The System of Teaching Calculation Focusing on the Division of Fractions －According to the "Suido Method"－

The System of Teaching Calculation Focusing on the Division of Fractions

——According to the "Suido Method"——

Tadato KOTAGIRI*

(Received Aug. 30, 1986)

1984年8月24日から30日にかけて，約1週間，オーストラリアのアデレード大学を主会場に，第5回国際数学教育会議（5th International Congress on Mathematical Education－ICME 5）が開催され，数学教育の多岐にわたって報告・討議された。その全体にわたる内容については，同会議の Proceedings①によって見ることができる。筆者は，THEME GROUP 4：THEORY, RESEARCH AND PRACTICE IN MATHEMATICAL EDUCATION の分数・小数小分科会（TRP 3）に参加し，各国の小数及び分数指導の現状をかいま見た。この小分科会における発表論文について，筆者は既に『研究と実践』誌上②で報告したので，ここでは，1つひとつについての紹介は省略し，特に分数について，その概念を子どもたちが獲得することの難しさが，主要な関心になったことだけを明らかにしておく。

TRP 3 の報告と討議の結果をまとめて，小分科会世話人を務めたT. Kieren, M. Behr の両氏は③，分数概念獲得の難しさを，いまなお抱えている教育実践上の課題であることを確認した上で，既習の整数概念との関わり，および，連続量と分離量の取り扱いに触れ，さらに有意味的な理解の欠如（missing links）を指摘した④。この Kieren と Behr のまとめは，小分科会 TRP 3 の討議の成果と不十分さをよく表している。すなわち，成果という点では，整数概念の獲得と分数概念の獲得との不連続性を明らかにした⑤。また，不十分さという点では，分数概念そのものの分析が，教材の構成に反映し得ていない。筆者は，小分科会 TRP 3 で，子どもたちの分数概念獲得達成度の低さを指摘することより，どう指導すれば，すべての子どもたちが分数概念を獲得することができるようになるのかについて討議すべきだと提案した。それは，後者の不十分さを踏まえてのものであった。そして，分数は，量としての面と割合としての面を持つが，この2側面を指導の中では混用しているのではないかと指摘した。

この点で，水道方式による数指導の体系は⑥，画期的な提案であり，その有効性は，わが国の教育現場では既に検証済みであると言える⑦。この指導の体系は，「型分け」と呼ぶ教材の分類に基づき，半具体物としての性格を持つ「タイル（TILE）」と呼ぶ教具を用いることによって，現実的な指導となっている。そして，具体操作的な理解と形式的な理解の間に位置づけられる「シェーマ（SCHEMA）」を形成するところに，大きな特徴があり，それが指導の改善に向けての提案でもある。水道方式による分数の指導では，量としての分数と割合としての分数を区別し，量としての分数で指導を系統立てる。そればかりでなく，「算数」を学習し始める数の導入から整数の加減乗除，さらには小数，分数の加減乗除まで，学習内容が論理的に連結（Link）するように，系統立てられている。

以下は，筆者が，分数の除法までの系統をその論理に着目してまとめ，どう指導を改善すればいいのかということを議論するために作成し，TRP 3 の参加者に配布した資料を整理したものである。

---

*Dept. of Math., Coll, of Educ., Univ. of the Ryukyus

A. Introduction of Multiplication　　(Grade (School Year) : 2)

* " 2×3 " is analyzed as follows,

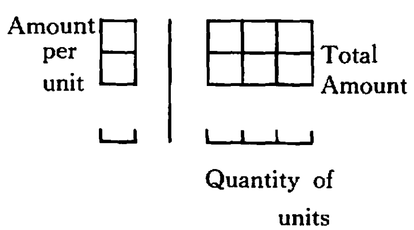
〈Example〉 Two apples are in a package. There are three packages.
How many apples are there in all ?.

