モジュラーParty代数の研究

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月　４日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００６年度～２００８年度
課題番号：１８５４００４２
研究課題名（和文）　モジュラーＰａｒｔｙ代数の研究

研究課題名（英文）　A Research on the Modular Party Algebra

研究代表者
小須田　雅(KOSUDA　MASASI)
国立大学法人 琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：40291554

研究成果の概要：

本研究においては平成１８年度中にモジュラーＰａｒｔｙ代数の定義関係式と標準基底を決定することが出来た。これにより，モジュラーＰａｒｔｙ代数がｃｅｌｌ構造を持つことが明らかになった他，構成した準同型が表現になっているかどうかの判定が容易になった。１９年度にはモジュラーＰａｒｔｙ代数のＭｕｒｐｈｙ作用素を計算するプログラムを得ることが出来た。これにより，それまで難しいと思われていたＰａｒｔｉｔｉｏｎ代数の半正規形式による表現の構成が可能になり，実際，ランク４までの既約表現をすべてこの方法により構成することに成功した。一般のランクについてＰａｒｔｉｔｉｏｎ代数の既約表現については未だ解明されていないが，ランク４までの結果を観察する限りでは，モジュラーＰａｒｔｙ代数の場合と同様，表現行列の成分に鈎長や軸間距離のようなものが現れており，これらの言葉で具体的な記述を行うことが今後の研究課題で期待されている。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	420,000	2,720,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：Partition algebra, Party algebra, Murphy operator, cellular algebra, Irreducible representation, Seminormal form

１．研究開始当初の背景

Aran Ram は Centralizer of the Tensor Representation の略語として tentalizer を用いた。本研究は tentalizer の研究の１つといえる。

tentalizer の研究として，最も有名なものは，Schur-Weyl による一般線形群のテンソ

ル積表現と対称群に関する相互律である。その後に研究された Brauer 代数は直交群や斜交群の tentalizer であり，1980 年代に数理物理や組紐理論との関係が注目された岩堀-Hecke 環はＡ型量子群の tentalizer, BMW 代数は, B,C,D 型の量子群の tentalizer ということになる。1990 年代に活発に行われた cyclotomic Hecke 代数（有木-小池代数）も tentalizer であることが示されている。

同じ 1990 年代半ばに，作用させる群を古典群から置換行列のつくる離散的な群に変更することで定義される tentalizer についての研究が V.F.R.~Jones と物理学者である P.P.~Martin により独立に始められた。この代数から得られる Diagram 代数 は Partition 代数と名付けられ，現在はその Cell 構造に注目した研究がなされている。

こうした中で，本研究では作用させる群をやはり離散的な行列群である複素鏡映群 G(r,1,Q)とし，その tentalizer から作られる Diagram 代数について研究を行うものであった。

r=1 の場合，G(r,1,Q)は前述の置換行列の作る群（Q 次対称群）に一致するが，本研究は，Partition 代数に関する研究をもっと広い範囲から考察することも目的の１つとしていた。

離散群の tentalizer については，まず Q 次置換行列の群（Q 次対称群）の tentalizer から定義される Diagram 代数である Partition 代数についての研究が始められていた。Partition 代数については，Dobule Centralizer Theorem（Schur-Weyl 相互律）を利用した指標公式の導出も，Aran Ram や Tom Halverson によって行われていた。

一方，複素鏡映群 G(r,p,Q) の tentalizer に関しては，1997 年に田邊顕一郎氏が名古屋ジャーナルで，その生成元を明らかにした他は，殆ど研究がなされていなかった。

2000 年に私は「r>n（n はテンソルの個数)」という条件のもとでモジュラー Party 代数について関係式を明らかにしていた。2001 年に，同じ条件のもとで直交形式による既約表現の完全代表系を構成することに成功した。2004 年に私は r=2 におけるモジュラーParty 代数についても，直交形式による既約表現の構成が得られたので東京で２回，北海道，京都で１回ずつ講演を行った。京都での発表の際には，以前から私の研究に関心を寄せていただいている成瀬弘氏（岡山大学）が，モジュラー Party 代数の指標についての研究を本格的に始め，2005 年の１月頃には一般の r についてのモジュラー Party 代数の指標公式を得ている。

