有限点集合の距離と配置の研究

球面上の等周定理とニュートンの13球問題

前原　潤 (琉球大学)

I 球面上の等周定理

辺 – 長さが π より短い大円弧

凸領域 – 領域内のどの2点も領域内を通る辺で結ぶことができる

三角形 – 3つの辺で囲まれた凸領域

四辺形 – 4つの辺で囲まれた領域

cap – 球面を平面で切ったときの片側

$|ABC|, |ABCD|$ – 三角形、四辺形の面積

$cap(ABC)$ – ABC の外接 cap

$\widehat{ABC}$ – 円弧

P^* – 点 P の対心点

- **Girard の公式** $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$

1　球面上の円周角定理

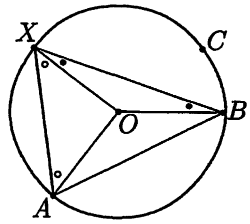
定理 1 (H.M. 1998) $cap(ABC)$ の中心を O とする。$X \in \widehat{ACB}$ のとき、

$$\angle AXB - (\angle XAB + \angle XBA) = \pm 2\angle OAB,$$

が成立する。符号は、$\widehat{ACB}$ が優弧なら (–)、そうでなければ (+) である。

系 1 (1) $\angle C = \angle A + \angle B \Leftrightarrow \widehat{ACB}$ は半円。
(2) $\widehat{ACB}$ が劣弧 $\Rightarrow \angle C$ は鈍角。∎

定理の証明



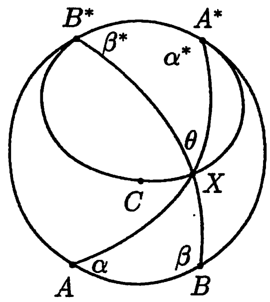
∎

2　Lexell の定理

定理 2 (A.J.Lexell 1784)

$$X \in A^*\widehat{C}B^* \Rightarrow |ABX| = |ABC|.$$

証明



$$\begin{aligned} X \in A^*\widehat{C}B^* &\Rightarrow \theta - \alpha^* - \beta^* = 一定 \\ &\Rightarrow \theta - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = 一定 \\ &\Rightarrow \theta + \alpha + \beta = 一定 \\ &\Rightarrow |ABX| = |ABC|. \end{aligned}$$

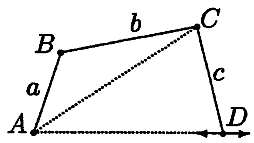
∎

系 2 $A^*\widehat{C}B^*$ が短いほど $|ABC|$ は大きい。▮

補題 1 2辺の長さが $b, c\,(b+c<\pi)$ の三角形は第3辺が外接 *cap* の直径となるとき、最大の面積を持つ。

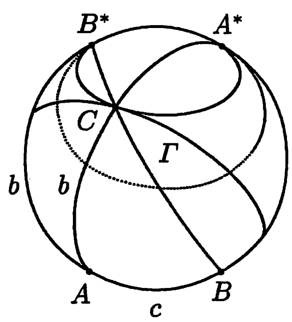
系 3 3辺の長さが $a, b, c\,(a+b+c<\pi)$ に指定された半球面内の四辺形が最大の面積をもつのは、四辺形が *cap* に内接し、しかも残りの辺が *cap* の直径の場合である。

証明



▮

補題1の証明
$AB=c$ となる A, B を固定して、$|ABC|$ が最大となる $C \in \Gamma := \{X \mid XA = b\}$ を探す。



系2により、$A^*\widehat{C}B^*$ が点 C で Γ に接するとき、$|ABC|$ は最大となる。この場合、$AC \perp A^*\widehat{C}B^*$ であり、CA^* は $cap(A^*CB^*)$ の直径。よって

$$\angle CB^*A^* = \angle B^*CA^* + \angle B^*A^*C.$$

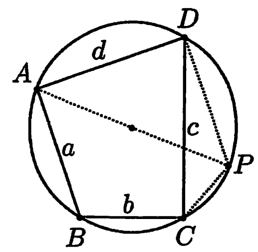
従って、$\pi - \angle B = \angle C + \pi - \angle A$ で、$\angle A = \angle B + \angle C$ となる。ゆえに BC は $cap(ABC)$ の直径である。▮

