

琉球大学学術リポジトリ

有限要素法による不完全合成桁の弾塑性解析

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2010-01-12 キーワード (Ja): キーワード (En): Composite Beam, Elastic-Plastic Analysis, Load Factor Design, Initial Strain Method, Partial Composite Beam 作成者: 有住, 康則, 筑瀬, 明弘, 浜田, 純夫, 梶田, 建夫, Arizumi, Yasunori, Chikuse, Akihiro, Hamada, Sumio, Kajita, Tateo メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/14690

有限要素法による不完全合成桁の弾塑性解析

有住康則 筑瀬明弘** 浜田純夫*** 梶田建夫****

**Elastic-Plastic Analysis of Composite Beams with Incomplete
Interaction by the Finite Element Method**

by

Yasunori ARIZUMI, Akihiro CHIKUSE, Sumio HAMADA,
and Tateo KAJITA

Summary

Recently the load factor method has been taking the place of the allowable stress method for composite members in the United States and European countries. It is the most important in the load factor design method to assure the mechanical behavior such as ultimate capacity of the structure. Ultimate strength is based on the properties of steel, concrete and shear connectors. In the present study some discussions on ultimate states are provided for composite beams with incomplete interaction applying elastic-plastic analysis.

Some studies on the elastic analysis for incomplete composite beams have been presented in the bulletin by authors, and this is developed to inelastic analysis based on bilinear elasto-plastic properties of concrete, steel and shear connectors by means of the finite element method. An iterative initial strain method is employed in the present analytical procedure, where inelastic strains and deformations of materials are evaluated to the equivalent loads. This is also applied to analysis of cracked reinforced concrete beams.

The main results of the analysis are as follows;

- (1) There is not much difference in the mechanical behavior of composite beams with shear connectors between spaced equally and spaced proportionally to horizontal shear.
- (2) Composite beams with partial interaction have an advantage of stress reduction on longitudinal reinforcing bars in negative moment regions, where it

受付：1980年4月30日

□本論文の内容の一部については日本鋼構造協会第13回大会研究集会において発表した。

* 琉球大学工学部建設工学科

** 八千代エンジニアリング

*** 琉球大学工学部土木工学科

**** 名古屋大学工学部土木工学科

may be near the point of counterflexion. This tendency becomes more apparent along with extent of the plastic range.

Key Words ; Composite Beam, Elastic-Plastic Analysis, Load Factor Design, Initial Strain Method, Partial Composite Beam

1. まえがき

近年、アメリカ、イギリス、および西ドイツ等において、設計法が許容応力度設計法から荷重係数設計法あるいは限界状態設計法に移行されつつある。^{1)~4)}荷重係数設計法、限界状態設計法、あるいは塑性設計法を設計に導入する場合は、終局状態の構造物の安全性および安定性等力学的挙動を明らかにする必要がある。特に、合成桁のように、コンクリートスラブ、鋼桁、およびジベルのような異種材料からなる複合構造物においては、それぞれの材料の性質が構造物の終局耐力におよぼす影響を明らかにしなければならない。このようなことから、この研究では、コンクリートスラブと鋼桁の接合面にズレが生じる不完全合成桁の弾塑性解析を行い、このような構造物の終局状態について考察を行った。

不完全合成桁については、最初 Newmark⁵⁾によって研究されて以来、弾性挙動に関しては、Hoischen,⁶⁾ Heiling,⁷⁾ Homberg,⁸⁾ Plum,⁹⁾ 山本,¹⁰⁾ および橋¹¹⁾らが Newmark と同じ考えで解析しており、また、Matlock,¹²⁾ Gustofson,¹³⁾ Moffatt,¹⁴⁾ Ansourian,¹⁵⁾ および著者¹⁶⁾¹⁷⁾らが有限要素法を用いて解析している。一方、弾塑性挙動に関して、Dai,¹⁸⁾ Hamada,¹⁹⁾ および前田²⁰⁾²¹⁾らは、接合面のズレを考慮して差分法により解析を行っている。また、Yam²²⁾²³⁾らは基本的には Newmark と同じ方程式を用い、予測子-修正子法により解析を行っており、Ansourian²⁴⁾らは、ジベルのカーズレ関係を多項式で仮定し、断面での力のつり合いを求め、これにより解析を行っている。

有限要素法を用いた合成桁の弾塑性解析については、佐藤²⁵⁾および Wegmuller²⁶⁾²⁷⁾らの研究がある。佐藤らは、ジベルの変形による合成桁の剛度の低下をコンクリートスラブの弾性係数を低減したものに置き換えて、平面三角形要素を用いて解析しており、また、Wegmullerらは、積層要素を用い、コンクリートスラブのひび割れを考慮して多主桁橋の解析を行っている。しかし、Wegmullerの解析では接合面のズレは考慮されていない。一方、梶原²⁸⁾らは、平面三角形要素を用い