〈Structure〉 Two apples per package → Amount per unit
Three packages → Quantity of units

Hence we are able to get the following word-formula.
That is, (Amount per unit) × (Quantity of units) = (Total Amount)

> " (Quantity of units) × (Amount per unit) = (Total Amount) " seems to be a more appropriate expression than the above in English. In its case, the math-formula is not " 2×3 " but " 3×2 ".

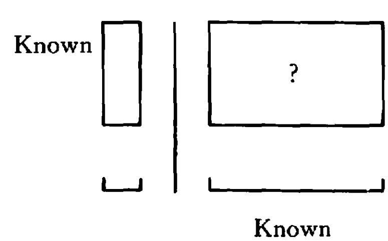
* Normalization of the meaning of Multiplication (Semantics)



We call these pictures " Schema ".
This is a " schema " for $3 \times 2 = 6$ (in Japanese, $2 \times 3 = 6$).

〈Definition of Multiplication〉

Multiplication is asking for the " Total Amount " from " Amount per unit " and " Quantity of units ".



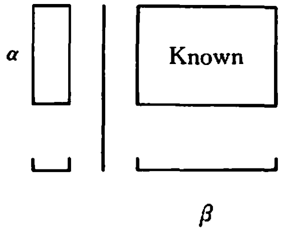
[Steps for constructing " Schema "]

1) Placing " Tiles ".
2) Drawing " Schema " after looking at arranged " Tiles. "
3) Drawing " Schema " from formulas.

B. Introduction of Division (Grade : 3)

* Analyzing & Normalizing

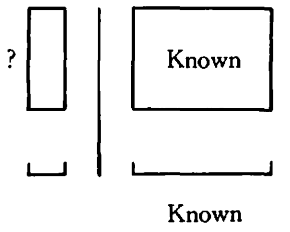
Division has two aspects roughly (Semantics). One is in the case of asking for " Amount per unit " (α-part). The other is asking for " Quantity of units " (β-part).



〈 Definition of Division 〉

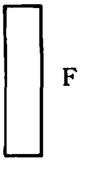
Division is presented as asking for " Amount per unit ".

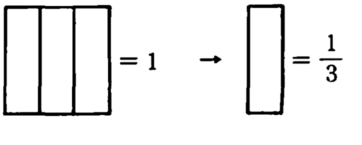
> After children understand how to calculate division for " Amount per unit ", we teach them division for " Quantity of units ".



C. Introduction of Fractions (Grade : 3 or 4)

〈 Definition 〉 There is some fraction. We call this fraction " F " temporarily. If three Fs are equal to 1 totally, then we are to name the fraction " F " " $\frac{1}{3}$ ". And " $\frac{2}{3}$ " is " 2 of $\frac{1}{3}$ ".





〈 Theorem 〉 If dividing 1 into 3, that one is $\frac{1}{3}$.

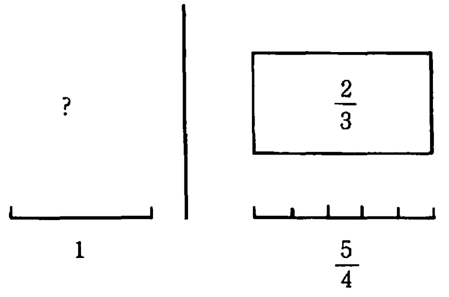
D. Division of Fractions (Grade : 5 or 6)

We calculate the fractions as follows, $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$.

But why does $\frac{2}{3}$ divided by $\frac{5}{4}$ equal $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$?

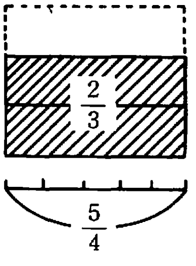
<Reasoning>

[0]



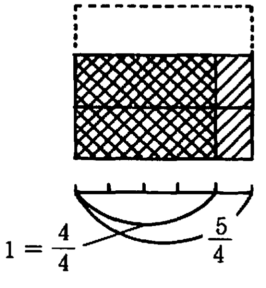
What is the meaning of " $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$ " ?