3 等周定理

- 長さが 2π より短い閉曲線は、ある半球面の内部に含まれる。
- 周の長さが 2π より短い四辺形は各辺の長さを変えずに変形して cap に内接させることができる。

定理 3 4辺が $a, b, c, d\,(a+b+c+d<2\pi)$ の半球面内の四辺形で面積が最大のものは *cap* に内接する。

証明 $ABCD$ を cap に内接する、4辺が a, b, c, d の四辺形とする。この四辺形を、各辺の長さを変えずに変形すると面積が減少することを示す。



c が最大で、$d \geq b$ とする。AP を cap の直径とすると、AP は CD と交わり、

$$d + DP < \pi, a + b + CP < \pi$$

である。3点 C, D, P と辺長 a, b, c, d を固定して、$ABCD$ を $A'B'CD$ に変形する。

$$|A'PD| < |APD|, \; |A'B'CP| < |ABCP|$$

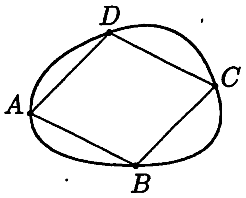
であるから、

$$\begin{aligned} |A'B'CD| &\leq |A'B'CP| + |A'DP| - |CPD| \\ &< |ABCP| + |PAD| - |CPD| \\ &= |ABCD|. \end{aligned}$$

▮

定理 4 (Bernstein 1905)
長さ $\ell\,(<2\pi)$ の閉曲線で囲まれた、半球面内の領域のうち、面積が最大のものは *cap* である。

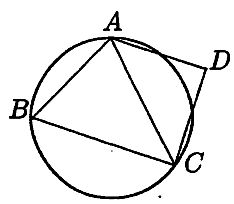
証明



4点 A, B, C, D が円周上に乗らないとせよ。四辺形 $ABCD$ に周りの縁をつけたまま、変形して四辺形 $ABCD$ を cap に内接させる。すると全体の面積が大きくなる。▮

4 固有対角線補題

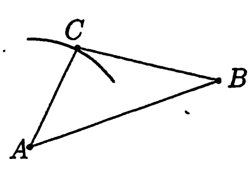
- 三角形 ABC と ACD の和となる四辺形において、点 D が $cap(ABC)$ の内点でないとき、AC を四辺形 $ABCD$ の固有対角線という。



- 2つの三角形に分割できる四辺形は必ず固有対角線をもつ。
- 固有対角線を2つもつ四辺形は cap に内接する凸四辺形に限る。

補題 2 3辺の長さが a, b, x の三角形の辺 x の対角の大きさ θ は、x の単調増加関数である。▮

補題 3 $\angle C$ が鈍角の三角形 ABC の2辺 AB, AC の長さを変えずに、辺 BC の長さを、$\angle C$ が鈍角の範囲で縮めると、$|ABC|$ も $\angle B$ も減少する。

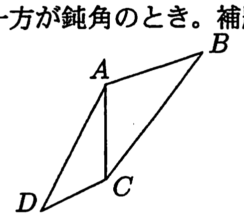


証明
BC が減少 $\Rightarrow$ $\angle A$ が減少 $\Rightarrow$ C が三角形の内部に移動 $\Rightarrow$ 面積と $\angle B$ が減少。▮
注) $\angle B$ が減少すると BC も減少する。

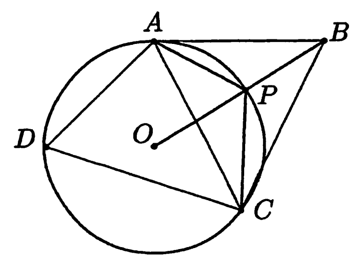
補題 4 (固有対角線補題) AC を四辺形 $ABCD$ の固有対角線とする。4辺の長さを変えずに、固有対角線 AC の長さを縮めると、四辺形の面積は減少する。