て複合構造物の弾塑性解析を行っている。それらの二次元および三次元的な有限要素解析は、腹板の応力状態を忠実に表わすことができるとか、Floor System 等への解析に適用できるなどの利点があるが、単純に一本の合成桁を対象として、その非線形挙動を得ようとするような場合には、その手法や計算時間等に対して最適なモデルとは思われない。

著者らはすでに、負の曲げモーメント域におけるコンクリートスラブの引張りの影響を等価な力に置き換える連続合成桁の解析法を示している。¹⁶⁾本研究では、これと同様な有限要素モデルを用いて、コンクリート、鋼材、およびジベルの材料非線形性を考慮できる単純な有限要素解析法を示す。また、鉄筋コンクリート（以下 RC と称す）ばりの厚さ方向のひび割れの進展を考慮した解析法を提案し、これを不完全合成桁の解析に適用した。ここで用いた非線形解析手法は、コンクリートスラブのひび割れおよび塑性進展、鋼桁の塑性進展、およびジベルのカーズレ関係の非線形性の影響をすべて初期ひずみの項として取り扱う反復初期ひずみ法である。

この解析法を用いて、RC 単純ばり、単純合成桁および 2 スパン連続合成桁について解析し、すでに得られている実験結果と比較して、この解析法が実験結果の挙動をよく示していることを確認した。また、ジベルの配置法の異なる単純合成桁、2 スパン連続合成桁について解析を行い、ジベルの配置法の違いによる合成桁の弾塑性挙動への影響について比較検討した。

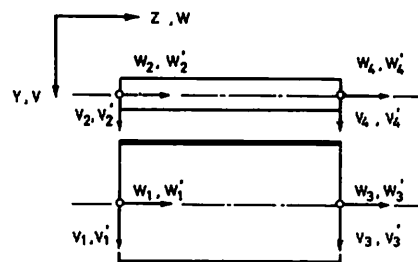


Fig. 1 Nodal Displacement for an Incomplete Composite Beam Element

2. 解析法

ここで対象としたのは、コンクリートスラブと鋼桁の接合面にズレが生じる不完全合成桁であり、Fig. 1に示すように、コンクリートスラブと鋼桁をそれぞれ軸力と曲げを受けるはり要素で、ジベルをコンクリートスラブと鋼桁の接合面に働く水平せん断力のみに抵抗するスプリング要素でモデル化している。解析には、Armen²⁹⁾らによって用いられたはりの塑性進展を考慮した要素を用いた。この他に、ここではコンクリートスラブのひび割れによる剛性の低下の影響、鉄筋の

弾塑性、およびジベルのカーズレ関係の非線形性が考慮できる式を誘導し用いている。この論文における非線形解析は、塑性およびコンクリートスラブのひび割れの影響等を初期ひずみの項として置き換え、反復初期ひずみ法によって行った。

(1) 仮定

この解析に用いた基礎的仮定は次のとおりである。

(a) ひずみは、要素内の厚さ方向に線形に変化しているものとし、ひび割れが生じてもお平面保持の法則が成立するものとする。

(b) 鋼材の応力-ひずみ関係は、Fig.2(a)に示すよ

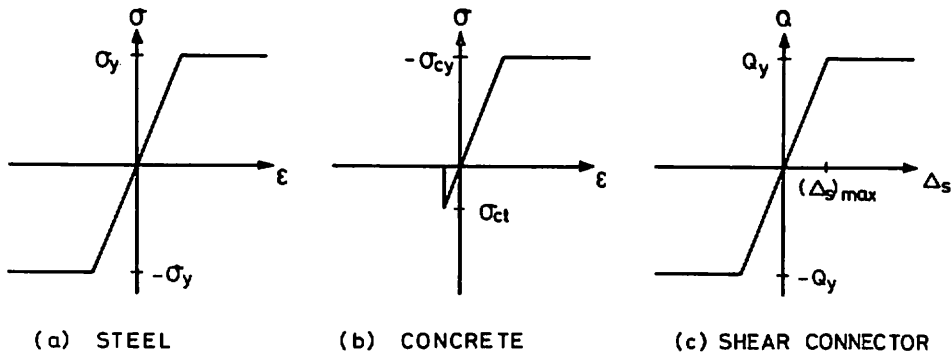


Fig. 2 Assumed Stress-Strain Diagrams for Steel and Concrete, and Load-Slip Diagram for Shear Connectors

うに、引張および圧縮側とも完全弾塑性体とし、ひずみ硬化はないものとする。

(c) コンクリートの応力-ひずみ関係は、Fig. 2(b)に示すように、圧縮側は完全弾塑性体とする。引張側は、引張限度までは弾性とし、それ以後の荷重の増分に対してはひび割れが生じ、その領域のコンクリートは引張りに抵抗できないものとする。

