

琉球大学学術リポジトリ

有限点集合の距離と配置の研究

メタデータ	言語: 出版者: 前原潤 公開日: 2009-03-19 キーワード (Ja): 整数距離グラフ, 有理数距離グラフ, 最小スター キーワード (En): hemi-metric, super-bound, ntegral-distance graph, rational-distance graph, minimal star 作成者: 前原, 潤, Maehara, Hiroshi メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/9310

有限点集合の距離と配置の研究

15540131

平成15年度～平成16年度科学研究費補助金
(基盤研究(C)(2)) 研究成果報告書

平成17年5月

研究代表者 前原 潤
(琉球大学教育学部)

琉球大学附属図書館



0020054010335



377-7
MA
2004

はしがき

ユークリッド空間内の点集合に関して、距離に制約をつけた場合の点配置に関する問題は数学の研究や応用で随所に現れ、これについての研究結果は応用範囲の広いものである。点配置の典型的な研究として、距離グラフの研究があげられよう。ユークリッド空間内に点集合が与えられたとき、2点間の距離が、指定された‘距離集合’に属するような点対を結んでグラフを作る。これが、指定された距離集合に対する距離グラフと呼ばれるものである。これについては、(1) 抽象的なグラフはどのような条件があれば、適当な点配置を選んで、指定された距離集合に対する距離グラフとして実現できるか、(2) 実現できるための空間の次元の最小値はいくらか、(3) どのような距離グラフがリジッドになるか、というようなこと等が問題となる。

距離グラフに関しては、これまでの研究結果を概観し、いくつかの新しい結果を加えることができた。

この他、与えられた点集合に対する辺長が最小のスターの問題、有限点集合の形状と関係する汎距離の導入、反転による点配置の変形等の研究を行った。

研究組織

研究代表者：前原 潤 (琉球大学教育学部教授)

交付決定額 (配分額)

(金額単位：千円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 15 年度	900	0	900
平成 16 年度	800	0	800
総計	1700	0	1700

研究発表

(1) 学会誌等

- H. Maehara, On a condition for the union of spherical caps to be connected, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 101/102 (2003) 264-270.
- H. Maehara, Plane graphs with straight edges whose bounded faces are acute triangles, *Journal of Combinatorial Theory (B)* 88/2 (2003) 237-245.
- Y. Maeda and H. Maehara, Observing an angle from various viewpoints, *Proc. JCDCG2002, (LNCS 2866)*, 2003, 200-203.
- H. Maehara and M. Watanabe, Note on the star connecting given points in a normed plane, *Ryukyu Mathematical Journal* 16(2003) 73-78.
- H. Maehara, Distance graphs and rigidity, (ed by Pach, *Geometric Graph Theory*) *Contemporary Mathematics* 342(2004), 149-169, MAA.
- H. Maehara, On the intersection graph of random caps on a sphere, *European Journal of Combinatorics*, 25(2004) 707-718.
- H. Maehara, When does the union of random caps become connected?, *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 56(2004) 397-402.
- M. Deza, M. Dutour, H. Maehara, On volume-measure as hemimetrics, *Ryukyu Mathematical Journal* 17(2004), 1-9.

(2) 口頭発表

- H. Maehara, On a condition for the union of spherical caps to be connected, *ISM Symposium, ISM, Tokyo, 3/20-3/22, 2003*.
- H. Maehara, ミンコフスキー平面における三角形の周長について、*組合せ論・離散幾何研究集会 2003、琉球大学、8/9-8/10, 2003*.