注) 固有対角線は長さを縮めても固有対角線である。(固有対角線が入替わるとき、四辺形は cap に内接し、面積が大きくなる。)

証明 2つの場合に分ける。
(*i*) $\angle BAC, \angle BCA$ の一方が鈍角で、$\angle DAC$, $\angle DCA$ の一方が鈍角のとき。補題3を適用。



(*ii*) $\angle BAC$ も $\angle BCA$ も鈍角でないとき。
$B \neq O^*$ で、OB と円は ABC の内部で交わる。



$cap(ACD)$ は凸だから $\angle APB, \angle CPB$ は鈍角。
• 四辺形 $APCD$: 4辺の長さを変えずに AC を縮める $\rightarrow$ $APCD$ は cap に内接しなくなる $\rightarrow$ $|APCD|$ が減少する。
• 四辺形 $APCB$: 4辺の長さを変えずに AC を縮める $\rightarrow$ $\angle ABC$ が減少 $\rightarrow$ $\angle ABP, \angle CBP$ の一方が減少 $\rightarrow$ BP が縮む $\rightarrow$ $|APCB|$ が減少。
▮

系 4 $cap(ABC)$ の中心が ABC に含まれるとき、AC, BC の長さを変えずに AB を縮めると、$|ABC|$ は減少する。

証明 C' を大円 AB に関して、点 C に対称な点とせよ。すると AB は四辺形 $ACBC'$ の固有対角線となる。従って、AB を縮めると、四辺形の面積が減少し、その半分である ABC の面積も減少する。▮

系 5 3辺が $x, y, z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ の三角形 ABC の２辺の長さを変えずに他の１辺を縮めると、面積が減少する。

証明 A, B, C を頂点とする平面三角形の各辺の長さは１以上 $\sqrt{2}$ 以下。ゆえに、その外心は平面三角形に含まれる。従って、$cap(ABC)$ の中心は ABC に含まれる。▮

II ニュートンの 13 球問題

5 球面余弦定理・補題

定理 5 (球面余弦定理) 3辺が x, y, z の球面三角形の辺 z の対角を θ とすると、

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \theta$$

が成立する。▮

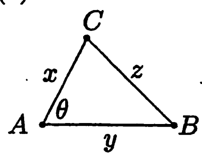
定数 a, b, c, τ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{3} \approx 1.047, \\ b &= \cos^{-1}\frac{1}{7} \approx 1.427, \\ c &= \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{6}}{4}\right) \approx 1.924, \\ \tau &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

補題 5

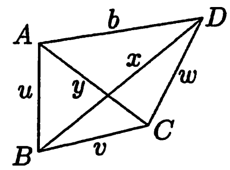
(1) 球面半径が a 以下の cap に内接し、３辺の長さが a 以上の球面三角形には、c より長い辺はたかだか１つしかない。

(2)



$a < x \leq y < b,\ a \leq z$
$\Rightarrow \theta > \tau.$

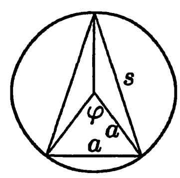
(3)



$ABCD$ は凸四辺形、
$x \leq c,\ \ a \leq u, v, w$
$\Rightarrow y > b.$

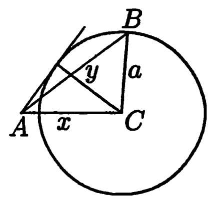
証明

(1) このような三角形の２番目に大きい辺の長さの上限は？半径が a の cap に内接し最小辺が a である２等辺三角形の等辺の長さ s が上限。



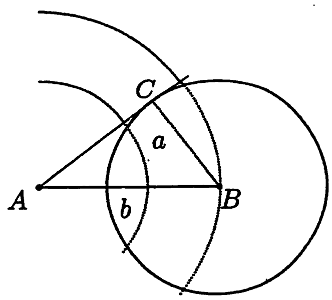
余弦定理を用いて、$\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\cos s = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(\pi - \frac{\varphi}{2})$, $s = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{6}}{4}\right) = c.$ ▮

(2) $\theta = \theta(x, y, z) \geq \theta(x, y, a)$ (補題２).



$z = a$ のとき、
A, C を固定して B を動かす。
$x \leq y \leq b$ のとき、
θ は y について単調減少。
$\therefore \theta(x, y, a) \geq \theta(x, b, a).$

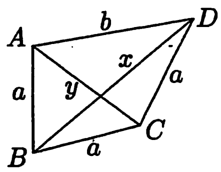
次に $z = a, y = b$ のとき、A, B を固定して C を動かす。



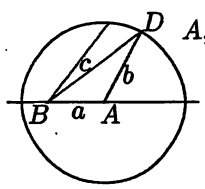
$$\begin{aligned}\theta(x,b,a) &\geq \min\{\theta(a,b,a),\theta(b,b,a)\}\\ &= \theta(a,b,a)=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となる。▮

(3) $y=f(u,v,w,x)$ の下限を求める。補題 2 より、$f(u,v,w,x)\geq f(a,a,a,x)$.



$\angle ABD+\angle DBC$ を最小にする $x(\leq c)$ は？



A,B を固定して D を動かす。
$\angle ABD$ は $x\doteqdot c$ で最小。
同様に、
$\angle DBC$ も $x=c$ で最小。
$\therefore y\geq f(a,a,a,c)$.

$x=c$ のとき $\angle ABC\approx 1.7238$
$f(a,a,a,c)\approx 1.4347>b\approx 1.427$. ▮

補題 6　頂点数 13 の平面グラフで、以下の 3 条件を満たすものは存在しない。

1. 各頂点の次数は 5 以下である。
2. グラフの面は 20 個の三角形と 1 個の四辺形からなる。
3. 長さ 3 のサイクルは三角形の面の周に限る。

証明　グラフの辺数は $\frac{4+3\times 20}{2}=32$. ゆえに次数の総和は 64 で、1 頂点だけが次数 4、他は次数 5 である。四辺形から出発して、実際に平面グラフを構成することを、次の 2 つの場合に分けて試みる。いずれの場合も不可能であることを確かめる。

(*i*) 四辺形の頂点の次数がすべて 5 である。
(*ii*) 四辺形の頂点に次数 4 の頂点がある。
▮

6　12 球定理

定理 6　1 つの単位球に同時に接することができる単位球の個数の最大値は *12* である。ただし、異なる球どうしは交差できない。

証明　X を単位球面上の、互いの球面距離が a 以上の点集合で点の個数 n が最大のものとする。X の凸包（凸多面体）は球の中心を含む。

球の中心から投影して球面を多角形分割。対角線を加えて、球面の三角形分割 $\mathcal{T}$ を作る。オイラーの公式により、$\mathcal{T}$ の三角形の個数は $2n-4$.

(*)　$\boxed{n\leq 13 \text{ である。} n=13 \text{ なら、} b \text{ 以上の長さの } \mathcal{T} \text{ の辺はたかだか 1 本しかない。}}$

（証明は後で。）

$n=13$ と仮定せよ。すると、$\mathcal{T}$ の面数は 22 である。$\mathcal{T}$ から長さが b 以上の辺を消して得られるグラフを G とする。補題 5 (2) により、

1．G の各頂点の次数は 5 以下である。

$\mathcal{T}$ に長さ b 以上の辺がなければ、G は 22 個の三角形の面を持ち、辺数は $22\times 3/2=33$ となり、平均次数は $66/13>5$ で矛盾。よって $\mathcal{T}$ には長さ b 以上の辺が 1 本ある。ゆえに

2．G の面は 1 個の四辺形と 20 個の三角形。G の 3-サイクルの小さい側の面積は、系 5 により、3 辺が b の三角形の面積 $\gamma\approx 1.1948$ より小さい。各三角形の面の面積は 3 辺が a の三