(d) ずれ止めのカーズレ関係は、Fig. 2(c)に示すように bilinear で表示し、弾性限の力 Q_y および弾性の最大ズレ $(\Delta_s)_{max}$ は、実験結果との比較により数値実験的に求めるものとする。なお、コンクリートスラブと鋼桁の間の付着および摩擦の影響は無視する。

(e) コンクリートスラブと鋼桁の間の浮き上がりはないものとし、コンクリートスラブと鋼桁の同一鉛直上のたわみおよびたわみ角は等しいものとする。

(2) はり要素の塑性による初期ひずみマトリックス

仮想仕事の原理によれば、応力テンソルを σ_{ij} 、ひずみテンソルを ϵ_{ij} 、変位を u_i 、単位面積当りの力を P_i とすれば、つり合い方程式は、

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S P_i \delta u_i ds \quad (1)$$

となり、また、応力が弾性限度を越え、塑性状態に達した後の全ひずみ ϵ_{ij}^T は、弾性成分 ϵ_{ij}^e と塑性成分 ϵ_{ij}^p とから成り、つぎのように示される。

$$\epsilon_{ij}^T = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (2)$$

はり要素は一次元の要素であるので、応力およびひずみは橋軸方向 (z 方向) のみを考えるとよい。ひずみ ϵ_z^T は、軸方向変位 (w) および曲げによる変位 (v) を用いて、つぎのように与えられる。

$$\epsilon_z^T = (dw/dz) - (d^2 v/dz^2) y \quad (3)$$

一方、要素の一部が塑性に達した場合、塑性領域内の塑性ひずみの分布は、要素内において線形に変化しているものと仮定する。つまり、Fig. 3に示すように各節点における上下面の塑性ひずみの値 ϵ_{ij}^p 、 ϵ_{ij}^p 、 ϵ_{ij}^p 、

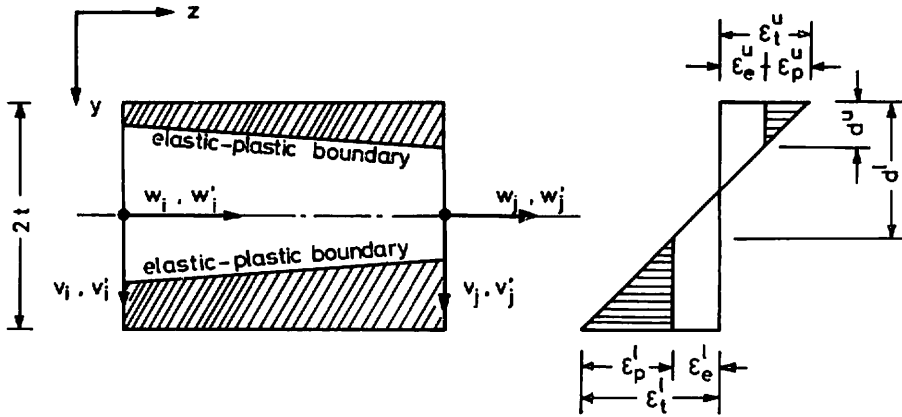


Fig. 3 Typical Elastic-Plastic Beam Element

ϵ_{pi}^u を用い、上面の塑性領域において、塑性ひずみ ϵ_p^u は、

$$\epsilon_p^u(y, z) = \{ \epsilon_{pi}^u (1 - \beta) + \epsilon_{pi}^u \beta \}$$

$$(d'' - t - y) / d'' \quad (4 - a)$$

下面の塑性領域において、塑性ひずみ ϵ_{pj}^l は、

$$\epsilon_p^l(y, z) = \{ \epsilon_{pi}^l (1 - \beta) + \epsilon_{pj}^l \beta \}$$

$$(t + y - d') / (2t - d') \quad (4 - b)$$

とする。ここで、 $2t$ は要素の厚さであり、 $\beta = z/l$ である。また、 d'' 、 d' はそれぞれ上面から弾塑性の境界面までの距離であり、つぎのように与えられる。

$$d''(z) = d''(1 - \beta) + d''\beta \quad (5 - a)$$

$$d'(z) = d'(1 - \beta) + d'\beta \quad (5 - b)$$

また、はり要素の塑性ひずみベクトル $\{\epsilon_p\}$ は、つぎのように与えられる。

$$\{\epsilon_p\} = \langle \epsilon_{pi}^u, \epsilon_{pj}^u, \epsilon_{pi}^l, \epsilon_{pj}^l \rangle^T \quad (6)$$