その後私は，Cell 表現を与える基底について有力な候補を得た。成瀬氏と私は 2005 年４月にオックスフォードでの研究集会 ''Cellular and diagram algebras in mathematics and physics''に参加し，それぞれの結果や途中経過につて発表を行った。この研究集会では，P. Martin, A. Ram, T. Halverson の３氏を含む多数の出席者と会談し，今後の研究についての重要な意見交換を行うことが出来た。

本研究はこうした背景のもとに始めたものである。

２．研究の目的

本研究の目的は，各行各列に１のｒ乗根の冪が配置されたＱ次の正方行列の作る群（複素鏡映群 G(r,1,Q)）が V の n 回のテンソル積空間 V×…×V（dimV = Q）に対角的に作用する際に得られる中心化環から決まる Diagram 代数（モジュラー Party 代数とよぶ）について，その代数構造と性質を明らかにすることである。

組紐群の不変量への応用で良く知られるようになったが， tentalizer やその q 変形の多くは，基底を平面に描かれた図に対応させ，基底の積を図の結合に対応させることが出来る。このように図の結合により積が定義される代数を Diagram 代数とよぶことにする。 複素鏡映群 G(r,1,Q)の tentalizer についても図による積を考えることが出来ることがわかっているので，Diagram 代数の１つである。

このように tentalizer を Diagram 代数と考えると，パラメータ Q がベクトル空間の次元という意味をはなれて正整数以外の値を取る場合についても考えることが出来るようになり，より広い範囲の結合代数を扱うことが出来るようになる。

より具体的には次のことを解明することが目的であった。

（１）<u>モジュラー Party 代数の定義関係式と Cell 構造の決定</u>
これにより，基礎体の標数によらない表現（Cell 表現）の構成が可能になる。

（２）<u>半単純でない場合の Cell 表現の同値関係の記述と直既約表現の記述</u>
いわゆるモジュラー表現の研究である。

（３）<u>複素鏡映群 G(r,1,Q)のカシミール元の発見</u>
本研究でもっとも力を入れる部分であり，これを利用して半正規表現の自然な構成を考える。対称群のマーフィー作用素を利用した半正規表現の構成というものは古くから知られていたが，これについては一般線形群のカシミールに対応するものであるということが，最近の研究でわかってきた。本研究は，モジュラーParty 代数のマーフィー作用素を

構成し，それから複素鏡映群のカシミールの構成を試みるものである。
（４）Cell 表現の幾何的意味の解明
対象群の Cell 表現についてはその幾何的な構造が明らかにされているが，同様に構成される Diagram 代数についてはＣell に対応する幾何構造については，何も研究されていない。そもそも幾何的な対応物が存在するかどうかもわかっていないが，その可能性を考えながら研究することは重要である。

なお，複素鏡映群 G(r,p,Q) の tentalizer から得られる Diagram 代数を考えることによりモジュラー Party 代数を含むより広い田邊代数（田邊顕一郎：筑波大学）というものも定義されている。田邊代数の表現の構成についても当然視野に入れてはいるが，始めにモジュラー Party 代数の研究を丹念に行うことが，田邊代数の研究にも欠かせないと考えている。

３．研究の方法

（１）１８年度に行ったモジュラー Party 代数の定義関係式と標準基底の決定のために取られた方法は以下のとおりである。なお，この方法は岩堀長慶氏の名づけたトコロテン論法に相当するものである。

既に r=2 の場合で得た要領で，以下のような手法を用いた。

1. まず，組紐のように生成元の積を diagram で表し，「図形を変形して別の生成元の積の図に一致するのであれば，それらの生成元は等しい」という推測を立て，さまざまな図の変形を行った後、
2. 生成元と関係式の言葉に直し，その正当性をチェックし、
3. 基底と同じ個数の「標準的な word (standard expression)」を仮に定め、
4. ①. で推測した幾つかの関係式を用いることにより，すべての word が③. で定めた standard expression に変形できることを示す。
5. ④. が上手くいかない場合，①. の関係式や ③. の standard expression を見直し，④. が成立するまで繰り返す。