[1]



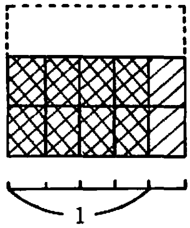
First we make a schema for $\frac{2}{3}$.

[2]



For the sake of getting the answer to the question " what is $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$? " , it is sufficient to ask for the cross-shaded area, which is 4 sections of the quantity $\frac{5}{4}$ and $\frac{4}{4}$ is one unit.

[3]



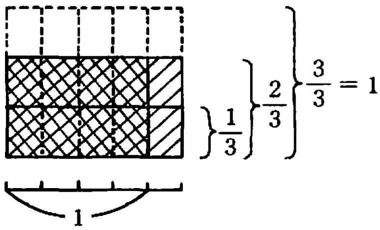
8 small sections are equal to the cross-shaded area totally.

Hence, if we can find the magnitude of a small section, then we can get the answer.

[4]

15 small sections are equal to the one large unit totally.

Therefore $\square = \frac{1}{15}$.



Now we notice that when we say there are 15 sections in 1, the " 15 " can be calculated from 3×5. we can see that " 3 " is the same number as the denominator of " $\frac{2}{3}$ " . And we can see that " 5 " is the same number as the numerator of " $\frac{5}{4}$ " . That is, We can determine the amount of the small section by calculating $\frac{1}{3 \times 5}$ from the " 3 " of " $\frac{2}{3}$ " and the " 5 " of " $\frac{5}{4}$ " .

[5] We found that the total of 8 small sections is the answer. This " 8 " can be gotten by calculating 2×4. And we see that " 2 " is the same number as the " 2 " of " $\frac{2}{3}$ " , " 4 " is the same as the " 4 " of " $\frac{5}{4}$ " .

[6] Conclusion : The cross-shaded area which is the answer of $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$ is " 2×4 of $\frac{1}{3 \times 5}$ ". And " 2×4 of $\frac{1}{3 \times 5}$ " is defined as " $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ " . Therefore $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$.

[∞] References

The Association of Mathematics Instruction :

Principles of Mathematics Education — Achievement of AMI —

K. Ginbayashi (ed.) :

Wakaru—Sansu (Understanding Arithmetic) , Mugi—Shobo

＜ 注 ＞

① Marjorie Carss (Ed.)：Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education (Birkhäuser, 1986)

② 「ICME 5 の小分科会 "TRP 3" における発表論文の紹介」(数学教育協議会会誌『研究と実践』第67号 (1985) P－31～43)

③ Thomas Kieren (University of Alberta, Canada)
Merlyn Behr (Northern Illinois University, USA)

④ 前掲報告書① P－179

⑤ 『数学教室』誌上，「研究の現状と問題点 ≪小学校≫ かけ算・わり算」が連載されているが，その議論の中に，低学年における整数のかけ算の指導を高学年における小数・分数のかけ算の指導にどうつなげていくのかという視点がある（例えば，藤枝（No.382)，山野下（No.387及びNo.412)，清宮（No.406）などの主張にある)。この視点での教育実践上の課題と整数と分数の認識の不連続性の問題は，共通する部分が大きいように思う。

⑥ 銀林浩監修『わかる算数指導法事典』（1983）中，「A．数と計算」参照

⑦ 例えば，沖縄県下でも，「算数が苦手な子・嫌いな子，集まれ！」という呼びかけのもとで，「たのしい算数教室」（沖縄県教職員組合那覇支部主催，沖縄県数学教育協議会協力）を毎夏開催して9回を数えているが，そこでの指導は水道方式によっている。また，ポストテストの結果，平均点が80点とか90点という実践報告は特異なものではなくなっている（3年のかけ算 ＜大謝名小：喜納裕子　外＞，4年のわり算 ＜津嘉山小：伊良皆マサ子　外＞ など－沖縄県数学教育協議会第7回研究大会 ＜1986. 8. 14, 15＞より)。