不完全合成桁においては、ジベルによって伝達された水平せん断力によって、コンクリートスラブと鋼桁に作用する軸力は要素内において複雑に変化し、軸方向変位も重要な要素となる。したがって、ここでは軸方向変位 $w(z)$ および曲げによる変位 $v(z)$ をそれぞれ三次多項式で仮定する。Fig. 1 に示すように、各節点で軸方向変位 w_i と軸ひずみ w'_i 、およびたわみ v_i とたわみ角 v'_i を未知数とすると、変位 $w(z)$ 、 $v(z)$ は、つぎのように示される。

$$w(z) = w_i g_1 + w'_i g_2 + w_j g_3 + w'_j g_4 \quad (7 - a)$$

$$v(z) = v_i g_1 + v'_i g_2 + v_j g_3 + v'_j g_4 \quad (7 - b)$$

ここで、 g_{1-4} はつぎに示す形状関数である。

$$g_1 = 2\beta^3 - 3\beta^2 + 1 \quad g_2 = (\beta^3 - 2\beta^2 + \beta) l$$

$$g_3 = -2\beta^3 + 3\beta^2 \quad g_4 = (\beta^3 - \beta^2) l \quad (8)$$

一方、はり要素の変位ベクトル $\{u\}$ はつぎのようになる。

$$\{u\} = \langle w_i, w'_i, v_i, v'_i, w_j, w'_j, v_j, v'_j \rangle^T \quad (9)$$

以上の結果を用いると、はり要素の内部仮想仕事 δU_b は、

$$\delta U_b = \int_V \sigma_z \delta \epsilon_z^T dv = E \int_V \epsilon_z^T \delta \epsilon_z^T dv$$

$$- E \int_{Vp} \epsilon_p^T \delta \epsilon_p^T dv_p$$

$$= \left\{ EA \int_0^l w' \delta w' dz + EI \int_0^l v'' \delta v'' dz \right\}$$

$$- \left\{ Eb \int_{d'-t}^t \int_0^l \epsilon_p^l (\delta w' - y \delta v'') dy dz \right.$$

$$\left. - Eb \int_{-t}^{t+d''} \int_0^l \epsilon_p^u (\delta w' - y \delta v'') dy dz \right\} \quad (10 - a)$$

となる。式 (10-a) をマトリックス表示するとつぎのようになる。

$$\delta U_b = \{\delta u\}^T [K_b] \{u\} - \{\delta u\}^T [K_p^*] \{\epsilon_p\} \quad (10 - b)$$

ここで、 $[K_b]$ 、 $[K_p^*]$ はそれぞれはり要素の剛性マトリックスおよび初期ひずみマトリックスである。 $[K_p^*]$ を付録に示す。

一方、外力による仮想仕事は、 y 方向に分布荷重 q_y および β_{y_i} ($i = 1, \dots, n$) 点に集中荷重 P_{y_i} が作用し、 z 方向に分布荷重 q_z および β_{z_i} ($i = 1, \dots, n$) 点に集中荷重 P_{z_i} が作用していると、

$$\delta W = \int_l q_y \delta v dz + \int_l q_z \delta w dz + \sum_{i=1}^n P_{y_i} \delta v_i + \sum_{i=1}^n P_{z_i} \delta w_i = \{ \delta u \}^T \{ P \} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\{ P \}$ は荷重項である。

はり要素の場合と同様に鉄筋の塑性状態も考慮することができる。Fig. 4 に示すように RC ばりの重心軸から距離 d_i ($i = 1, \dots, n$) の深さに断面積 A_i^r の鉄筋が集中的に配置されているものとする。鉄筋が降伏に入った後の鉄筋の塑性ひずみの分布をはり要素と同様につぎのように仮定する。

$$(\epsilon_p^r)_i = (\epsilon_p^r)_i (1 - \beta) + (\epsilon_p^r)_i \beta \quad (12)$$

したがって、鉄筋要素の内部仮想仕事は、

$$\begin{aligned} \delta U_r &= \int_v \sigma_z \delta \epsilon_z dv = E_s \int_v \epsilon_z^T \delta \epsilon_z^T dv - E_s \int_{v_p} \epsilon_z^p \delta \epsilon_z^T dv_p \\ &= \sum_{i=1}^n \left[E_s A_i^r \int_0^l w' \delta w' dz - E_s A_i^r d_i \int_0^l (w' \delta v'' + v'' \delta w') dz + E_s A_i^r d_i^2 \int_0^l v'' \delta v'' dz \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[E_s A_i^r \int_0^l (\epsilon_p^r)_i \delta w' dz - E_s A_i^r d_i \int_0^l (\epsilon_p^r)_i \delta v'' dz \right] \\ &= \{ \delta u \}^T [K_r] \{ u \} - \{ \delta u \}^T [K_p^*] \{ \epsilon_p^r \} \quad (13) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $[K_r]$ 、 $[K_p^*]$ は、それぞれ鉄筋要素

の剛性マトリックスおよび塑性による初期ひずみマトリックスである。また、 $\{ \epsilon_p^r \}$ は鉄筋の塑性ひずみベクトルであり、つぎのように示される。

$$\{ \epsilon_p^r \} = \langle (\epsilon_{p_i}^r)_1, (\epsilon_{p_j}^r)_1, \dots, (\epsilon_{p_i}^r)_n, (\epsilon_{p_j}^r)_n \rangle^T \quad (14)$$

