球面上のランダム幾何とその応用

球面上のランダム幾何*

前原　潤（琉球大学）

球面上にランダムに配置した点や大円、球帽の系などで決まる幾何学的な量や性質に関して、面白そうな結果を、球面の対称性等を用いて直観的、初等的に導く。また、これらの結果の応用や、応用面から提起された問題を考える。内容は次のようになっている：

1. 球面上のランダムな点と大円
2. 幾何確率の問題
3. 極図形と双対性
4. Sylvester の問題と双対性の応用
5. Crofton の公式と Santaló の弦定理
6. 半球面上のランダム図形
7. 角の見かけの大きさ
8. ランダムな球帽の系
9. 漸近的確率
10. ランダム球帽系による被覆確率

1章から6章までは、主として古典的な結果を述べている。定理 1.4, 定理 4.3, 4.4 は、容易に導かれるものではあるが、どこにも出てない新しい結果だと思う。7章の内容は東海大の前田陽一氏と筆者の共同研究の結果であり、8〜10章の内容は最近の筆者の研究結果である。

---

*熊本大学教育学部で行った連続講義（2002年8月7〜9日）のノート

1　球面上のランダムな点と大円

単位球面 S 上で一様分布をする点 $\mathbf{x}$（の実現値）を S 上の**ランダム点**という。$\mathbf{x}$ が一様分布をするというのは、S 上の任意の領域 W に対して

$$\Pr(\mathbf{x} \in W) = \frac{W\text{の面積}}{4\pi}$$

を意味する。球面 S を、その中心を通る平面で切った切り口として得られる円を**大円**という。球面 S を地表、大円を赤道と見たとき、北極、南極にあたる点を大円の**極**という。したがって大円には極が２つある。S 上の点を１つ与えると、それを極とする大円が決まる。ランダム点を極とする大円を**ランダム大円**といい、$\mathbf{G}$ で表す。以下の２点に注意しよう：

- ランダム大円 $\mathbf{G}$ の極の１つをかってに選ぶと、ランダム点が得られる。

- ２つのランダム大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ を独立にとり、それらの交点の１つをかってに選んで得られる点はランダム点である。

S 上の２点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の間の球面距離を $\mathbf{xy}$ で表す。また、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が１本の直径の両端でない場合は、この２点を結ぶ大円弧（の短い方）も、同じ記号 $\mathbf{xy}$ で表す。$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を S 上の独立な２つのランダム点とするとき、２点間の球面距離 $\theta = \mathbf{xy}$ が t 以下となる確率はいくらか？２点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の間の球面距離を考えるとき、球面の対称性から、点 $\mathbf{x}$ は定点と考えてよい。明らかに、$\Pr(\theta \le t)$ はランダム点 $\mathbf{y}$ が点 $\mathbf{x}$ を中心とする球面半径 t の球帽 (cap) に入る確率に等しい。この球帽の面積は $2\pi(1-\cos t)$ であるから、$\Pr(\theta \le t) = (1-\cos t)/2$ である。したがって、任意の $0 < a < b < \pi$ に対して、

$$\Pr(a < \theta < b) = \int_a^b \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) d\theta = \int_a^b \frac{\sin\theta}{2} d\theta$$

となる。任意の $a, b\,(0 \le a < b \le \pi)$ に対して、$\Pr(a < \theta < b) = \displaystyle\int_a^b f(\theta)d\theta$ を満たすような関数 $f(\theta)$ を確率変数 θ の確率密度関数という。

定理 1.1 S 上の独立な２つのランダム点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の間の球面距離 $\theta = \mathbf{xy}$ の確率密度関数は

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{2}$$

である。□

これから、２点$\mathbf{x},\mathbf{y}$の球面距離の期待値$E(\mathbf{xy})$は

$$\begin{aligned} E(\mathbf{xy}) &= \int_0^\pi \theta f(\theta)d\theta \\ &= \int_0^\pi \theta\frac{\sin\theta}{2}d\theta = \int_0^\pi \theta\left(\frac{-\cos\theta}{2}\right)' d\theta \\ &= \left[\theta\left(\frac{-\cos\theta}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

S上の３点が１つの大円上に乗らないとき、これらの３点を３つの（πより短い）大円弧で結ぶと球面三角形が得られる。この三角形（の周）はSを２つの領域に分ける。そのうちの小さい方を球面三角形の内部という。

定理 1.2 S上の独立な３つのランダム点を頂点とする球面三角形の周の長さLの期待値は$3\pi/2$で、面積Aの期待値は$\pi/2$である。

証明：ランダムな３点を$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$とする。

$$E(L) = E(\mathbf{xy}+\mathbf{yz}+\mathbf{zx}) = E(\mathbf{xy})+E(\mathbf{yz})+E(\mathbf{zx}) = \frac{3\pi}{2}.$$

球面三角形の面積の公式から、$A = \angle\mathbf{x}+\angle\mathbf{y}+\angle\mathbf{z}-\pi$である。$E(\angle\mathbf{x}) = E(\angle\mathbf{yxz})$を考えるとき、$\mathbf{x},\mathbf{y}$は定点としてよい。すると$\angle\mathbf{yxz}$は閉区間$[0,\pi]$で一様分布をする。ゆえに$E(\angle\mathbf{x}) = \pi/2$. したがって、$E(A) = 3\pi/2-\pi = \pi/2$である。□

独立な２つのランダム大円$\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2$に対して、この２つの大円のなす小さい方の角を$\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2$の交角という。$\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2$の交角$\varphi\,(0\le\varphi\le\pi/2)$の分布を考えるとき、一方の大円$\mathbf{G}_1$は固定して考えてよい。$\mathbf{G}_1$を定点$\mathbf{p}$を極とする大円とし、この大円の$\mathbf{p}$を含む側の半球面を$H(\mathbf{p})$で表す。ランダム大円$\mathbf{G}_2$の極の$H(\mathbf{p})$に含まれる方の点を$\mathbf{x}_2$とすると、$\mathbf{x}_2$は$H(\mathbf{p})$上で一様分布をする。しかも、$\varphi = \mathbf{px}_2$となっている。これから、次の定理が導かれる。

定理 1.3 独立な２つのランダム大円の交角$\varphi\,(0\le\varphi\le\pi/2)$の確率密度関数は$g(\varphi) = \sin\varphi\ (0\le\varphi\le\pi/2)$である。□

例えば、独立な２つのランダム大円の交角φの期待値は、部分積分法を用いて、

$$\int_0^{\pi/2}\varphi\sin\varphi d\varphi = 1$$

となる。

定理 1.4 単位球面 S 上の独立な 4 つのランダム大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ は（確率 1 で）S を 8 つの三角形領域と 6 つの 4 角形領域に分ける。8 つの三角形領域の中から等確率で選んだ 1 つの三角形領域を Δ とし、その面積を A_Δ とすると、$E(A_\Delta) = 12/\pi - \pi$ である。また、6 つの 4 角形領域の中から等確率で選んだ 1 つの領域の面積 $A_\square$ の期待値は $E(A_\square) = 2\pi - 16/\pi$ である。

証明：定点 $\mathbf{p}$ を極とする半球面 $H(\mathbf{p})$ の境界が大円 $\mathbf{G}_1$ であると思ってよい。ランダム大円 $\mathbf{G}_2$ は $H(\mathbf{p})$ を 2 つの領域（‘月形’）に分ける。$\mathbf{G}_3$ と $\mathbf{G}_4$ はこの 2 つの月形の一方で交わる。$\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ の交点を含まないほうの月形の頂角を ψ とし、ψ の期待値を求めよう。2 つの月形の小さい方を M とすると、M の頂角が、$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ の交角 φ である。$\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ の交点の 1 つをかってに選んだものは S 上のランダム点であるから、$\psi = \varphi$ となる確率は $(\pi - \varphi)/\pi$ であり、$\psi = \pi - \varphi$ となる確率は φ/π である。$E(\psi)$ を求めるには、「M の頂角 $= \varphi$」という条件の下での ψ の条件付期待値を求め、さらに、φ を動かして期待値をとればよい。（“期待値は、条件付期待値の期待値に等しい”）したがって

$$
\begin{aligned}
E(\psi) &= \int_0^{\pi/2} \left(\varphi\frac{\pi - \varphi}{\pi} + (\pi - \varphi)\frac{\varphi}{\pi}\right) \sin\varphi d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2\varphi(\pi - \varphi)}{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

となる。図を描いてみれば明らかなように、Δ のどの内角の期待値も $E(\psi) = \pi/4$ に等しい。ゆえに、$E(A_\Delta) = 12/\pi - \pi$ である。