以上の作業を既約表現の次数を考慮し、また表現空間の分解や図を動かす中で対称群が作用する様子を観測しながら行い，最終的に定義関係式と標準基底を得ることが出来た。これについては，Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 17(2008) 939-960 に掲載されている。また論文作成にあたっては，岡山大学の成瀬弘氏とメールや直接大学に行き来する他，研究集会を利用して頻繁に討論を行った。

（２）半単純でない場合の Cell 表現の同値関係の記述と直既約表現の記述については，（３）を先行して研究を行う中で，他に優先すべき研究課題が見つかったため，ほとんど研究がすすまなかった。しかしながらこの研究に備えて，先行する結果の論文を取り寄せて目を通すなどの作業は行っている。

（３）複素鏡映群 G(r,1,Q)のカシミール元の発見については岡山大学の成瀬弘氏がＡ．Ｒａｍ氏の論文に記載された手法を，数式処理ソフトＧＡＰのプログラムにしたのを受けて実験を行った。このプログラムは今までの計算結果の確認には大いに役に立った。しかしながらこのプログラムは膨大な計算を含んでおり，現有するパソコンのアップデートや情報処理センターのコンピュータなどより高性能のコンピュータを利用して膨大な日数をかけた結果，メモリ不足で計算が中断されるなど新しい結果を得るまでにはいたらなかった。これに対する対処法については，成瀬氏に相談する他，本研究を組み合わせ論の研究集会などでＧＡＰの利用例として紹介するとともに既にＧＡＰを用いた研究を行っている他の分野の研究者から意見を貰うなどしてプログラムの改善に努めた。その他，ＧＡＰ以外の言語，ＭａｐｌｅやＣ言語などへの移植を行う中，メモリを使い果たす前に中途結果を印字するようにする，複数台のマシンで分散処理出来るような仕様に変更する，基底の並べ方を変えて見る，などの工夫を行った結果，新しい結果がいくつか得られるようになった。これらの研究結果について２０年度に名古屋で行われた研究集会 Combinatorics and Representation Theory に参加し，出席者の１人で，かつてＰａｒｔｉｔｉｏｎ代数に関する包括的な研究を行っていたＡ．Ｒａｍ氏に報告を行った。

（４）Cell 表現の幾何的意味の解明
この研究についても現在は積極的に行う状況ではなく，文献を取り寄せて読むなどの方法以外は行っていない。

４．研究成果

本研究においては平成１８年度中にモジュラーＰａｒｔｙ代数の定義関係式と標準基底を決定することが出来たことが最大の成果である。これにより，モジュラーＰａｒｔｙ代数がｃｅｌｌ構造を持つことが明らかになった他，構成した準同型が表現になっているかどうかの判定が容易になった。またモジュラーＰａｒｔｙ代数の指標表を構成する際に，共役類を定める必要があるが，その際にこの標準基底が利用できることもわかっている。１９年度にはモジュラーＰａｒ ｔｙ代数のＭｕｒｐｈｙ作用素を計算するＧＡＰプログラムを得ることが出来た。この段階では今まで得られた結果の検証が行えるようになったに過ぎなかったが，２０年度にかけて改善を重ね，さらにランクの高いケースについても計算が可能になった。これにより，それまで難しいと思われていたＰａｒｔｉｔｉｏｎ代数の半正規形式による表現の構成が可能になった。実際，ランク４までの既約表現をすべてこの方法により構成することに成功した。一般のランクについてＰａｒｔｉｔｉｏｎ代数の既約表現については未だ解明されていないが，ランク４までの結果を観察する限りでは，モジュラーＰａｒｔｙ代数の場合と同様，表現行列の成分に鈎長や軸間距離のようなものが現れることが確認できた。今後はこれらの言葉で具体的な記述を行うことが急務である。その他，他の研究者からマッカイ対応との関連性も指摘されており，さらに詳細な研究が必要とされている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

①Masashi KOSUDA, Characterization for the Modular Party Algebra (Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 17(2008) 939-960

②小須田 雅, Partition algebra and Party algebra （第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集 (2007) 6-20

〔学会発表〕（計　１件）

①Partition algebra and Party algebra （第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会 2007 年 5 月 31 日 上智大学セミナーハウス

６．研究組織

(1)研究代表者
小須田　雅(KOSUDA　MASASI)
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：40291554
(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし