球面上のランダム幾何とその応用

メタデータ	言語: 出版者: 前原潤 公開日: 2009-03-19 キーワード (Ja): 漸近分布, 最小距離の分布, ランダム球帽系, 交グラフ, 片側球帽, 見かけの角 キーワード (En): asymptotic distribution, minimum distance, random caps, intersection graph, extremal cap, visual angle 作成者: 前原, 潤, Maehara, Hiroshi メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/9309

球面上のランダム幾何とその応用

13640126

平成 13 年度～平成 14 年度科学研究費補助金（基盤研究（C）(2)）

研究成果報告書

平成 15 年 3 月

研究代表者　前原　潤

球大学教育学部教授）

はしがき

球面上のランダム幾何というのは、球面上にランダムにとったいくつかの点で決定される図形や、いくつかのランダム大円、球帽などの配置に関する幾何学的量や性質を確率的に評価しようというものである。いわゆる geometric probability と呼ばれる分野の一領域で、多くの研究成果があり、幅広い応用がある。

今回の科研費の補助を受けた研究では、(1) 球面上のランダム点集合に関する最小距離の漸近分布、(2) ランダムな球帽の系で覆われる領域が連結になるための条件、(3) 空間内に与えられた角をランダムな視点から見るときの見掛けの角（これは東海大の前田陽一氏との共同研究)、等に関する結果を得た。

研究組織

研究代表者：前原　潤（琉球大学教育学部教授）

交付決定額（配分額）

(金額単位：千円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 13 年度	1100	0	1100
平成 14 年度	1000	0	1000
総計	2100	0	2100

研究発表

(1) 学会誌等

- H. Maehara and A. Oshiro, Piercing a set of disjoint balls by a line, Journal of Combinatorial Theory (A) 94(2001), 393–398.
- H. Maehara and N. Tokushige, When does a planar bipartite framework admit a continuous deformation?, Theoretical Computer Science 263(2001), 345–354.
- H. Maehara, On acute triangulation of quadrilaterals, Proc. JCDCG2000(LNCS 2698),2001, 237–243.
- H. Maehara, On the total edge-length of a tetrahedron, Amer. Math. Monthly 108 (2001), 967–969.
- H. Maehara and A. Oshiro, Cutting a bunch of grapes by a plane, European J. Comb. 22(2001), 847–853.
- K. Hosono, H. Maehara and K. Matsda, A pair in a croud of unit balls, European J. Combinatorics 22(2001), 1083–1092.
- H. Maehara, Isoperimetric theorem for spherical polygon and the problem of 13 spheres, Ryukyu Math. J. 14(2001), 41–57.
- H. Maehara, Acute triangulations of polygons, European J. Combin. 23(2002), 45–55.
- H. Maehara and A. Oshiro, Arranging solid balls to represent a graph, Graphs and Combinatorics 18(2002) 343-365.
- H. Maehara, On the length of the shortest edge of a graph on a sphere, European J. Combin. 23(2002) 713-717.
- H. Maehara, An inequality on the size of a set in a Cartesian product, European J. Combin. 23(2002) 1055-1059.

(2) 口頭発表

- 前原潤, On the total edge-length of a tetrahedron, 関西グラフ理論研究集会　8/1-8/3, 近畿大学（大阪）2001.
- 前原潤, A pair in a crowd of unit balls, Graph Theory and Discrete Geometry, 10/15-10/17, 2001, Ateneo de Manila University, Phillippines, 2001.
- 前原潤, Linear size acute triangulation of polygons, The Wonderland of Intuitive Geometry, 10/15-10/17, 熊本大学教育学部, 2001.

- 前原潤, A pair in a crowd of unit balls, TGT, 11/8-11/9, 横浜国大, 2001.
- 前原潤, An inequality on the size of a set in a Cartesian product, 12/18-12/20, 龍谷大, 2001.
- 前原潤, Arrangement of solid balls - knotted necklaces of pearls and representation of graphs – , ISM symposium, Tokyo 3/25-3/26, 2002.
- 前原潤, 球面上のランダム球帽系の交グラフ、関西グラフ理論研究集会、加計国際交流センター、岡山県倉敷市、8/1-8/3, 2002.
- 前原潤, 球面上のランダム幾何（連続講演６コマ）、熊本大学教育学部、8/7-8/9,2002.
- 前原潤, A condition for the union of spherical caps to be connected, DIMACS Workshop on Geometric Graph Theory, DIMACS Center , Rutgers University, Piscataway, New Jersey, 9/30-10/4,2002.
- 前原潤, Observing an angle from various viewpoints, TGT, 横浜国大、11/21-11/22, 2002.
- 前原潤, Looking at an angle from various viewpoints, JCTCG, Tokyo 東海大学（代々木）、12/6-12/9,2002.