また、4 角形領域の 1 つの内角の期待値は $\pi - 4/\pi$ だから、

$$
E(A_\square) = 4(\pi - \frac{4}{\pi}) - 2\pi = 2\pi - \frac{16}{\pi}
$$

である。□

2 幾何確率の問題

次の定理は Wendel(1962) による。この Wendel のアイデアは、あとで球面上の Sylvester 型の問題を考えるときにも利用される。

定理 2.1 S 上の独立な n 個のランダム点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ が 1 つの半球面上に乗っている確率は

$$
\frac{n^2 - n + 2}{2^n}
$$

である。

（例） 3 個の点は必ず 1 つの半球面上に乗っている。上の式で $n=3$ とすると $\frac{9-3+2}{8}=1.$

補題 2.1 S 上の n 個の大円が一般の位置にある（どの 3 つも同一点で交わることがない）なら、S は n 個の大円で (n^2-n+2) 個の領域に分けられる。

証明：球面上の n 個の大円の描く図形を、大円の交点を頂点とするグラフとみなす。すると頂点数は $2\binom{n}{2}=n(n-1)$ で、各頂点の次数は 4 だから、辺数は $4n(n-1)/2=2n(n-1)$ となる。したがってオイラーの公式から 領域数 $=2-$ 頂点数 $+$ 辺数 $=n^2-n+2$ となる。□

定理の証明：n 個のランダム点を次のようにとることにする。まず、n 個のランダム大円 $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\ldots,\mathbf{G}_n$ を独立に取り、各ランダム大円の 2 つの極のなかから、1 点ずつかってに選んでいく。すると n 個の独立なランダム点 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ が得られる。点 $\mathbf{x}$ を極とする半球面（$\mathbf{x}$ を極とする大円の $\mathbf{x}$ を含む側）を $H(\mathbf{x})$ で表す。すると

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \text{が 1 つの半球面 } H(\mathbf{p}) \text{ 上に乗っている}\\
&\quad\Leftrightarrow \mathbf{p}\mathbf{x}_i \le \frac{\pi}{2}\ (i=1,2,\ldots,n)\\
&\quad\Leftrightarrow \mathbf{p}\in H(\mathbf{x}_i)\ (i=1,2,\ldots,n)\\
&\quad\Leftrightarrow \mathbf{p}\in H(\mathbf{x}_1)\cap H(\mathbf{x}_2)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n).
\end{aligned}
$$

つまり、$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ が 1 つの半球面上に乗っていることと

$$H(\mathbf{x}_1)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n)\neq\emptyset$$

は同値である。

n 個のランダム大円 $\mathbf{G}_1,\ldots,\mathbf{G}_n$ は確率 1 で一般の位置にあり（つまり、どの 3 つの大円も 1 点で交わることはなく）、これらの大円は球面を n^2-n+2 個の領域に分ける。しかも、$H(\mathbf{x}_1)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n)\neq\emptyset$ のとき $H(\mathbf{x}_1)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n)$ はこれらの領域の 1 つである。したがって、$H(\mathbf{x}_1)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n)\neq\emptyset$ となるような極 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ の選び方は、ちょうど n^2-n+2 通りある。n 個の大円から極を 1 つずつ選ぶ方法は 2^n 通りある。ゆえに、$\mathbf{G}_1,\ldots,\mathbf{G}_n$ を決めたとき、極を 1 つずつ選んで $H(\mathbf{x}_1)\cap\ldots\cap H(\mathbf{x}_n)\neq\emptyset$ となる確率は $(n^2-n+2)/2^n$ である。これは $\mathbf{G}_1,\ldots,\mathbf{G}_n$ をどう選ぼうと関係ない一定の値である。ゆえに n 個のランダム点が 1 つの半球面上にある確率は $(n^2-n+2)/2^n$ である。□

演習 2.1 円周上で一様分布する点を独立に n 個とるとき、これらがある半円周上に乗っている確率は $2n/2^n$ である。これを示せ。

3 極図形と双対性

S 上の空でない点集合（図形）X に対して

$$X^\circ = \bigcap_{\mathbf{p}\in X} H(\mathbf{p})$$

を X の**極図形**という。例えば、$\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\}^\circ = H(\mathbf{x})\cap H(\mathbf{y})\cap H(\mathbf{z})$ である。

演習 3.1 S 上の点 $\mathbf{p}$ を中心とする球面半径 ε $(0<\varepsilon<\pi/2)$ の球帽の極図形は $\mathbf{p}$ を中心とする球面半径 $\pi/2-\varepsilon$ の球帽であることを示せ。

演習 3.2 長さが π より短い大円弧 $\mathbf{pq}$ に対して、

$$(\mathbf{pq})^\circ = H(\mathbf{p})\cap H(\mathbf{q})$$

となることを確認せよ。

極図形をつくる操作については以下のことが成立する：

- $(\bigcup_\lambda X_\lambda)^\circ = \bigcap_\lambda X_\lambda^\circ$.
- $X\subset Y \Rightarrow X^\circ \supset Y^\circ$.
  証明：$Y = X\cup(Y-X)$ であるから、$Y^\circ = X^\circ\cap(Y-X)^\circ\subset X^\circ$.
- $X\subset X^{\circ\circ} := (X^\circ)^\circ$.
  証明：
  $$\begin{aligned}\mathbf{p}\in X &\Rightarrow X^\circ\subset H(\mathbf{p})\\ &\Rightarrow \forall\mathbf{q}\in X^\circ \text{について} \quad \mathbf{pq}\le\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow \mathbf{p}\in\bigcap_{\mathbf{q}\in X^\circ} H(\mathbf{q}) = X^{\circ\circ}.\end{aligned}$$
- $X^\circ = X^{\circ\circ\circ}$.
  証明：$X^\circ\subset(X^\circ)^{\circ\circ}$、また、$X\subset X^{\circ\circ}$ より $X^\circ\supset X^{\circ\circ\circ}$.

いくつかの半球面の共通部分の面積が 0 でないとき、その共通部分を球面上の**凸多角形**という。凸多角形の境界が n 個の大円弧からなるとき、**凸 n 角形**という。凸 2 角形（$n=2$ の場合）は**月形**とも呼ぶ。凸 3 角形は球面三角形に他ならない。$n\ge 3$ のとき、凸 n 角形は必ず球面半径が $\pi/2$ より小さい球帽に含まれる。

定理 3.1 $n \geq 3$のとき、球面上の凸n角形$K = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_n$について次の3つが成立する。

(1) $K^{\circ\circ} = K$

(2) $K^\circ = H(\mathbf{v}_1) \cap H(\mathbf{v}_2) \cap \ldots \cap H(\mathbf{v}_n)$

(3) K°は凸n角形である。

証明:(1) Kはいくつかの半球面の共通部分であるから、それらの半球面の極の集合をXとすると、$K = X^\circ$である。ゆえに、$K^{\circ\circ} = X^{\circ\circ\circ} = X^\circ = K$.

(2) Kの境界を∂Kで表す。$K = \bigcup_{\mathbf{p}\in\partial K} (\mathbf{v}_1\mathbf{p})$であるから、

$$K^\circ = \bigcap_{\mathbf{p}\in\partial K} (\mathbf{v}_1\mathbf{p})^\circ = \bigcap_{\mathbf{p}\in\partial K} (H(\mathbf{v}_1) \cap H(\mathbf{p})) = \bigcap_{\mathbf{p}\in\partial K} H(\mathbf{p}) = (\partial K)^\circ.$$

また、$\partial K = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) \cup (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3) \cup \ldots \cup (\mathbf{v}_n\mathbf{v}_1)$であるから、

$$K^\circ = (\partial K)^\circ = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^\circ \cap \ldots \cap (\mathbf{v}_n\mathbf{v}_1)^\circ = H(\mathbf{v}_1) \cap \ldots \cup H(\mathbf{v}_n)$$

である。

(3) $n \geq 3$だから、Kは球面半径が$\pi/2 - \varepsilon$（εは小さい正数）のある球帽に含まれる。よってK°は球面半径がεの球帽を含む。したがってK°の面積は0でなく、K°は凸多角形である。K°の辺数をmとすると、K°はn個の半球面の共通部分であるから、$m \leq n$である。同様な議論により、$(K^\circ)^\circ = K$の辺数はm以下である。したがって、$n = m$である。□

$n \geq 3$とし、Kを凸n角形とする。Kの任意の頂点$\mathbf{v}$に対して、$H(\mathbf{v})$の境界$\partial H(\mathbf{v})$に含まれるK°の辺がただ1つ決まる。この辺をKの頂点$\mathbf{v}$の**双対辺**と呼ぶ。また、Kの任意の辺$\mathbf{uv}$に対して、$\partial H(\mathbf{x})$が大円弧$\mathbf{uv}$を含むような、K°の頂点$\mathbf{x}$がただ1つ存在する。この（K°の）頂点$\mathbf{x}$を、Kの辺$\mathbf{uv}$の**双対点**という。この場合、K°の頂点$\mathbf{x}$の双対辺（$K^{\circ\circ} = K$の辺）が$\mathbf{uv}$である。Kの頂点$\mathbf{v}$の双対辺を$\mathbf{xy}$とすると、$\mathbf{xv} = \pi/2$だから、$\mathbf{v}$は$\partial H(\mathbf{x})$上にある。従って、$K^{\circ\circ}$の頂点$\mathbf{v}$は凸n角形K°の頂点$\mathbf{x}$の双対辺の端点である。つまり、$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$が$K$の周上の連続する3頂点なら、辺$\mathbf{uv}$の双対点と$\mathbf{vw}$の双対点は$\mathbf{v}$の双対辺の両端点である。$K$の頂点、辺と$K^\circ$の辺、頂点の間のこのような関係を$K$と$K^\circ$の間の**双対性 (duality)** という。

