with instanton number 1, preprint. [87–106]

8. Yasuhiko Kamiyama, Generating varieties for the triple loop space of classical Lie groups, preprint. [107–123]

9. Yasuhiko Kamiyama, Spaces of real rational functions with common roots, preprint. [124–141]

10. Yasuhiko Kamiyama, Completion of spaces of rational maps to Grassmannians, preprint. [142–156]

11. Rational maps to the quadric cone and homotopy fiber, preprint. [157–174]

12. Hiroo Shiga, Kouzou Tsukiyama and Toshihiro Yamagichi, Principal S^1-bundles and forgetful maps, Contemporary Mathematics 274 (2001), 293–297. [175–179]

(2) 口頭発表

神山靖彦

1. Symplectic volume of the moduli space of spatial polygons,
   (Topology Seminar (Geneva 大学), 2001 年 11 月)
2. Generating verieties for the triple loop space of classical Lie groups,
   (International conference on topology and its applications, (島根大学), 2002 年 6 月)
3. Spaces of rational functions with common roots,
   (Topology Seminar (Rochester 大学), 2002 年 11 月)

志賀博雄

1. 有理ホモトピー論におけるいくつかの問題,
   (「有理ホモトピー論の展開と応 用」シンポジウム (沖縄青年会館), 2001 年 8 月)
2. 有理ホモトピーの moduli 問題,
   (「空間の代数的モデルとその展望」シンポジウム (岡山大学), 2002 年 9 月)

手塚康誠

1. $H^*(PGL(3,F_q),F_3)$, $(q,3)=1$ についての注意,
   (「有理ホモトピー論の展開と応用」シンポジウム (沖縄青年会館), 2001 年 8 月)

研究成果

研究代表者，神山靖彦の研究テーマは，有理関数空間の完備化の位相幾何を研究することである．G を単純 Lie 群とし $G \to E_k \to S^4$を $k \in \pi_4(BG) \cong \mathbf{Z}$ で分類される主束とする．$\mathcal{A}_k$を E_k上の自己双対接続の空間とし，$\infty \in S^4$上のファイバーを保つ E_kの自己同型を $\mathcal{G}_{k,0}$とする．$M_k = \mathcal{A}_k/\mathcal{G}_{k,0}$とおき S^4上の charge k である G-instantons の moduli 空間という．

Atiyah と Donaldson により M_kは S^4から複素多様体への正則写像空間と解釈できる．詳しくは以下の通りである．V を複素多様体とし，簡単のため$\pi_2(V) \cong \mathbf{Z}$ とする．$\mathrm{Rat}_k(V)$ で S^2から V への基点を保つ degree k の正則写像空間を表す．特に V として loop 群ΩG を考えたとき同相写像 $M_k \cong \mathrm{Rat}_k(\Omega G)$ が存在するのである．

M_kにはそれを開集合とする完備化$\overline{M}_k$がある．$\mathrm{SP}^q(\mathbf{R}^4)$ を $\mathbf{R}^4$の q 回対称積とするとき

$$\overline{M}_k = \bigcup_{q=0}^{k} \mathrm{SP}^q(\mathbf{R}^4) \times M_{k-q}$$

とおくのである．これを Uhlenbeck 完備化と呼び，gauge 理論においては大変有効は研究手段である．

さて上で見た様に M_kは $\mathrm{Rat}_k(V)$ の 1 つの例であり，M_kに対しその完備化を考察することが有効であることは実証済みである以上，一般の $\mathrm{Rat}_k(V)$ の完備化を考察しようという試みは自然なことである．本研究の目的はこれを実行することである．

完備化を考察する $\mathrm{Rat}_k(V)$ の V としては次の性質を満たすものを考える．i_k : $\mathrm{Rat}_k(V) \to \Omega_k^2 V$ を包含写像とする．我々が V に要求するのは i_kが $N(k)$ 次元までホモトピー同値であり $\lim_{k\to\infty} N(k) = \infty$ となることである．特に $\mathrm{Rat}_\infty(V) \simeq \Omega_0^2 V$ となることである．この様な V としては $\mathbf{C}P^n$, その一般化である Grassmann 多様体 $G_n(\mathbf{C}^{n+m})$, loop 群ΩG, また quadric cone などがあり，本研究ではこれらの V に対する $\mathrm{Rat}_k(V)$ の完備化について考察し，成果を口頭及び論文で発表した．