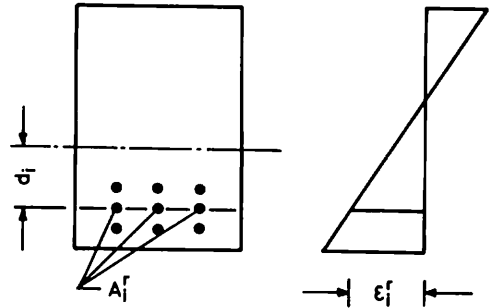


Fig. 4 Cross Section of Reinforced Concrete Beams

(3) コンクリートスラブのひび割れによる剛性の低下

コンクリートは、ある引張限度以上の外力には抵抗できず、ひび割れが生じる。コンクリートスラブにひび割れが生じると、要素内に不釣り合い力が生じ、ひび割れは急激に進展すると考えられる。有限要素法を用いたコンクリートばりのひび割れ解析については、Scordelies³⁰⁾の研究以来多くの研究報告がある。^{31)~34)} それらの研究の多くは二次元の平面要素を用いて解析を行っている。著者らは不完全連続合成桁の解析において、負の曲げを受ける区間のコンクリートスラブ要素の剛性を低下させる解析法を示したが、この研究では、厚さ方向のひび割れを考慮できる解析法を示す。

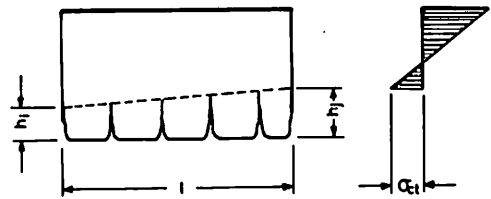


Fig. 5 Analytical Model of Crack for Reinforced Concrete Beams

すなわち、引張限度以上のひずみが生じている領域はすべてひび割れが発生しているものとみなし、その領域の剛性を低下させ、この剛性の低下を初期ひずみの項として取り扱った。なお、ここで考慮したひび割れとは、曲げによるひび割れであり、せん断による斜めひび割れについては考慮していない。

Fig. 5 に示すように、コンクリートスラブ要素の節点 i, j に深さ h_1, h_2 の曲げひび割れが生じて、要素内の任意点におけるひび割れの深さを要素内で線形に変化していると仮定すると、任意点のひび割れ深さ $h(z)$ はつぎのようになる。

$$h(z) = h_1(1-\beta) + h_2\beta \quad (15)$$

ひび割れの発生している領域においてコンクリートは引張り力に抵抗できないものとする、コンクリートスラブの内部仮想仕事 δU_c は、

$$\begin{aligned} \delta U_c &= \int_0^l \int_0^b \int_{-t}^{t-h(z)} \sigma_z \delta \epsilon_z dy dx dz \\ &= \int_0^l \int_0^b \int_{-t}^t \sigma_z \delta \epsilon_z dy dx dz \\ &\quad - \int_0^l \int_0^b \int_{t-h(z)}^t \sigma_z \delta \epsilon_z dy dx dz \\ &= \overline{\delta U_c} - \overline{\delta U_c^*} \end{aligned} \quad (16)$$

と得られ。ここで、 $\overline{\delta U_c}$ はコンクリートスラブが全断面有効とした場合の内部仮想仕事であり、 $\overline{\delta U_c^*}$ はひび割れ発生による低減内部仮想仕事である。コンクリートスラブ要素全域にひび割れが生じた場合のコンクリートスラブの内部仮想仕事は $\delta U_c = 0$ となる。コンクリートスラブのひび割れによる低減内部仮想仕事 $\overline{\delta U_c^*}$ はつぎのようにマトリックス表示できる。

$$\begin{aligned} \overline{\delta U_c^*} &= \int_0^l \int_0^b \int_{t-h(z)}^t \sigma_z \delta \epsilon_z dy dx dz \\ &= E_c \left\{ \int_0^l A(z) w' \delta w' dz - \int_0^l G(z) \right. \\ &\quad \left. (w' \delta v'' + v'' \delta w') dz + \int_0^l I(z) v'' \delta v'' dz \right\} \\ &= \{\delta u\}^T [K_{crack}] \{u\} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $A(z), G(z)$ および $I(z)$ はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} A(z) &= \int_0^b \int_{t-h(z)}^t dy dx = b \{ h_1(1-\beta) + h_2\beta \} \\ G(z) &= \int_0^b \int_{t-h(z)}^t y dy dx = b \{ t^2 - (t-h(z))^2 \} / 2 \\ I(z) &= \int_0^b \int_{t-h(z)}^t y^2 dy dx = b \{ t^3 - (t-h(z))^3 \} / 3 \end{aligned} \quad (18)$$