定理 3.2 Kを凸n角形（$n \geq 3$）とする。Kの任意の頂点$\mathbf{v}$に対して

$$\angle\mathbf{v} + (\mathbf{v}\text{の双対辺の長さ}) = \pi$$

が成立する。

証明 : $\mathbf{v}$ の双対辺を $\mathbf{xy}$ とする。$\mathbf{x}$ の双対辺を $\mathbf{vw}$、$\mathbf{y}$ の双対辺を $\mathbf{uv}$ とすると、$\angle\mathbf{v} = \angle\mathbf{uvw}$ である。また、辺 $\mathbf{uv}$ は $\partial H(\mathbf{y})$ 上にあるから、$\angle\mathbf{uvy} = \pi/2$ である。同じ理由で、$\angle\mathbf{xvw} = \pi/2$ である。したがって、$\angle\mathbf{uvy}+\mathbf{xvw} = \pi$ となる。一方、(図を描いて見ればすぐわかるように)

$$\angle\mathbf{uvw} + \angle\mathbf{xvy} = \angle\mathbf{uvy} + \angle\mathbf{xvw}$$

であるから、$\angle\mathbf{v} + \angle\mathbf{xvy} = \pi$ となる。また、$\mathbf{xy}$ は $\partial H(\mathbf{v})$ 上にあるから、$\angle\mathbf{xvy} = \mathbf{xy}$ である。ゆえに $\angle\mathbf{v} + \mathbf{xy} = \pi$ となる。□

系 3.1 $n \geq 3$ とし、K を凸 n 角形、K の面積を $A(K)$、K° の周の長さを $L(K^\circ)$ とすると

$$A(K) + L(K^\circ) = 2\pi$$

となる。

証明 : $K = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_n$ とする。K は、対角線を引くことによって $n-2$ 個の球面三角形に分けられる。各球面三角形の面積は 3 つの内角の和から π を引いたものであるから、$A(K) = \sum_i \angle\mathbf{v}_i - (n-2)\pi$ となる。したがって、定理 3.2 を用いて

$$n\pi = \sum_{i=1}^{n}(\angle\mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i\text{の極対辺の長さ})) = A(K) + (n-2)\pi + L(K^\circ)$$

が得られる。ゆえに $A(K) + L(K^\circ) = 2\pi$ である。□

注意　定理 3.2 の頂点での内角と双対辺の長さの関係、系 3.1 の多角形の面積とその極多角形の周の長さの関係も、図形とその極図形の間の**双対性**という。

4　Sylvester の問題と双対性の応用

平面上で、ある分布に従う点を独立に 4 個とるとき、「これら 4 点が凸四辺形の頂点となる確率 P を求めよと」いうのが **Sylvester の問題**である。これについては、次のような結果が知られている。

- 円の内部で一様分布する場合 $P = 1 - 35/(12\pi^2)$.
- 長方形の内部で一様分布する場合 $P = 25/36$.
- 三角形の内部で一様分布する場合 $P = 2/3$.

- 2次元正規分布の場合 $P = (6 \sin^{-1} \frac{1}{3})/\pi$.

ここでは、球面上での Sylvester の問題を考えよう。

S 上の点集合 X に対して、X を含むような半球面すべての共通部分を X の**凸包**という。(X が半球面に含まれない場合は、X の凸包は S 全体とする。) 例えば、3点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が1つの大円上に乗ってなければ、$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ の凸包は球面三角形である。球面距離が π より小さい2点 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の集合の凸包は (π より短い) 大円弧 $\mathbf{pq}$ である。

$$X \subset H(\mathbf{p}) \Leftrightarrow \{\mathbf{p}\} \subset X^\circ \Leftrightarrow \mathbf{p} \in X^\circ$$

であるから、X の凸包 $= \bigcap_{\mathbf{p} \in X^\circ} H(\mathbf{p}) = X^{\circ\circ}$ である。

定理 4.1 独立な4つのランダム点の凸包が凸4角形となる確率は 3/8、三角形となる確率は 1/2 である。また、独立な5個のランダム点の凸包が5角形、4角形、三角形となる確率は、それぞれ、1/16, 5/16, 5/16 である。

証明 : 独立な4つのランダム点の集合 $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ の凸包を K とする。

$$\begin{aligned} K \text{は凸4角形} &\Leftrightarrow X^{\circ\circ} \text{は凸4角形} \\ &\Leftrightarrow X^\circ = H(\mathbf{x}_1) \cap H(\mathbf{x}_2) \cap H(\mathbf{x}_3) \cap H(\mathbf{x}_4) \text{は凸4角形} \end{aligned}$$

である。4つのランダム点をとるのに、4つのランダム大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ をとり、各大円から1つずつ極をかってに選んでいく。すると、極の選び方は $2^4 = 16$ 通りである。一方、4つの大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ で球面を分けると、図を描いて調べてみればすぐわかるように、いつでも三角形の領域が8個、4角形の領域が6個できる。したがって、$H(\mathbf{x}_1) \cap H(\mathbf{x}_2) \cap H(\mathbf{x}_3) \cap H(\mathbf{x}_4)$ が凸4角形になるような極の選び方は6通りある。ゆえに、K が凸4角形のとなる確率は $6/16 = 3/8$ である。また、K が三角形となる確率は $8/16 = 1/2$ である。

同様に、一般の位置にある5つの大円で球面を分けると、5角形が2個、4角形が10個、三角形が10個できる。これから、定理の後半の部分が得られる。□

注意 この定理を6個以上のランダム点の場合に拡張するのは容易ではない。$n \geq 6$ の場合、一般の位置にある n 個の大円で球面を分けるとき、n 角形の領域の個数が常に一定ではないのである。

問題 1 6個のランダム点の場合、上の定理はどうなるか？

演習 4.1 独立な4つのランダム点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ に対して、2つの大円弧 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ と $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ が交差する確率は $1/8$ であることを示せ。

定理 4.2 S 上の独立な n 個（$n \geq 3$）のランダム点の凸包を K とする。K が凸多角形となるときの、K の周の長さ L、面積 A の期待値は

$$E(L) = \frac{2\pi(n^2-n)}{n^2-n+2},\ E(A) = \frac{2\pi(n^2-3n+2)}{n^2-n+2}$$

である。

証明：球面は n 個の大円で n^2-n+2 個の球面多角形に分割される。K が凸多角形のとき、K° はこれら n^2-n+2 個の多角形の1つである。すると、K° の面積の期待値は

$$\frac{4\pi}{n^2-n+2}$$

となるから、双対性により、K が凸多角形のとき、$K = K^{\circ\circ}$ の周長の期待値 $E(L)$ は

$$E(L) = 2\pi - \frac{4\pi}{n^2-n+2} = \frac{2\pi(n^2-n)}{n^2-n+2}$$

となる。各大円は、他の $n-1$ 個の大円で $2(n-1)$ 個の大円弧に分けられる。したがって、大円弧の長さの期待値は $\pi/(n-1)$ である。大円弧の総数は $2n(n-1)$ であるから、K° の辺数の平均は

$$\frac{\text{各領域の辺数の合計}}{n^2-n+2} = \frac{2\times 2n(n-1)}{n^2-n+2}$$

である。したがって、K° の周長の期待値は

$$\frac{\pi}{n-1}\frac{4n(n-1)}{n^2-n+2} = \frac{4n\pi}{n^2-n+2}$$

である。ゆえに、双対性により、$K^{\circ\circ} = K$ の面積 A の期待値は

$$E(A) = 2\pi - \frac{4n\pi}{n^2-n+2} = \frac{2\pi(n^2-3n+2)}{n^2-n+2}$$

となる。□

定理 4.3 S 上の独立な4つのランダム点の凸包を K とする。K が球面三角形となるとき、その面積の期待値は π である。K が凸4辺形となるとき、その面積の期待値は $2\pi/3$ である。

証明：独立に4つのランダム大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ をとり、それぞれの大円の極をかってに1つずつ選び、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ とする。これらは独立な4個のランダム点となる。これら4点の凸包 K が球面三角形となるとき $K^\circ = H(\mathbf{x}_1) \cap \ldots \cap H(\mathbf{x}_4)$ は球面三角形であるから、K° は S を4つの大円 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ で分けて得られる8個の三角形の1つである。この三角形の周長の期待値はいくらか？球面上にランダム大円を4つ描くと、各大円は6個の大円弧に分割され、24個の大円弧は、どれも三角形と4角形の共通辺であり、しかも周囲の状況はまったく同じで、区別できない。したがって、対称性により、各大円弧の長さの期待値はすべて同じで、$\pi/3$ に等しい。ゆえに、三角形 K° の周長の期待値は π である。すると、双対性により、K が三角形となるときの面積の期待値は π である。