研究成果

研究成果の概要

1．$(d+1)$ 次元ユークリッド空間内の d 次元球面を S^d で表わす。任意の単純グラフ G に対して、G の頂点を S^d 上にランダムに配置する。グラフ G において辺で結ばれているような頂点対に対応する球面 S^d 上の 2 点間の球面距離の最小値を D とする。G の辺数を N とするとき、「$N \to \infty$ のとき、ND^d の分布は平均 $dB(\frac{1}{2}, \frac{d}{2})$ の指数分布に収束する」という結果を得た。ここで、$B(p,q)$ はベータ関数である。この結果は、球面上のランダム独立な n 点の間の最小距離の漸近分布（$n \to \infty$）を求める問題をまったく一般的に解決したものである。例えば、G として頂点数 n の完全グラフをとれば、ランダム独立な n 点間の最小距離の漸近分布が得られる。面白いことに、ND^d の漸近分布はグラフ G の構造には依存しない。$G = K(1,N)$ としても、$G = K(m, N/m)$ としても、N が十分大きければ、ND^d の分布はほとんど変わらないのである。また、この結果を証明する過程で、直積集合の部分集合に含まれる元の個数に関して次のような興味深い上界を得た。Ω を n 個の集合の直積集合 $W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ の有限部分集合とする。添字集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の部分集合 A に対して直積集合 $\Pi_{i\in A} W_i$ への Ω の射影を Ω_A で表わすことにする。すると、$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ が $\{1,2,\ldots,n\}$ の二重被覆となるなら、$|\Omega|^2 \le |\Omega_{A_1}| \cdot |\Omega_{A_2}| \cdot \ldots \cdot |\Omega_{A_k}|$ が成立する。

2．単位球面 S^2 上の有限個の球帽系 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ に対して、これらの球帽の交グラフを $G(\mathcal{C})$ で表わす。$\mathcal{C}$ に属する球帽のサイズはまちまちでよい。球帽の系 $\mathcal{C}$ において、C_i と交わるすべての球帽の中心が、C_i の中心を通るある大円の一方の側にあるとき、C_i を片側球帽と呼ぼう。また、球帽 C_i は半球面より小さいとき proper であるという。このとき、$\mathcal{C}$ に片側球帽が存在しなければ $G(\mathcal{C})$ は連結となることがわかった。また、片側球帽が存在せず、さらに、すべての球帽が proper なら、$G(\mathcal{C})$ は 2 連結となる。（高次元の球面 $S^d\,(d \ge 3)$ 上で、これと類似の結果は成り立たない例も構成した。）これを利用して、ランダム球帽系の交グラフに関する次の漸近的な結果が得られる。こんどは $C_1, \ldots, C_N$ を単位球面 S^2 上の面積が $\frac{4\pi c}{N} \log N$ の（同じ大きさの）ランダムな球帽の系とする。$c > \frac{1}{2}$ ならば、$N \to \infty$ のとき $G(\mathcal{C})$ が 2 連結となる確率は 1 に収束し、$c < \frac{1}{4}$ ならば、$N \to \infty$ のとき $G(\mathcal{C})$ が連結となる確率は 0 に収束する。

3．3 次元空間内の三角形 ΔAOB の $\angle AOB$ の大きさを ω とする。点 P から $\angle AOB$ を眺めるとき、その見かけの大きさは、ΔAOB を直線 PO に垂直な平面に正射影して得られる三角形 $\Delta A'O'B'$ の角 $\angle A'O'B'$ の大きさに等しい。点 P が O を中心とする単位球面上のランダムな点のとき、$\angle A'O'B'$ の大きさを Θ_ω を $\angle AOB$ のランダムな見かけの角という。確率変数 Θ_ω は、明らかに $\angle AOB$ の大きさ ω だけに依存する。東海大の前田陽一氏との共同研究により Θ_ω の期待値と分散に関して、$E(\Theta_\omega) = \omega$、$V(\theta_{\pi-\omega}) = V(\Theta_\omega)$、および、$V(\Theta_\omega)$ が容易に数値計算できる 2 重積分の式を得た。

目次