なお、 $[K_{crack}]$ は付録に示す。

(4) ジベル要素の初期ひずみマトリックス

ジベルのカーブ曲線を Fig. 2(c) のように完全弾塑性体と仮定すると、ズレが弾性限度を越えた場合、ズレ Δ_s は、弾性成分のズレ Δ_s^e と塑性成分のズレ Δ_s^p を用いてつぎのように表わせる。

$$\Delta_s = \Delta_s^e + \Delta_s^p \quad (19)$$

ここで、塑性ズレ Δ_s^p を要素内において橋軸方向に線形に変化していると仮定すると、

$$\Delta_s^p = \Delta_s^p(1-\beta) + \Delta_s^p\beta \quad (20)$$

となる。一方、合成桁を Fig. 1 のように、コンクリートスラブと鋼桁をそれぞれ軸力と曲げを受けるはり要素とし、ジベルを接合面の水平せん断力のみ抵抗するスプリング要素にモデル化すると、ズレ Δ_s は、コンクリートスラブと鋼桁の軸方向変位 w_c と w_s 、およびたわみ角 v' を用いてつぎのように与えられる。¹⁶⁾

$$\Delta_s = w_s - w_c + v' \bar{y} \quad (21)$$

ここで、 \bar{y} はコンクリートスラブと鋼桁の重心間の距離である。したがって、ジベル要素の内部仮想仕事 δU_s は、ジベルに作用する力を Q 、単位長さ当りのジベル剛性を q_s とすると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \delta U_s &= \int_0^l Q \delta \Delta_s dz = \int_0^l q_s \Delta_s \delta \Delta_s dz \\ &\quad - \int_0^l q_s \Delta_s^p \delta \Delta_s dz \end{aligned} \quad (22)$$

式(7), (20)を式(22)に代入すると, ジベル要素の内部仮想仕事はつぎのようにマトリックス素示できる。

$$\delta U_s = \{\delta \bar{u}\}^T [K_s] \{\bar{u}\} = \{\delta \bar{u}\}^T [K_s^*] \{\Delta_s^p\} \quad (23)$$

ここで, $[K_s]$ はジベル要素の剛性マトリックスであり, $[K_s^*]$ はジベル要素の塑性による初期ひずみマトリックスである。 $[K_s^*]$ を付録に示す。また, $\{\bar{u}\}$, $\{\Delta_s^p\}$ は, 不完全合成桁要素の変位ベクトルおよびジベル要素の塑性変位ベクトルであり, 次式で与えられる。

$$\{\bar{u}\} = \langle w_1, w_1', v_1, v_1', w_2, w_2', w_3, w_3', v_3, v_3', w_4, w_4' \rangle^T \quad (24)$$

$$\{\Delta_s^p\} = \langle \Delta_s^p, \Delta_s^p \rangle^T \quad (25)$$

(5) 解析手順

以上示したように, コンクリートスラブおよび鋼桁

の塑性, 鉄筋の塑性, ジベルの非線形, およびコンクリートスラブのひび割れによる剛性の低下の影響を初期ひずみの項として取り扱い, 反復法によって計算を行う。反復初期ひずみ法におけるつり合い方程式は次式のようなになる。

$$[K] \{u\}^i = \{P_0\} + \{P\}^{i-1} \quad (26)$$

ここで, $\{P\}^{i-1}$ は初期ひずみによる修正荷重項である。式(26)において, 一度前進消去を行えば, 後は各反復段階で修正荷重項の計算を行い, 後退代入を行えばよい。計算手順を Fig 6 のフローチャートに示す。

不完全合成桁において修正荷重項は次式で示される。

$$\begin{aligned} \{P\}^{i-1} = & [K_b^*] \{\epsilon_b^p\}^{i-1} + [K_r^*] \{\epsilon_r^p\}^{i-1} \\ & + [K_{crack}] \{\bar{u}\}^{i-1} + [K_s^*] \{\Delta_p\}^{i-1} \quad (27) \end{aligned}$$