K が凸4角形となる場合の面積の期待値も、同様にして、$2\pi - 4\pi/3 = 2\pi/3$ となることがわかる。□

注意　S 上のランダムな5点の場合は、この定理と同じようにはいかない。S を5つのランダム大円で分けるとき、大円弧が40個できるが、これらは3種類の異なるタイプに分けられ、各タイプの大円弧の長さの期待値を求めるのが難しいのである。

問題 2　5個のランダム点について、上の定理に相当する定理を見つけよ。

定理1.4と双対性を用いて次の定理が得られる。

定理 4.4 S 上の独立な4つのランダム点の凸包を K とする。K が球面三角形のとき、その周長の期待値は $3\pi - 12/\pi$ である。K が凸4角形となるとき、その周長の期待値は $16/\pi$ である。□

演習 4.2 この定理を証明せよ。

定理 4.5 S 上の独立な3つのランダム点が作る三角形の面積を A とすると、

$$E(A^2) = \frac{\pi^2}{2}$$

である。

この定理を証明するのに、次の**全確率の公式**を用いる。確率変数 T の確率密度関数を $f(t)$ とすると、

$$\Pr(\cdots) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(\cdots \mid T = t) f(t)dt$$

である。ここで、$\Pr(\cdots \mid T = t)$ は $T = t$ という条件の下での $\cdots$ の条件付確率を表す。

定理の証明：5 個のランダム点 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_5$ の凸包 K が三角形となる確率は 5/16 であった。一方、

$$K \text{ が三角形} \Leftrightarrow 2 \text{ 点が他の } 3 \text{ 点のなす三角形の中に入る}$$

が成立する。$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ のなかの、$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 以外の 3 つの点のなす三角形を Δ_{ij}、その面積を A, A の密度関数を $f(a)$ とすると

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \Delta_{ij}) \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \Pr(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \Delta_{ij} \mid A = a) f(a)da \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^2 f(a)da \\
&\quad = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} a^2 f(a)da = \frac{E(A^2)}{(4\pi)^2}
\end{aligned}$$

となる。一方、$\binom{5}{2} \Pr(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \Delta_{ij}) = 5/16$ であるから

$$\binom{5}{2} \frac{E(A^2)}{(4\pi)^2} = \frac{5}{16}$$

ゆえに $E(A^2) = \pi^2/2$ である。□

5　Crofton の公式と Santaló の弦定理

補題 5.1 pq を長さが $\theta(< \pi)$ の大円弧、**G** をランダム大円とするとき

$$\Pr(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) = \frac{\theta}{\pi}$$

である。

証明：はじめに、頂角が θ の月形の面積は 2θ であることに注意しよう。ランダム大円 $\mathbf{G}$ を、S 上のランダム点 $\mathbf{x}$ を極とする大円として考える。$\mathbf{p}$ の**対心点**（$\mathbf{p}$ を一端とする直径の他の端点）を $\mathbf{p}^*$ で表す。すると、点 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を赤道上の点として、北極の方から見た図を描いてみれば明らかなように

$$\mathbf{pq} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{x} \in (H(\mathbf{p}) \cap H(\mathbf{q}^*)) \cup (H(\mathbf{q}) \cap H(\mathbf{p}^*))$$

となる。月形 $H(\mathbf{p}) \cap H(\mathbf{q}^*)$ および $H(\mathbf{p}) \cap H(\mathbf{q}^*)$ の面積は、いずれも 2θ であるから、

$$\Pr(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) = \frac{2\theta + 2\theta}{4\pi} = \frac{\theta}{\pi}$$

である。□

S 上の曲線 Γ とランダム大円 $\mathbf{G}$ の交点の個数を $\nu(\Gamma \cap \mathbf{G})$ で表す。すると $\nu(\Gamma \cap \mathbf{G})$ は確率変数である。Γ が長さ θ の大円弧 $\mathbf{pq}$ なら $\nu(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G})$ の確率分布は、補題 5.1 により

$\nu(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G})$	0	1	∞
確率	$1 - \theta/\pi$	θ/π	0

で与えられる。したがって、$E(\nu(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G})) = \Pr(\mathbf{pq} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) = \theta/\pi$ である。

定理 5.1 S 上の長さ L の曲線 Γ に対して、

$$E(\nu(\Gamma \cap \mathbf{G})) = \frac{L}{\pi}$$

である。

証明：曲線 Γ を、大円弧をつないで得られる折れ線 $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_{n+1}$ で近似する。$\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ の長さを θ_i とすると、

$$\begin{aligned} E(\nu(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_{n+1} \cap \mathbf{G})) &= E(\nu(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{G})) + \ldots + E(\nu(\mathbf{p}_n\mathbf{p}_{n+1} \cap \mathbf{G})) \\ &= \frac{\theta_1 + \ldots + \theta_n}{\pi} \end{aligned}$$

となる。n を大きくして $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ の間隔をどんどん細かくしていくと折れ線 $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_{n+1}$ は Γ に近づき、$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n \to L$ となるから、$E(\nu(\Gamma \cap \mathbf{G})) = L/\pi$ である。□

半球面に含まれる図形で、その凸包がそれ自身に一致するものを S 上の**凸図形**という。面積が 0 でない凸図形は、**凸領域**と呼ばれる。例えば、月形や球面三角形は凸領域である。

定理 5.2 S 上の凸領域 K の周の長さが L のとき、

$$\Pr(K \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) = \frac{L}{2\pi}$$

である。□

注意 定理 5.1,5.2 の結果はいずれも **Crofton の公式**と呼ばれている。

演習 5.1 ランダム大円 $\mathbf{G}$ が K の境界に接する確率は 0 であり、$\mathbf{G}$ が K を '切る' なら $\mathbf{G}$ と K の境界 ∂K はちょうど 2 点で交わる。これを用いて定理 5.2 を証明せよ。

定理 5.3 (Santaló) K を S 上の凸領域とし、その面積を A とする。大円弧 $K \cap \mathbf{G}$ の長さを φ で表す。($K \cap \mathbf{G} = \emptyset$ なら $\varphi = 0$ とする。) このとき

$$E(\varphi) = \frac{A}{2}$$

である。

証明 : $\mathbf{G}, \mathbf{G}'$ を独立な 2 つのランダム大円とする。$\mathbf{G} \cap \mathbf{G}' = \{\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\}$ とすると、$\mathbf{x}, \mathbf{x}^*$ はいずれもランダム点である。(ただし独立ではない。)

$$K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{x} \in K \text{ or } \mathbf{x}^* \in K$$

であり、事象 $\mathbf{x} \in K$ と事象 $\mathbf{x}^* \in K$ が同時に起こる確率は 0 だから、

$$\Pr(K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset) = \Pr(\mathbf{x} \in K) + \Pr(\mathbf{x}^* \in K) = \frac{2A}{4\pi} = \frac{A}{2\pi}$$

である。一方、確率変数 φ の密度関数を $f(\varphi)$ とすると、全確率の公式を用いて、

$$\begin{aligned} &\Pr(K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset) \\ &\quad = \int_0^\pi \Pr(K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset \mid K \cap \mathbf{G} \text{ の長さ} = \varphi) f(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

また、Crofton の公式から

$$\Pr(K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset \mid K \cap \mathbf{G} \text{ の長さ} = \varphi) = \varphi/\pi$$

である。よって

$$\Pr(K \cap \mathbf{G} \cap \mathbf{G}' \neq \emptyset) = \int_0^\pi \frac{\varphi}{\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{E(\varphi)}{\pi},$$

したがって、$E(\varphi) = A/2$ である。□

6 半球面上のランダム図形

H を固定した半球面とする。H 上のランダム点とは、任意の $W \subset H$ に対して、

$$\Pr(\mathbf{x} \in W) = \frac{W\text{の面積}}{2\pi}$$

を満たす点 $\mathbf{x}$ のことである。半球面上のランダム図形の取り扱いは、対称性が欠如しているため、球面の場合より一般に難しい。ここでは、Crofton の公式を利用して、半球面 H 上の独立な２つのランダム点の間の球面距離の平均、ランダム三角形の周の長さの２乗の平均を求める

定理 6.1 半球面 H 上の独立な２つのランダム点の間の球面距離の平均は $4/\pi$ である。

証明：H 上の独立な２つのランダム点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して、$\mathbf{xy}$ の長さ η の密度関数を $f_H(\eta)$ とする。

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) \\
&\quad = \int_0^\pi \Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset \mid \mathbf{xy} = \eta) f_H(\eta) d\eta \\
&\quad = \int_0^\pi \frac{\eta}{\pi} f_H(\eta) d\theta = \frac{E(\eta)}{\pi}
\end{aligned}$$