$\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ は最も典型的かつ重要な場合である．またこの空間は gauge 理論における monopoles 方程式の解空間と同一視されるなど数学の様々な分野と関連する．そこでこの空間について既知の結果を述べておく．$i_k : \mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n) \hookrightarrow \Omega_k^2 \mathbf{C}P^n \simeq \Omega^2 S^{2n+1}$を包含写像とすると Segal により i_kは $k(2n-1)$ 次元までホモトピー同値である．更に $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の安定ホモトピー型は研究代表者及びそれとは独立に Cohen-Cohen-Mann-Milgram により決定されている．結果は以下の通りである．$\Omega^2 S^{2n+1} \underset{s}{\simeq} \bigvee_{1\leq q} D_q(S^{2n-1})$ を Snaith の stable splitting とすると $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{q=1}^{k} D_q(S^{2n-1})$ が成立するのである．なお $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の研究には通常以下の表示を用いる．S^2の基点を ∞, $\mathbf{C}P^n$の基点を $[1,\ldots,1]$ と取ることにより

(*)

$\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n) = \{(p_0(z),\ldots,p_n(z))$:各 $p_i(z)$ は monic な degree k の複素多項式で
全ての $p_i(z)$ に共通する根は無い $\}$

となる．この表示により $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ は configuration space（配置空間）の一種とみなされるのでこの研究手法が適用できる．

この状況での主論文は発表論文リストの [4] である．以下でこの内容を概説する．(*) による $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の表示で根に関する条件を忘れることにより包含写像 $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n) \hookrightarrow \mathbf{C}^{k(n+1)}$がある．この $\mathbf{C}^{k(n+1)}$が $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の Uhlenbeck 完備化なのである．集合として次の分解がある．$\mathbf{C}^{k(n+1)} = \coprod_{q=0}^{k} \mathbf{C}^q \times \mathrm{Rat}_{k-q}(\mathbf{C}P^n)$. ここで $\mathbf{C}^q \times \mathrm{Rat}_{k-q}(\mathbf{C}P^n)$ とは $(p_0(z),\ldots,p_n(z)) \in \mathbf{C}^{k(n+1)}$がちょうど q 個の共通根を持つ場合に対応する．この分解において $0 \leq q \leq l$ なる q に対応する strata だけを採用して得られる空間を $X_k^l(\mathbf{C}P^n)$ とおく．つまり

$X_k^l(\mathbf{C}P^n) = \{(p_0(z),\ldots,p_n(z))$:各 $p_i(z)$ は monic な degree k の複素多項式で
高々l 個の共通根を持つ $\}$

とおくわけである．$X_k^l(\mathbf{C}P^n)$ は $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ を開集合として含み，$X_k^0(\mathbf{C}P^n) = \mathbf{C}^{k(n+1)}$である．

さて [4] では $X_k^l(\mathbf{C}P^n)$ の安定ホモトピー型を決定した．$l=0$ のときは $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ に関する上記の結果となるので従来の結果が大幅に一般化されたことになる．結果は次の通りである．

$J^l(S^{2n})$ をΩS^{2n+1}の James construction の l-th stage とし包含写像 $J^l(S^{2n}) \hookrightarrow \Omega S^{2n+1}$ の homotopy fiber を $W^l(S^{2n})$ と書く．すると次の fibration の列がある．

$$\Omega^2 S^{2n+1} \to W^l(S^{2n}) \to J^l(S^{2n}) \hookrightarrow \Omega S^{2n+1}.$$

$W^l(S^{2n}) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{1\leq q} D_q \xi^l(S^{2n})$ を stable splitting とすると，[4] の主定理は $X_k^l(\mathbf{C}P^n) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{q=1}^{k} D_q \xi^l(S^{2n})$ である．

以下で発表論文リストの順番に従って [4] 以外の論文についてその内容を概説する．

[1] P_kで $\mathbf{R}^3$内の等辺 k 角形の空間を表す．P_kは複素 $k-3$ 次元の複素多様体である．P_kは symplectic 多様体であるが symplectic 構造を保つ torus T^{k-3}-作用は無い．しかし P_kの open dense な部分集合 P_k'を取ればそこには T^{k-3}-作用があり moment map $\mu : P_k' \to \mathbf{R}^{k-3}$も記述できる．$\Delta_{k-3}$を$\mu(P_k')$ の $\mathbf{R}^3$での閉包とするとΔ_{k-3}は三角不等式により定義される polytope である．

[1] では P_kをある同値関係$\sim$で割ることにより空間 V_kを定義し次の性質を満たすことを証明した．

(i) V_kは T^{k-3}-作用を持つ symplectic 多様体である．

(ii) Moment map $\nu : V_k \to \mathbf{R}^{k-3}$に対し$\nu(V_k) = \Delta_{k-3}$が成立する．