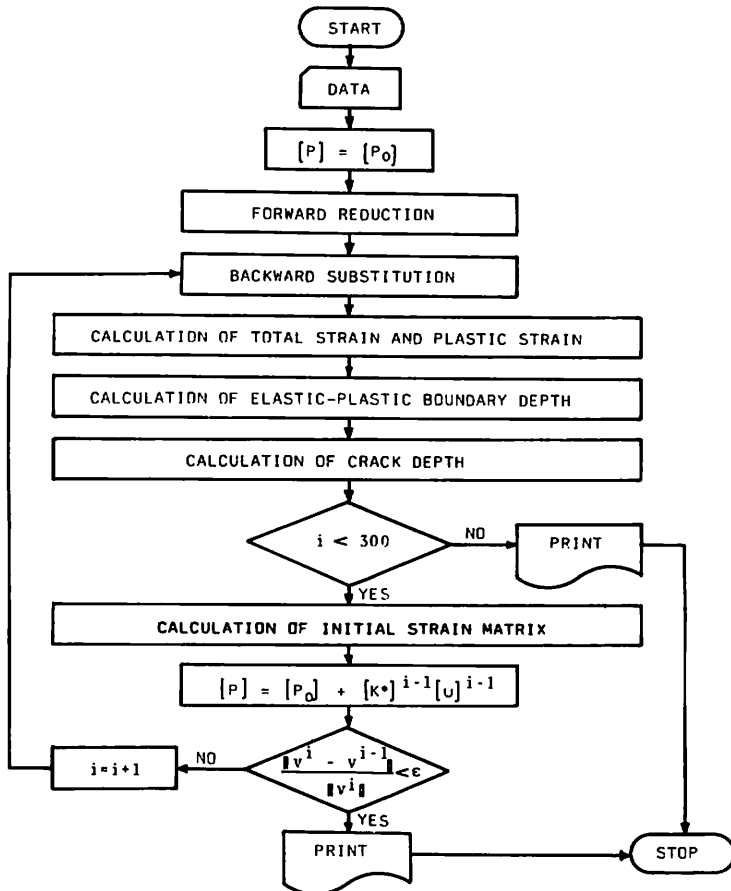


Fig. 6 Flow Chart

3. 解析結果および考察

ここでは、RC 単純ばり、単純合成桁および連続合成桁について解析を行った。解析の際の分割数は、単純ばりについては15分割、連続ばりについては20~24分割とし、ひび割れおよび塑性の進展が予測される付近を細かく分割した。なお、桁および荷重の対称性を考慮して桁の半分について計算を行った。一方、反復計算における収束の判定は、各反復段階のたわみについてノルムで誤差を計算し、この誤差が許容値より小さいかどうかで行った。誤差 e は次式で与えられる。

$$e = \|v^i - v^{i-1}\| / \|v^i\| \quad (28)$$

なお、誤差 e の許容値として 1.0×10^{-4} を用いた。ま

た、収束に際しては各部材力を計算し、つり合いが満足されていることを確認した。計算における反復回数は、桁の種類および各荷重段階によって異なるが、RC ばりの場合およそ20回前後、合成桁の場合は100回前後であった。また、反復回数が300回を越えても収束条件が満足されない場合は計算を打ち切った。その場合の合成桁のコンクリートの圧縮ひずみは0.003を越えており、ACI で提案されているように破壊とみなした。

(1) 実験結果との比較

RC 単純ばり、単純合成桁および2スパン連続合成桁について、他で行われた実験結果と著者らの解析結果との比較を行った。比較に用いた桁の断面および材料の諸量を Table-1 に示す。

Losh²⁹⁾らによって行われた RC 単純ばりの曲げ試験

Table 1 Summary of Section and Material Properties

(a) Section Properties

	SPAN	CONCRETE		STEEL	SHEAR CONNECTOR	
		WIDTH	THICKNESS		NUMBER	DIMENSION
CASE A	10 ft.	4.0 in.	8.0 in.	—	—	—
CASE B	18 ft.	48.0 in.	6.0 in.	12in.×6in.×44lb.	100	(1/2)"×2"
CASE C	2×11 ft.	24.0 in.	2.375 in.	6in.×3in.×121b.	46	(3/8)"×2"

(b) Material Properties

	CONCRETE			STEEL	
	YOUNG'S MODULUS E_c	COMPRESSIVE STRESS σ_c	SPLITTING TENSILE STRESS σ_{ct}	YOUNG'S MODULUS E_s	YIELD STRESS σ_y
CASE A	3.0×10^3 (ksi)	4.0(ksi)	0.4(ksi)	3.0×10^4 (ksi)	60(ksi)
CASE B	1330(ton/sq.in)	7250(psi)	725(psi)	13300(ton/sq.in)	17.2(ton/sq.in)
CASE C	1787(ton/sq.in)	6900(psi)	690(psi)	13400(ton/sq.in)	19.5(ton/sq.in)

CASE A : Reinforced Concrete Beams

CASE B : Simply Supported Composite Beams

CASE C : 2-Span Continuous Composite Beams

結果と解析結果との比較を荷重-たわみ曲線について Fig. 7 に示す。図には、鉄筋断面積が 0.4 in^2 ($p=1.25\%$) と 0.2 in^2 ($p=0.625\%$) の二通り示したが、著者らのひび割れの解析結果は比較的良好に実験値と一致している。しかしながら、鉄筋量が少ない場合は計算結果の剛性が低い。これは、著者らの方法では、ひび割れ発生領域の応力をすべて解除しているため、多少桁剛性の過小評価となるものと思われる。したがって、鉄筋量が少ない場合は、残留応力の概念を導入して除々に応力を逡減させることも必要であると考えられる。しかし、鉄