であるから、$\Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset)$ を求めればよい。半球面 H の極を $\mathbf{p}$、$\mathbf{G}$ をランダム点 $\mathbf{z}$ で決まるランダム大円とすると、

$$\Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) = \int_0^\pi \Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset \mid \mathbf{pz}\text{の長さ} = \theta) \frac{\sin\theta}{2} d\theta$$

である。$\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} = \emptyset$ となるのは、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が両方とも月形 $H \cap H(\mathbf{z})$ に入るか、または月形 $H \cap H(\mathbf{z}^*)$ に入る場合である。ここで $\mathbf{z}^*$ は $\mathbf{z}$ の対心点を表す。$\mathbf{pz}$ の長さを θ とすると、月形 $H \cap H(\mathbf{z})$ の頂角は θ、月形 $H \cap H(\mathbf{z}^*)$ の頂角は $\pi - \theta$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset \mid \mathbf{pz} = \theta) \\
&\quad = 1 - \left(\frac{2\theta}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{2(\pi - \theta)}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi^2 - \theta^2 - (\pi - \theta)^2}{\pi^2} \\
&\quad = \frac{2\theta(\pi - \theta)}{\pi^2}
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$
\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{xy} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) \\
&= \int_0^\pi \frac{2\theta(\pi-\theta)}{\pi^2}\frac{\sin\theta}{2}d\theta = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (2\pi\theta - 2\theta^2)\left(\frac{-\cos\theta}{2}\right)' d\theta \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left[(2\pi\theta - 2\theta^2)\frac{-\cos\theta}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (2\pi - 4\theta)\frac{-\cos\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{-1}{\pi^2}\int_0^\pi (2\pi - 4\theta)\left(\frac{-\sin\theta}{2}\right)' d\theta \\
&= \frac{-1}{\pi^2}\left[(2\pi - 4\theta)\frac{-\sin\theta}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (-4)\frac{-\sin\theta}{2}d\theta = \frac{4}{\pi^2},
\end{aligned}
$$

ゆえに $E(\eta) = 4/\pi$ である。□

系 6.1 半球面 H 上の独立な３つのランダム点の作る球面三角形の周の長さの平均は $12/\pi$ である。□

双対性を用いて次の系が得られる。

系 6.2 半球面上の独立な３つのランダム点を極とする３つの大円の作る半球面上の三角形の面積の期待値は $2\pi - 12/\pi$ である。□

注意 半球面上の独立な３つのランダム点を極とする大円を $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ とすると、半球面上の１つのランダム点は半球面上で一様分布をするから、各 $\mathbf{G}_i$ は球面 S 上のランダム大円である。球面の対称性から、半球面の境界である大円 $\mathbf{G}_0$ も、S 上のランダム大円と考えてよい。この場合、４つのランダム大円 $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ は、球面 S 上のランダム大円としては、独立ではない。これは次のようにしてわかる。４つの大円 $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ は、球面 S を８つの三角形領域と６つの４角形領域に分ける。もし、４つのランダム大円 $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ が独立なら、　各三角形領域の面積の期待値は同じになるはずだから、上の系により、いずれも $2\pi - 12/\pi$ となる。すると、８個の三角形領域の面積の和の期待値が

$$8 \times (2\pi - \frac{12}{\pi}) \approx 19.7077$$

となり、S の面積 $4\pi \approx 12.5664$ より大きくなってしまい、矛盾が生ずる。(実際は、S 上の４つの独立なランダム大円で作られる８個の三角形領域の各面積の期待値は、定理 1.4 により、$12/\pi - \pi \approx 0.678126$ であった。)

定理 6.2 S 上の独立な３つのランダム点の作る球面三角形の周の長さを L とすると、

$$E(L^2) = 3\pi^2 - 6$$

である。

証明：S 上の独立な３つのランダム点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の作る球面三角形を Δ、その周の長さを L とする。L の密度関数を $f(\ell)$ とし、３点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が半球面 H に含まれるとしたときの L の密度関数を $f_H(\ell)$ で表す。以下、確率

$$\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H \text{ かつ } \ell < L < \ell + d\ell)$$

を２通りに計算する。まず、

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H \text{ かつ } \ell < L < \ell + d\ell) \\
&\quad = \Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H) \Pr(\ell < L < \ell + d\ell \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H) \\
&\quad = \Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H) f_H(\ell) d\ell = \frac{1}{8} f_H(\ell) d\ell
\end{aligned}$$

また、$\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H \mid \ell < L < \ell + d\ell) = \frac{1}{2} \Pr(\Delta \cap \partial H = \emptyset \mid \ell < L < \ell + d\ell)$ だから、

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H \text{ かつ } \ell < L < \ell + d\ell) \\
&\quad = \frac{1}{2} f(\ell) d\ell \Pr(\Delta \cap \partial H = \emptyset \mid \ell < L < \ell + d\ell).
\end{aligned}$$

球面の対称性により、∂H はランダム大円と思ってよいから、Crofton の公式より

$$\Pr(\Delta \cap \partial H = \emptyset \mid \ell < L < \ell + d\ell) = 1 - \frac{\ell}{2\pi}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H \text{ かつ } \ell < L < \ell + d\ell) \\
&\quad = \frac{1}{2} f(\ell) d\ell \left(1 - \frac{\ell}{2\pi}\right) = \frac{1}{2} f(\ell) d\ell - \frac{\ell}{4\pi} f(\ell) d\ell.
\end{aligned}$$

ゆえに $f_H(\ell) = 4f(\ell) - \frac{2}{\pi} \ell f(\ell)$ となる。この等式の両辺に ℓ を掛けて積分し、系 6.1 を用いると、

$$\frac{12}{\pi} = 4E(L) - \frac{2}{\pi} E(L^2)$$

が得られる。定理 1.2 により $4E(L) = 6\pi$ であるから、これから $E(L^2) = 3\pi^2 - 6$ となる。□

7　角の見かけの大きさ

空間内に与えられた１つの角を、かってな方向から眺めるとき、見かけの大きさは、平均的には与えられた角自身の大きさに等しい。このことを、Santaló の弦定理を用いて証明しよう。

$\mathbf{o},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{p}$ を３次元空間内の異なる４点とし、視点 $\mathbf{p}$ から角 $\angle\mathbf{xoy}$ を見るときの見かけの角について考えよう。この、見かけの角は次のように定義される：$\mathbf{p}$ を中心とする単位球面と、３つの半直線 $\overrightarrow{\mathbf{po}},\overrightarrow{\mathbf{px}},\overrightarrow{\mathbf{py}}$ の交点を、それぞれ $\mathbf{o}',\mathbf{x}',\mathbf{y}'$ とするとき、球面三角形 $\mathbf{o}'\mathbf{x}'\mathbf{y}'$ の頂点 $\mathbf{o}'$ における内角を、$\angle\mathbf{xoy}$ の**視点 $\mathbf{p}$ からの見かけの角**、あるいは、**視点 $\mathbf{p}$ からの投影角**といい、記号

$$\angle_{\mathbf{p}}\mathbf{xoy}$$

で表す。これは、$\angle\mathbf{xoy}$ を、点 $\mathbf{p}$ から、直線 $\mathbf{po}$ に垂直な平面に投影して得られる角、と同じである。このことから次の補題は明らかであろう。

補題 7.1 空間内の４点 $\mathbf{o},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{p}$ に対して、点 $\mathbf{o}$ を中心とする単位球面 S と、３つの半直線 $\overrightarrow{\mathbf{op}},\overrightarrow{\mathbf{ox}},\overrightarrow{\mathbf{oy}}$ の交点を、それぞれ $\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$ とすると、

$$\angle_{\mathbf{p}}\mathbf{xoy} = \text{球面三角形}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}\text{の頂点}\hat{\mathbf{p}}\text{での内角}$$

となっている。□

角 $\angle\mathbf{xoy}$ に対して、点 $\mathbf{p}$ を、$\mathbf{o}$ を中心とする単位球面上のランダム点とすると、$\angle_{\mathbf{p}}\mathbf{xoy}$ は確率変数となる。これを $\angle\mathbf{xoy}$ の**ランダム投影角**という。$\angle\mathbf{xoy}=\omega$ のとき、この角のランダム投影角 $\angle_{\mathbf{p}}\mathbf{xoy}$ の大きさを Θ_ω で表す。

定理 7.1 $E(\Theta_\omega)=\omega.$

この定理は、１つの角をいろいろな方向から眺めるとき、見かけの大きさは平均的にはもとの角の大きさに一致することを意味している。

証明：$\angle\mathbf{xoy}=\omega$ とし、$\mathbf{o}$ を中心とする単位球面を S とする。$\mathbf{x},\mathbf{y}$ はこの球面上の２定点と考えてよい。すると $\mathbf{xy}=\angle\mathbf{xoy}=\omega$ である。$\mathbf{p}$ を S 上のランダム点とすると、Θ_ω は球面三角形 $\mathbf{pxy}$ の頂点 $\mathbf{p}$ での内角に等しい。この球面三角形 $\mathbf{pxy}$ の極図形は、月形 $M=H(\mathbf{x})\cap H(\mathbf{y})$ と半球面 $H(\mathbf{p})$ の共通部分である。したがって、球面三角形 $\mathbf{pxy}$ の頂点 $\mathbf{p}$ の双対辺は $M\cap\partial H(\mathbf{p})$ である。ここで、$\partial H(\mathbf{p})$ はランダム大円であるから、$\mathbf{p}$