角形の面積 $\delta \approx 0.5513$ 以上である。ゆえに 3-サイクルの小さい側は三角形の面を3つ以上含むことはできない。

G の各頂点には3つ以上の三角形が集まるから、3-サイクルの小さい側に頂点は現れない。

3．3-サイクルはすべて面の周である。

補題6により、1.2.3. を満たすような頂点数13の平面グラフは存在しない。従って、そのような球面上のグラフも存在しない。ゆえに $n = 13$ は不可能。

単位球面に内接する正20面体（頂点数12）の辺を球の中心から投影して球面を三角形分割する。球面上の正三角形の面積は $\frac{4\pi}{20} \approx 0.6283$ で $\delta \approx 0.5513$ より大きい。ゆえに頂点間の距離は a より大きい。従って $n \geq 12$ である。∎

(*) の証明　$\mathcal{T}$ において、

1) 各辺の長さは a 以上。
2) 各三角形の外接 cap の半径 $< a$.
3) 各辺は両側を合わせた四辺形の固有対角線。
4) 各三角形に c より長い辺はたかだか1本。

$\mathcal{T}$ の三角形を切り離して得られる $2n-4$ 個の三角形の集合を $\mathcal{D}$ とする。$\mathcal{D}$ に b よりも長い辺を持つ三角形があれば、次の操作☆を、b より長い辺がなくなるまで繰り返す。

☆ 最も長い辺 x を共有する1対の三角形を $\mathcal{D}$ から取り出し、辺 x で合わせて四辺形を作る。この四辺形の4辺の長さを固定して変形し、固有対角線（辺 x とは限らない）の長さを b に変える。長さが b となった対角線で切って2つの三角形に分け、2つに赤い色を塗って $\mathcal{D}$ に戻す。

注1 最長辺 x を共有する三角形のどれも赤くないときは、3) により、辺 x で合わせた四辺形の固有対角線は x である。この場合、固有対角線は b より大きい。

注2 赤い三角形は長さ b の辺を持ち、c よりも長い辺を持たない。取り出した1対の三角形に赤いのがあれば、合わせた四辺形の固有対角線は、補題5 (3) により、b より長い。

- 操作☆で三角形の面積の総和は減少。
- 操作☆で長さが b 以上の辺の本数は不変。

b より大きい辺がなくなったら、b より小さい辺をすべて a に縮める。系5により、この操作でも三角形の面積の総和は減少する。最終的に三角形は3辺が

$$(a,a,a),\ (a,a,b),\ (a,b,b),\ (b,b,b)$$

の4種類になる。4種の三角形の面積は、それぞれ

$$\delta \approx 0.5513,\ \alpha \approx 0.667,\ \beta \approx 0.8923,\ \gamma \approx 1.1948.$$

$\mathcal{D}$ の三角形の面積の総和は 4π より小さいから

$$2n - 4 < 4\pi/\delta \approx 22.8.$$

ゆえに $n \leq 13$ である。$n = 13$ と仮定せよ。すると、三角形の個数は22. 面積が α, β, γ の三角形の個数を i, j, k とすると、

$$\begin{aligned}4\pi &> (22-i-j-k)\delta + i\alpha + j\beta + k\gamma \\ &= 22\delta + i(\alpha-\delta) + j(\beta-\delta) + k(\gamma-\delta) \\ &\approx 12.128 + 0.115i + 0.341j + 0.643k,\end{aligned}$$

$$\therefore\ 0.438 > 0.115i + 0.341j + 0.643k.$$

ゆえに、$k = 0$. (a,b,b) 型の三角形があれば、長さ b の辺を持つ三角形があと2つはあるから、右辺は左辺を超える。ゆえに、$j = 0$. i は偶数だから、$i = 0$ か、$i = 2$ である。ゆえに、$\mathcal{T}$ に長さが b 以上の辺は1本以下。∎