すなわち T^{k-3}-作用を持たない symplectic 多様体から，同じ moment map image を持つ symplectic 多様体 V_kを構成したわけである．

[2] [1] で k が奇数のときを考える．このとき P_kは特異点を持たない．TP_kで P_kの tangent bundle を表す．[2] では層係数コホモロジー $H^*(P_k, TP_k)$ が全ての次元で消えることを証明した．証明は次の方針で行う．まず小平の消滅定理より $H^q(P_k, TP_k) = 0$ $(q \geq 2)$ が示される．次に local cohomology の議論により $H^q(P_k, TP_k) = 0$ $(q = 0, 1)$ を示す．この証明はかなり代数的であるので，$H^0(P_k, TP_k) = 0$ に関する初等的な証明を [3] で与えた．

[3] [2] の証明の本質的な部分である $H^0(P_k, TP_k) = 0$ について別証を与えた．証明は $H^0(P_k, TP_k)$ の元を P_k上の正則ベクトル場と解釈して，これを局所的に表示して解析接続を行うことにより 0 に限ることを示すものである．

[5] [1] で k が奇数のときを考える．$\mathcal{L}_k$で P_k上の canonical bundle の dual を表す．つまり $\mathcal{L}_k = \Lambda^{k-3} TP_k$とおく．[5] では層係数コホモロジー $H^*(P_k, \mathcal{L}_k)$ を決定した．結果は次の通りである．

$$\dim_{\mathbf{C}} H^q(P_k, \mathcal{L}_k) = \begin{cases} 0 & q \geq 1 \\ \Delta_{k-3}\text{内の格子点の個数} & q = 0. \end{cases}$$

ここでΔ_{k-3}は [1] で定義した $\mathbf{R}^{k-3}$内の polytope である．

[6] M_kで S^4上の charge k である G-instantons の moduli 空間を表す．[6] では M_kの完備化の一番始めの部分である $M_k \coprod \mathbf{R} \times M_{k-1}$の homology を決定した．結果は次の様に解釈できる．$i_1 : M_1 \hookrightarrow \Omega_1^3 G$ を包含写像とし $Ad(i_1) : \Sigma M_1 \to \Omega^2 G$ を adjoint とする．$Ad(i_1)$ をΣM_1から$\Omega^2 G$ の universal cover への写像に持ち上げ，その homotopy fiber を W と書く．すると $M_k \coprod \mathbf{R} \times M_{k-1}$の homology は W の homology の weight $\leq k$ なる元からなる．

[7] G を単純 Lie 群とし G の 1 つの部分群 $SU(2)$ の G での中心化群を C と書く．Charge 1 の G-instantons の moduli 空間 M_1は $\mathbf{R}^5 \times G/C$ と微分同相であることが知られている．そこで M_kの完備化の homolohy を研究するために G/C の homology を調べることは不可欠である．$G = SU(n)$ のときは $SU(n)/C$ は $\mathbf{C}P^{n-1}$上の unit tangent bundle と同一視され，この homology は良く知られている．$G = Sp(n)$ のときは $Sp(n)/C \cong \mathbf{R}P^{4n-1}$ である．[7] では $G = Spin(n)$ のときの G/C の cohomology を cohomology 作用素も含めて完全に決定した．得られた結果の顕著な点は，$H^*(Spin(n)/C; \mathbf{Z}/2)$ が 8 を法とした規則を持っていることで，従って $H^*(\Omega_0^3 Spin(n); \mathbf{Z}/2)$ と関係深いということである．

[8] [7] の記号を使う．$J: G/C \to \Omega_0^3 G$ を $J(gC)(x) = gxg^{-1}x^{-1}$により定める．[8] では $J_*: H_*(G/C; \mathbf{Z}/2) \to H_*(\Omega_0^3 G; \mathbf{Z}/2)$ が単射であることを証明し，$\mathrm{Im} J_*$に荒木・工藤作用素を繰返し施すと $H_*(\Omega_0^3; \mathbf{Z}/2)$ の環としての生成元が全て得られることを証明した．この結果は [6] でも使われ重要なものである．

なお [8] の結果は以下の Bott の古典的定理の一般化になっておりこれ自身大変興味深い．G の 1 つの部分群 S^1の G における中心化群を C'と書く．$J': G/C' \to \Omega G$ を上の J と同様に定めると $\mathrm{Im}\,(J'_*: H_*(G/C; \mathbf{Z}) \to H_*(\Omega G; \mathbf{Z}))$ は環 $H_*(\Omega G; \mathbf{Z})$ を生成する．