の双対辺の長さはもちろん確率変数である。月形 M の頂角は $\pi-\omega$ であるから、その面積は $2(\pi-\omega)$ である。したがって、大円弧 $M\cap\partial H(\mathbf{p})$ の長さの期待値は、Santaló の定理により、$\pi-\omega$ となる。一方、双対性により、$\mathbf{p}$ の双対辺 $M\cap\partial H(\mathbf{p})$ の長さは $\pi-\Theta_\omega$ である。ゆえに、

$$E(\pi-\Theta_\omega)=\pi-\omega,$$

したがって、$E(\Theta_\omega)=\omega$ となる。□

球面余弦定理、球面正弦定理を用いると、Θ_ω の分散について、次の定理が得られる。証明は省略する。

定理 7.2 Θ_ω の分散を $V(\Theta_\omega)$ で表すと、$V(\Theta_\omega)=V(\Theta_{\pi-\omega})$ であり、

$$V(\Theta_\omega)=\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{\cot\omega\sin y+\cos x\cos y}{\sin x}\right)\right)^2\frac{\sin y}{2\pi}dxdy-\omega^2.$$

□

この $V(\Theta_\omega)$ を求める式は複雑だが、コンピュータを用いると、これから容易に分散の数値計算ができる。次の表はそうして求めたものである。

ω	$\pi/12$	$2\pi/12$	$3\pi/12$	$4\pi/12$	$5\pi/12$	$6\pi/12$
$V(\Theta_\omega)$	0.0699	0.1874	0.3042	0.3988	0.4595	0.8404

問題 3 定理 7.1,7.2 の具体的な応用例を見つけよ。

8 ランダムな球帽の系

球面 S 上に、球面半径 θ の球帽を N 個ランダムに置くとき、これらの覆う領域が連結となる確率はいくらだろうか？球帽の和集合が連結であるかどうかは、局所的な観察だけでは決定できないので、この確率を一般に決定するのは難しい。ここでは連結となる確率の 1 つの下界を与えよう。そのための鍵となるアイデアは片側球帽である。

S 上の同じ大きさの球帽の系 $C_1,C_2,\ldots,C_N$ において、球帽 C_i は次の条件を満たすとき、**片側球帽**という：

> C_i に交わる球帽の中心はすべて C_i の中心を通る
> ある大円の一方の側にある。

補題 8.1 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ を S 上の同じ大きさの球帽の系とする。これらの球帽が覆う領域 $W = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_N$ が非連結なら、必ず球帽のどれかは片側球帽である。

証明：W が非連結であるとせよ。つまり、W には少なくとも2つの連結成分 W_1, W_2 があるとせよ。すると、球面 S 上の単純閉曲線 Γ で、どの球帽とも交わらず、しかも、2つの連結成分 W_1, W_2 を分離するものが存在する。Γ 上に任意に点 $\mathbf{p}$ をとり、$\mathbf{p}^*$ をその対心点とする。$\mathbf{p}^*$ は曲線 Γ 上にあるか、または Γ の W_2 を含む側にあると仮定してよい。したがって、球面 S 上の曲線で、W_1 と交わらずに $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}^*$ を結ぶことができる。

さて、これから、S を地表、$\mathbf{p}$ を北極、$\mathbf{p}^*$ を南極とみなすことにしよう。W_1 に含まれる球帽は北極、南極を含まないから、その中心の位置の経度が決められる。W_1 に含まれる2つの球帽 C_i, C_j の中心の経度の間にちょうど π の差があるなら、中心間を結ぶ（最短の）大円弧は、北極か、南極を通る。したがって、2つの球帽 C_i と C_j は交わることはできない。ゆえに、W_1 に含まれる2つの球帽が交わるなら、それらの中心点は、同じ経度を持つか、一方は他の‘東側’に位置する。

W_1 に含まれる1つの球帽から出発して、それに交わり、しかもその東側にある球帽を次々に訪れていくことを考えよう。どんどん東側の球帽を訪ねていくと、W_1 に含まれる球帽の個数は N より少ないから、そのうちに次の (1)(2) のいずれかが起こる：

(1) すでに訪れた球帽に再び出会う。

(2) ‘極東’の球帽にたどり着き、それに交わる球帽でさらに東側に位置するものは存在せず、それ以上東側に行けない。

(1) が起こったとすると、訪れた球帽をあわせて、北極と南極を分離する帯状の領域が得られる。これは、北極と南極を、W_1 に交わらない曲線で結ぶことができることに反する。したがって、必ず (2) が起こる。すると、この極東に位置する球帽が片側球帽である。□

さて、$C_1, C_2, \ldots, C_N$ を S 上に独立に置いた、球面半径 θ の N 個のランダム球帽の系とする。C_i の中心を $\mathbf{x}_i$ としよう。すると、$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ は S 上の独立な N 個のランダム点である。

補題 8.2 球帽 C_N には $k(\geq 1)$ 個の球帽 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ だけが交わるという条件のもとで、C_N が片側球帽となる確率は $2k/2^k$ である。

証明：$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ のどれかが $\mathbf{x}_N$ と一致する確率は0である。大円弧 $\mathbf{x}_N\mathbf{x}_i\,(i \leq k)$、あるいはその $\mathbf{x}_i$ を越えた延長と C_N の境界 ∂C_N の交点を $\hat{\mathbf{x}}_i$ で表そう。すると、$\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_k$ は ∂C_N 上で独立に一様分布する点となる。また、C_N が片側球帽であるための必要十分条件は $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_k$ が ∂C_N のある半円上に乗っていることである。この確率は、演習2.1により、$2k/2^k$ である。□

定理 8.1 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ を S 上に独立に置いた、球面半径 θ の N 個のランダム球帽の系とする。これら N 個の球帽で覆われる領域 W が連結となる確率を $P(\theta, N)$ とすると、

$$P(\theta, N) \geq 1 - N(\cos^2\theta)^{N-1} - N(N-1)(\sin^2\theta)(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta)^{N-2}$$

が成立する。

この不等式から、例えば、

$$P(\pi/3, 15) > 0.65, P(\pi/6, 60) > 0.68, P(\pi/10, 200) > 0.76$$

などが得られる。これらの下界は小さ過ぎるように思えるが、定理8.1の不等式を改良する方法は今のところなかなか見つからない。

問題 4 定理8.1の不等式を改良せよ。また、$P(\theta, N)$ の自明でない上界を見つけよ。

定理の証明：N 個の球帽 $C_1, \ldots, C_N$ の中心を $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ とする。２つの球帽 $C_i, C_j\,(i \neq j)$ が交わるのは、点 $\mathbf{x}_i$ が $\mathbf{x}_j$ を中心とする球面半径 2θ の球帽に含まれるときである。球面半径が 2θ の球帽の面積は

$$2\pi(1 - \cos 2\theta) = 4\pi \sin^2\theta$$

であるから、C_j が特定の $k\,(\geq 1)$ 個の球帽だけと交わる確率は

$$(\sin^2\theta)^k(1 - \sin^2\theta)^{N-1-k} = (\sin^2\theta)^k(\cos^2\theta)^{N-1-k}$$

である。よって、補題8.2を用いて、

$$\begin{aligned}
&\Pr(C_j\text{は片側球帽である}) \\
&= (\cos^2\theta)^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1}\binom{N-1}{k}(\sin^2\theta)^k(\cos^2\theta)^{N-1-k}\frac{2k}{2^k} \\
&= (\cos^2\theta)^{N-1} + 2\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}k\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^k(\cos^2\theta)^{N-1-k}
\end{aligned}$$

となる。$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^ky^{n-k} = x\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^n = nx(x+y)^{n-1}$ であるから、

$$\begin{aligned}&\Pr(C_j\text{は片側球帽である})\\&= (\cos^2\theta)^{N-1} + (N-1)(\sin^2\theta)\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^{N-2}\\&= (\cos^2\theta)^{N-1} + (N-1)\sin^2\theta\left(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right)^{N-2}\end{aligned}$$

となる。したがって、少なくとも1つの球帽が片側球帽である確率は、たかだか

$$N(\cos^2\theta)^{N-1} + N(N-1)\sin^2\theta\left(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right)^{N-2}$$

である。したがって、W が非連結となる確率 $1-P(\theta,N)$ も、これ以下である。ゆえに

$$P(\theta,N) \geq 1 - N(\cos^2\theta)^{N-1} - N(N-1)(\sin^2\theta)(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta)^{N-2}$$

が成立する。□

9 漸近的確率

定理 8.1 では、ランダムな N 個の球帽の和集合が連結となる確率の下界を与えた。その下界は小さ過ぎるように思えるが、球帽の半径が小さく、N が非常に大きい場合は、そう悪くない評価を与えることを示そう。

まず、マルコフの不等式とチェビシェフの不等式を思い出しておく。X を非負の確率変数とし、$f(x)$ をその密度関数、$\mu = E(X)$ とする。

$$\mu = \int_0^\infty xf(x)dx \geq \int_{t\mu}^\infty xf(x)dx \geq t\mu\Pr(X\geq t\mu)$$

であるから、$t\mu > 0$ のとき、

$$\Pr(X \geq tE(X)) \leq \frac{1}{t}$$

が得られる。(X が離散変数の場合は、$f(x)dx$ を $\Pr(X=x)$ に $\int$ を $\sum$ に変えればよい。) これが**マルコフの不等式**である。確率変数 Y の期待値を μ_Y、分散を σ^2 とし、$X=(Y-\mu_Y)^2$ とおく。$E(X)=\sigma^2$ である。マルコフの不等式において、$t=k^2/\sigma^2$ とおくと、$\Pr(X\geq k^2)\leq \sigma^2/k^2$ となる。したがって、

$$\Pr(|Y-\mu_Y|\geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

が得られる。これが**チェビシェフの不等式**である。

補題 9.1 $f = f(N), g = g(N)$ を正値関数とする。$N \to \infty$ のとき、$f \to 0$ ならば、N が十分大きいとき、$(1-f)^g < e^{-f \cdot g}$ となる。また、さらに $f^2 \cdot g \to 0$ ならば、

$$(1-f)^g = e^{-f \cdot g}(1 + o(1))$$

である。(記号 $o(1)$ は、$N \to \infty$ のとき 0 に収束するような、N のある関数を表す。)

証明 : $0 < t < 1$ のとき、$\log(1-t)$ はマクローリン展開により、

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2(1-\xi t)^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

と表される。ゆえに、N が十分大きいとき ($f < 1$ となるとき)、

$$g \cdot \log(1-f) = -f \cdot g - \frac{f^2 \cdot g}{2(1-\xi f)^2} < -f \cdot g$$

となる。したがって、$(1-f)^g < e^{-f \cdot g}$ である。また、$f^2 \cdot g \to 0$ なら、

$$\frac{f^2 \cdot g}{2(1-\xi f)^2} \to 0 \quad (N \to 0)$$

であるから、$(1-f)^g = e^{-f \cdot g}(1 + o(1))$ となる。□

定理 8.1 とチェビシェフの不等式、上の補題を用いて次の定理を証明しよう。

定理 9.1 $\theta = c\sqrt{\frac{1}{N}\log N}$ とおく。すると

$$\lim_{N \to \infty} P(\theta, N) = \begin{cases} 0 & c < 1 \text{のとき} \\ 1 & c > \sqrt{2} \text{のとき} \end{cases}$$

となる。

問題 5　$1 < c < \sqrt{2}$ のときの極限の確率はどうなるか?

定理の証明 : はじめに、$c > \sqrt{2}$ の場合を考えよう。$P(\theta, N) \to 1 (N \to \infty)$ を示すには、定理 8.1 により、$N \to \infty$ のとき

$$N(\cos^2\theta)^{N-1} + N(N-1)(\sin^2\theta)(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta)^{N-2} \to 0$$

となることを示せばよい。$\theta = c\sqrt{\frac{1}{N}\log N} \to 0$ であるから、$\sin^2\theta = \theta^2(1+o(1)) = (1+o(1))\frac{c^2}{N}\log N$ である。ゆえに

$$\begin{aligned} & N(1-\sin^2\theta)^{N-1} + N(N-1)(\sin^2\theta)(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta)^{N-2} \\ & \quad < Ne^{-(N-1)\sin^2\theta} + N^2\sin^2\theta\, e^{-\frac{1}{2}(N-2)\sin^2\theta} \\ & \quad \sim Ne^{-c^2\log N} + N(c^2\log N)e^{-(c^2/2)\log N} \sim \frac{1}{N^{c^2-1}} + \frac{c^2\log N}{N^{c^2/2-1}} \end{aligned}$$

となり、$c^2 > 2$ であるから、これは $N \to \infty$ のとき 0 に収束する。ここで、記号 $f \sim g$ は $f = (1+o(1))g$ を意味する。

残りの、$c < 1$ の場合を考えよう。私たちは $P(\theta, N) \to 0\,(N \to \infty)$ を示さなければならない。$\mathbf{x}_i$ を球帽 C_i の中心とする。$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ は S 上で独立一様に分布するランダム点である。D_i を $\mathbf{x}_i$ を中心とする球面半径が 2θ の球帽とする。D_i の面積は $4\pi\sin^2\theta$ である。$C_i \cap C_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{x}_i \in D_j$ であるから、

$$\Pr(C_i \cap C_j \neq \emptyset) = \sin^2\theta \sim \theta^2.$$

同様に

$$\Pr(D_i \cap D_j \neq \emptyset) = \sin^2 2\theta \sim 4\theta^2$$

である。球帽 C_i が他のどの球帽 $C_j\,(j \neq i)$ とも交わらないとき、C_i は**孤立**しているということにしよう。孤立した球帽 C_i があるなら、$U = C_1 \cup \ldots \cup C_N$ は明らかに非連結である。$C_1, \ldots, C_N$ の中の孤立した球帽の個数を Z で表そう。もちろん Z は確率変数である。各 $1 \leq i \leq N$ に対して、確率変数 Z_i を

$$Z_i = \begin{cases} 1 & C_i\text{が孤立しているとき} \\ 0 & C_i\text{が孤立してないとき} \end{cases}$$

で定義する。すると $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$ である。また、$(\theta^2)^2 N = o(1)$ だから、補題 9.1 を用いて

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= \Pr(Z_i = 1) \sim (1-\theta^2)^{N-1} \\ &\sim e^{-N\theta^2} \sim e^{-c^2\log N} = N^{-c^2} \end{aligned}$$

となるから

$$E(Z) = NE(Z_1) \sim N^{1-c^2}$$

である。次に、$i \neq j$ のときの $E(Z_iZ_j)$ を求めよう。まず、

$$E(Z_iZ_j) < \Pr(D_i \cap D_j = \emptyset)(1-2\theta^2)^{N-2} + \Pr(D_i \cap D_j \neq \emptyset)(1-\theta^2)^{N-2}$$

が成立する。$\Pr(D_i \cap D_j \neq \emptyset) \sim 4\theta^2$ であるから

$$\begin{aligned} E(Z_iZ_j) &< (1-4\theta^2)(1-2\theta^2)^{N-2} + 4\theta^2(1-\theta^2)^{N-2} \\ &< (1-4\theta^2)e^{-2(N-2)\theta^2} + 4\theta^2 e^{-(N-2)\theta^2} \\ &\sim (1-4\theta^2)N^{-2c^2} + (4c^2\log N)N^{-(1+c^2)} \\ &= N^{-2c^2}(1-4\theta^2+(4c^2\log N)N^{c^2-1}) \sim N^{-2c^2}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{i,j} E(Z_iZ_j) = \sum_i E(Z_i^2) + \sum_{i\neq j} E(Z_iZ_j) \\ &= N\cdot E(Z_1) + N(N-1)\cdot E(Z_1Z_2) \\ &< N\cdot N^{-c^2} + N^2\cdot N^{-2c^2} = N^{2(1-c^2)}\left(\frac{1}{N^{1-c^2}}+1\right) \\ &\sim N^{2(1-c^2)} \sim E(Z)^2 \end{aligned}$$

である。不等式 $E(Z^2) \geq E(Z)^2$ は常に成り立つのだから、$E(Z^2) \sim E(Z)^2$ となる。Z の分散は $E(Z^2) - E(Z)^2$ に等しいから、チェビシェフの不等式により

$$\Pr(Z=0) \leq \Pr(|Z-E(Z)| \geq E(Z)) < \frac{E(Z^2)-E(Z)^2}{E(Z)^2} \to 0$$

となる。ゆえに $\Pr(Z \geq 1) \to 1\ (N\to\infty)$ であり、$P(\theta, N) \to 0\ (N\to\infty)$ が成立する。□

10　ランダム球帽系による被覆確率

球面 S 上に球面半径 θ の球帽をランダムに N 個おくとき、これらが球面をすべて覆ってしまう確率を考えよう。これは被覆問題 (coverage problem) と呼ばれ、ウイルスの抗体に関する研究から生じた問題である。インフルエンザのウイルスは細胞の壁に接触して感染する。細胞やウイルスを球体と考えると、ウイルスに比べて、細胞はずっと大きく、細胞の壁面は平面のように扱ってよい。抗体はウイルスよりずっと小さい棒状のもので、その先端部分がウイルスの表面に吸着する。抗体が吸着した部分（吸着した点を中心とするある球帽）は、棒状の抗体が細胞の壁面につかえて、細胞の壁面に接触することはできなくなる。抗体がたくさん吸着して、ウイルスの表面が細胞面に接触できないような球帽で覆われてし

まうと、そのウイルスは感染できなくなるのである。抗体がウイルスにランダムに吸着するとき、感染できなくなる確率の問題としてランダム球帽系による球面の被覆の問題が生じた。

球面半径 θ の N 個の球帽を $C_1, C_2, \ldots, C_N$、それらの中心を $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ とする。$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ は S 上で一様分布する独立な N 個のランダム点である。N 個の球帽の**覆い残した部分**を $\Omega(\theta, N)$ で表し、

$$U = U(\theta, N) = \frac{\Omega(\theta, N)\text{ の面積}}{4\pi}$$

とおく。

補題 10.1 $E(U) = (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})^N.$

証明 : $\mathbf{x} \in \Omega(\theta, N)$ は、$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ がすべて $\mathbf{x}$ を中心とする球面半径 θ の球帽の外に落ちることと同値であるから、$\Pr(\mathbf{x} \in \Omega(\theta, N)) = (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})^N$ である。また、U の確率密度関数を $g(u)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathbf{x} \in \Omega(\theta, N)) &= \int_0^{4\pi} \Pr(\mathbf{x} \in \Omega(\theta, N) \mid U = u) g(u) du \\
&= \int_0^{4\pi} u g(u) du = E(U).
\end{aligned}$$

□

次に、U の分散 $V(U)$ を評価する。

補題 10.2 $V(U) < \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})^N.$

証明 : $U = U(\theta, N)$ の確率密度関数を $g(u)$ とし、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を S 上の独立な 2 つのランダム点とする。

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega) &= \int_0^{4\pi} \Pr(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \mid U = u) g(u) du \\
&= \int_0^{4\pi} u^2 g(u) du = E(U^2)
\end{aligned}$$

である。大円弧 $\mathbf{xy}$ の長さ t の密度関数 $f(t)$ は $f(t) = (\sin t)/2$ であった。$\mathbf{x}$ および $\mathbf{y}$ を中心とする 2 つの球面半径 θ の球帽の和の面積は、大円弧 $\mathbf{xy}$ の長さが 2θ 以上のとき、$8\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$ であり、$\mathbf{xy} < 2\theta$ のときも、$4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$

以上だから、

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega) &= \int_0^{\pi}\Pr(\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega \mid \mathbf{xy}=t)f(t)dt \\
&< \int_0^{2\theta}(1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N f(t)dt \\
&\quad + \int_{2\theta}^{\pi}(1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N f(t)dt \\
&< \int_0^{2\theta}(1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N \frac{\sin t}{2}dt + (1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N \\
&= (1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N \frac{1-\cos 2\theta}{2} + (1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N \\
&< (1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N \sin^2\theta + ((1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^2)^N.
\end{aligned}$$

ゆえに、$V(U)=E(U^2)-E(U)^2<(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^N\sin^2\theta$ となる。□

定理 10.1 $\theta = c\sqrt{\frac{1}{N}\log N}$ とする。$c<2$ ならば、

$$\Pr(\Omega(\theta,N)\neq\emptyset)\to 1\ (N\to\infty)$$

である。

証明：$\Pr(\Omega(\theta,N)=\emptyset)\to 0\ (N\to\infty)$ を示そう。$\Omega(\theta,N)=\emptyset \Rightarrow U=0$ であるから

$$\Pr(\Omega=\emptyset)\le\Pr(U=0)$$

である。チェビシェフの不等式により、

$$\Pr(U=0)\le\Pr(|U-E(U)|\ge E(U))\le\frac{V(U)}{E(U)^2}$$

である。$(\sin^2\frac{\theta}{2})^2N\sim(\frac{\theta}{2})^4N=\frac{c^4}{16N}(\log N)^2=o(1)$ であるから、補題 8.1 により、

$$(1-\sin^2\tfrac{\theta}{2})^N\sim e^{-(\sin^2\frac{\theta}{2})N}\sim e^{(c^2/4)\log N}=N^{-c^2/4}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{V(U)}{E(U)^2} &< \frac{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^N\sin^2\theta}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^{2N}}=\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^N} \\
&\sim \frac{\theta^2}{N^{-c^2/4}}=\frac{c^2\log N}{N^{1-c^2/4}}\to 0\ (N\to\infty)
\end{aligned}$$

となる。ゆえに、$\Pr(\Omega(\theta,N)=\emptyset)\to 0\ (N\to\infty)$ である。□

補題 10.3 $\theta = c\sqrt{\frac{1}{N}\log N}$, $c \geq 2$ のとき、任意の $\delta > 0$ について

$$\Pr(U > \frac{\delta}{N}\log N) \to 0\,(N \to \infty)$$

である。

証明：マルコフの不等式により

$$\begin{aligned}\Pr(U > \frac{\delta}{N}\log N) &< \frac{E(U)}{\frac{\delta}{N}\log N} = \frac{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^N}{\frac{\delta}{N}\log N} \\ &\sim \frac{N^{-c^2/4}}{\frac{\delta}{N}\log N} = \frac{N^{1-c^2/4}}{\delta\log N} \to 0.\end{aligned}$$

□

定理 10.2 $\theta = c\sqrt{\frac{1}{N}\log N}$, $c > 2$ のとき、

$$\Pr(\Omega(\theta, N) = \emptyset) \to 1 \ \ (N \to \infty)$$

である。

証明：球面半径 θ の N 個のランダムな球帽を $C_1, C_2, \ldots, C_N$、それらの中心を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ とする。これらの中心点は独立な N 個のランダム点である。$c' = (2+c)/2$ とし、$\theta' = c'\sqrt{\frac{1}{N}\log N}$ とおき、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ を中心とする球面半径 θ' の N 個の球帽の系 $C'_1, C'_2, \ldots, C'_N$ を考える。$\delta > 0$ を $\frac{\delta}{N}\log N$ が球面半径 $\theta - \theta'$ の球帽の面積よりも小さいような定数とする。（半径 $\theta - \theta'$ の円の面積は $\pi(\theta - \theta')^2 = \pi(\frac{c-2}{2})^2\frac{1}{N}\log N$ だから、例えば、$\delta = \pi(\frac{c-2}{4})^2$ とすればよい。）$c' > 2$ だから、球帽の系 $C'_1, C'_2, \ldots, C'_N$ に補題 10.3 を適用すると、$\Pr(U(\theta', N) \leq \frac{\delta}{N}\log N) \to 1$ となる。$U(\theta', N) \leq \frac{\delta}{N}\log N$ のとき、$\Omega(\theta', N)$ は球面半径 $\theta - \theta'$ の球帽を含むことはできない。したがって、任意の $\mathbf{p} \in S$ に対して、$\mathbf{p}$ を中心とする球面半径 $\theta - \theta'$ の球帽はある C'_i と交わる。これは、$\mathbf{p} \in C_i$ を意味する。つまり、$U(\theta', N) \leq \frac{\delta}{N}\log N$ なら、$\Omega(\theta, N) = \emptyset$ である。したがって、$\Pr(U(\theta', N) \leq \frac{\delta}{N}\log N) \leq \Pr(\Omega(\theta, N) = \emptyset)$ である。ゆえに、$\Pr(\Omega(\theta, N) = \emptyset) \to 1$ となる。□

参考文献

[1] G. ジェニングス（伊里正夫・伊里由美訳）、幾何学再入門（岩波書店 1996）.

[2] M. G. Kendall and P. A. P. Moran, *Geometric Probability* (Charles Griffin and Company 1963 London).

[3] Y. Maeda and H. Maehara, Viewing an angle from various viewpoints, submitted.

[4] 前原濶、Sylvester の問題、統計数理研究所彙報 25, 81-86.

[5] H. Maehara, A threshold for the size of random caps to cover a sphere, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 40(1988) 665-670.

[6] 前原濶、円と球面の幾何学（朝倉書店 1998）.

[7] H. Maehara, On the length of the shortest edge of a graph on a sphere, *European Journal of Combinatorics*, to appear.

[8] H. Maehara, On a condition for the union of spherical caps to be connected, submitted.

[9] H. Maehara, When does the union of random spherical caps become connected?, submitted.

[10] H. Maehara, On the intersection graph of random caps on a sphere, preprint.

[11] R. E. Miles, Random points, sets and tessellations on the surface of a sphere, *Sankya* A33 (1971) 145–174.

[12] Luis A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (vol. 1: Section, Probability) (Addison-Wesley 1976 London).

[13] L. A Santaló, Integral formulas in Crofton's Style on the aphere and some inequalities referring to spherical curves, *Duke Math.* J.9 (1942).

[14] Herbert Solomon, *Geometric Probability* (Society for Industrial and Applied Mathematics 1978 Philadelphia).

[15] J. G. Wendel, A problem in geometric probability, *Math. Scand.* 11 (1962) 109-111.