- H. Maehara, When can a pair of unit balls in a crowd see each other?, Seminar on Stochastic Models and Discrete Geometry, ISM, 8/20, 2003.
- H. Maehara, Piercing and cutting a set of disjoint balls, Seminar on Stochastic and Discrete Geometry, ISM, 9/11, 2003.
- H. Maehara, Integral- and rational-distance graphs, TGT, 横浜国大、11/20–11/21, 2003.
- H. Maehara, 反転とメビウス不変量、グラフ理論・離散幾何研究集会、九州東海大学阿蘇校舎、熊本、7/17–7/18, 2004.
- H. Maehar, Almost halving a set of objects by a hyperplane, Seminar on Stochastic Models and Discrete Geometry, ISM, 8/24, 2004.
- H. Maehara, When can a pair of balls in a crowd see each other?, Colloquium of Mathematics and Computer Science, Emory University, Atlanta, Georgia, 9/16, 2004.
- H. Maehara, Pearl numbers vs stick numbers for knots, COE Workshop on sphere packing, 九州大学理学部および国際ホール, 11/1–11/5, 2004.
- H. Maehara, An enumeration problem related to inversions, Seminar on Stochastic Models and Discrete Geometry, ISM, 11/16–11/17, 2004.
- H. Maehara, Pearl numbers vs stick numbers for knots, TGT, 横浜国大、11/25–11/26, 2004.
- H. Maehara, 球面上の等周定理とニュートンの13球問題 I, II, 九大組合せ数学セミナー、九州大学理学部, 2/7–2/8, 2005.
- H. Maehara, Applications of the inscribed angle theorem in spherical geometry, Seminar on Stochastic Models and Discrete Geometry, ISM 2/14, 2005.
- H. Maehara, Othello-like solitaire on a graph, Workshop on Stochastic Models and Discrete Geometry, ISM 3/24–3/25, 2005.

研究成果

研究成果の概要

1. 可算個の頂点を持つ完全グラフから1辺を除いたグラフはどんな次元でも整数距離グラフとならないが、平面上の有理数距離グラフとなる。また、 K_n が平面上の整数距離グラフとして、どの3頂点も同一直線上になく、どの4頂点も同一円周上にないように実現できるなら、完全 n 部グラフ $K(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は平面上の有理数距離グラフとなる。ここで、 $a_k = \binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{3} + 1$ である。

2. 平面上の点集合の場合、1-ノルムと ∞ -ノルム(maxノルム)については、それらの点を結ぶ最小スターの中心が容易に求められる。また、任意の $n(\neq 4, > 2)$ と $k > 1$ について p -ノルム($p = 1, 2, \dots, k$)での最小スターの中心がすべて異なるような平面上の n 点集合が存在する。ところが4点集合についてはどんなノルムについても、同じ点が最小スターの中心となる。(倉敷芸術科学大学の渡辺守氏との共同研究)

3. 平面上の $n(> 3)$ 点集合については、そのピボット反転という変形が自然に定義されるが、ピボット反転では、互いに相似でない点集合はただか $n+1$ 個しか得られない。(統計数理研究所の上田氏との共同研究)

4. ユークリッド空間内の $m+2$ 個以上の点の集合 X に対して、 X の $(m+1)$ 点集合にその凸包の m 次元体積を対応させる写像 μ は汎距離(hemi-metric)で、 m 次元の単体不等式を満たす。各 m について、この不等式の余裕の限界値(super-bound) $s(m)$ が定義でき、その値は点集合 X の‘形状’にある程度関係がある。実際、 $|X| \geq 5$ のとき、同値な関係“ $s(1) = 2 \Leftrightarrow s(2) = 3 \Leftrightarrow [X \text{ は正則単体の頂点集合}]$ ”が成立する。3次元の正多面体の頂点集合については $s(m)$ の値を計算した。 n 次元のクロスポリトープの場合、 $n \geq m \geq 3$ なら常に $s(m) = 3$ で、 n 次元立方体の場合は $m > 0$ のとき、 $s(m) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ となる。(M. Deza, M. Dutourとの共同研究)

5. 2つの点集合は、一方にいくつかの反転を行って他方に相似な点集合に変換できるとき、反転同値であるという。すべての3点集合は反転同値である。4点集合 $\{A, B, C, D\}$ に対して、メビウス不変量 $[A, B, C, D] := (AB/BC)/(AD/DC)$ は反転で不変であり、 $n \geq 4$ のとき、2つの n 点集合は、ある全単射の下で、対応するメビウス不変量の値がすべて等しくなる場合に限り反転同値となる。 n 点集合からは $6 \times \binom{n}{4}$ 個のメビウス不変量が得られるが、これらは $n(n-3)/2$ 個のメビウス不変量から積や逆数を取ることで生成され、 $n(n-3)/2$ 個は独立である。

論文目次

1. Distance graphs and rigidity	7
2. Note on the star connecting given points in a normed plane	37
3. Inversions of a finite point-set	43
4. On volume-measure as hemi-metrics	51
5. Inversions and Möbius invariants	61
6. Almost halving a set of objects in Euclidean space by a hyperplane	75
7. Pearl numbers versus stick numbers for knots	85
8. (講演記録) 球面上の等周定理とニュートンの13球問題	95