[9] [4] の $X_k^l(\mathbf{C}P^n)$ には対合が多項式の係数への複素共役で作用する．不動点集合を $RX_k^l(\mathbf{C}P^n)$ で表す．つまり $(p_0(z), \ldots, p_n(z)) \in X_k^l(\mathbf{C}P^n)$ が $RX_k^l(\mathbf{C}P^n)$ に属する必要十分条件は，各 $p_i(z)$ が実多項式であることである．[9] では $RX_k^l(\mathbf{C}P^n)$ の安定ホモトピー型を決定した．

最も興味あるのは $l=0$ の場合で，このとき $RX_k^0(\mathbf{C}P^n)$ を $\mathrm{RRat}_k(\mathbf{C}P^n)$ と書く．包含写像 $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n) \hookrightarrow \Omega_k^2 \mathbf{C}P^n \simeq \Omega^2 S^{2n+1}$に対比して，この場合は $\mathrm{RRat}_k(\mathbf{C}P^n) \hookrightarrow \mathrm{Map}_k^T(\mathbf{C}P^1, \mathbf{C}P^n) \simeq \Omega S^n \times \Omega^2 S^{2n+1}$となる．ここで $\mathrm{Map}_k^T(\mathbf{C}P^1, \mathbf{C}P^n)$ は $\mathbf{C}P^1$から $\mathbf{C}P^n$への基点を保つ degree k の同変連続写像空間を表す．ΩS^nの stable summands には通常の weight，$\Omega^2 S^{2n+1}$の stable summands には通常の 2 倍の weight を与えると，$\mathrm{RRat}_k(\mathbf{C}P^n)$ は$\Omega S^n \times \Omega S^{2n+1}$の weight $\leq k$ なる stable summands からなるというのが [9] の主定理である．

[10] [4] の $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の $\mathbf{C}P^n$の所を Grassmann 多様体 $G_n(\mathbf{C}^{n+m})$ に一般化して得られる空間を $\mathrm{Rat}_k(G_n(\mathbf{C}^{n+m}))$ と書く．[10] では $\mathrm{Rat}_k(G_n(\mathbf{C}^{n+m}))$ の完備化の homology を決定した．

[11] $\mathbf{C}P^3$内の quadric cone を H と書く．つまり

$$H = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbf{C}P^3 : z_2^2 = z_1 z_3\}$$

とする．[4] の $\mathrm{Rat}_k(\mathbf{C}P^n)$ の $\mathbf{C}P^n$の所を H に変更して得られる空間を $\mathrm{Rat}_k(H)$ と書く．[11] では $\mathrm{Rat}_k(H)$ の完備化の homology を決定した．

[12] S^1-主束の total space の自己ホモトピー同値空間と，S^1-同変自己ホモトピー同値空間の関係について研究した．

研究集会の記録

科学研究費，基盤研究 (C)(2)13640085 の補助により，2001 年 8 月に沖縄青年会館において「有理ホモトピー論の展開と応用」シンポジウムを開催した．(世話人代表　志賀博雄)．研究集会のプログラムは以下の通りある．

研究集会会場: 沖縄県青年会館(那覇市久米2－15－23 Tel 098－864－1780)

8月27日(月)

13:30-14:20　岸本大祐 (京大 大学院理学研究科)
BUの局所化とBott map

14:40-15:30　玉村章枝 (岡山理大 理), 河野進 (阪大 理)
On the elliptic graded commutative Q-algebras of dimension 10

15:50-16:30　川口憲範 (九大 大学院数理)
S^n とS^{2n-1}の一点連結和および S^{2n-1}と S^{2n-1}の一点連結和の有理ホモトピー群

8月28日(火)

9:30-10:20　奥山真吾 (詫間電波高専)、島川和久 (岡山大 理)
多様体の配置と無限ループ空間

10:40-11:30 石黒賢士 (福大 理)
例外Lie群G_2の部分群とpコンパクト群の分類空間

13:30-14:20 河野明 (京大 大学院理学研究科)
随伴束の局所化について

14:40-15:30 岩瀬則夫 (九大 大学院数理)
Lusternik-Schnirelmann category of a shere-bundle over a sphere

15:50-16:30 手塚康誠 (琉大 理)
$H^*(PGL_3(F_q),F_3)$, $(q,3)=1$についての注意

8月29日(水)

9:30-10:20　栗林勝彦 (岡山理大 理)
The Betti number of the space of invariant paths on a space

10:40-11:30　志賀博雄 (琉大 理)、山口俊博 (琉大 理)
有理ホモトピー論におけるいくつかの問題