筋量が比較的多い場合や合成桁の一部としてのコンクリートスラブのひび割れの解析としては、著者らの解析法は有効であると思われる。

不完全合成桁の解析では、ジベルのカーズル曲線を bilinear で仮定し、弾性限の力 Q_y および弾性最大ズレ $(\Delta s)_{\max}$ は、実験結果との比較により数値実験的に求めた。Fig. 8 に示すように、Chapman²⁶⁾らによって行われた $1/2$ 径スタッドジベルの押し抜き試験の結果より、5つのカーズル曲線 (Na 1~Na 5) を仮定し、それぞれの仮定を用いて、単純合成桁について解

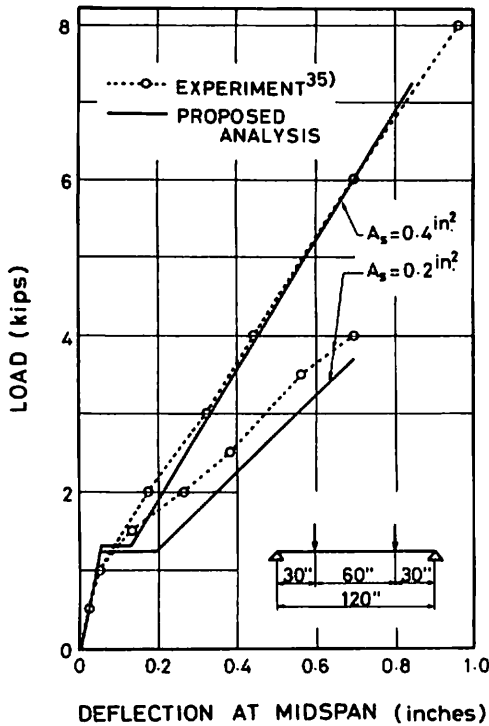


Fig. 7 Load-Deflection Relationships for Reinforced Concrete Beams

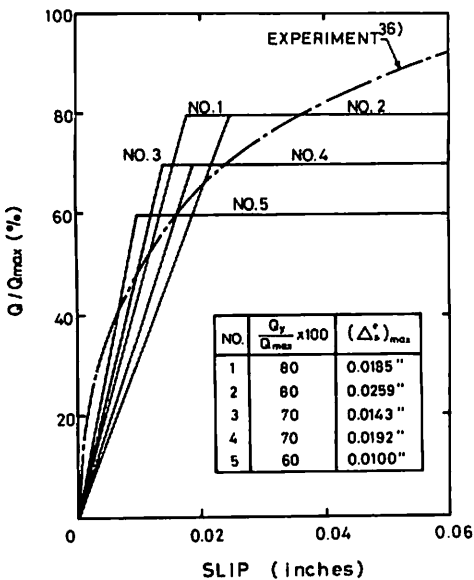


Fig. 8 Assumed Load-Slip Diagrams for Shear Connector

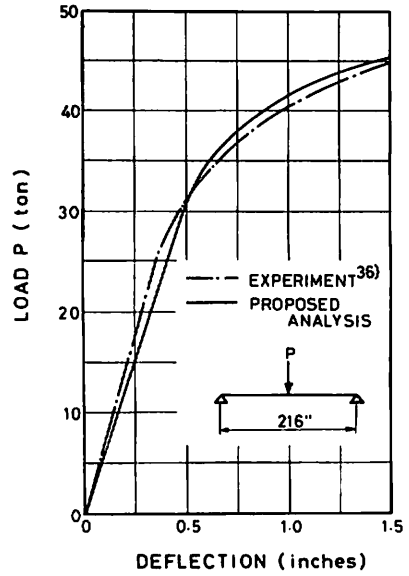


Fig. 9 Load-Deflection Relationships for Simply Supported Composite Beams

析を行った。Fig. 9 に荷重—たわみ曲線について実験値と解析結果との比較を示す。図から明らかなように、解析結果は実験結果と比較的よく一致している。なお、たわみについては、ジベルのカーズレ曲線の仮定の相違による差はほとんど見られなかった。

Fig.10 に荷重が40tonおよび45tonの場合のスパン方向のズレ分布をNo.1～No.5の仮定について示す。この図からは、5つの仮定の内No.3の仮定が実験結果の性状をよく示していると思われる。ズレのピークが実験値と異なるのは、カーズレ曲線を bilinear で仮定しているためと考えられる。また、実験結果は支点上で小さな値になっているが、これは試験桁にジベルが配置された張り出し部がある影響であり³⁴⁾また、コンクリートスラブと鋼桁の間の浮き上がりによる影響も多少あると思われる。しかし、コンクリートスラブと鋼桁の間の浮き上がりに対する実験的な検証はあまりなく、その影響を計算に含めることは難しい。No.3の仮定のみを用いた解析結果を Fig. 11 に示す。図から明らかなように、No.3の仮定は、極限状態に近い荷重段階においてはよくズレ分布を把握するものの、荷重段階が小さい場合は多少ジベル剛性の評価が小さいものと思われる。しかし、本解析は不完全合成桁の弾塑性解析をおもな目的としているので、この仮定を用いてもよいものとする。

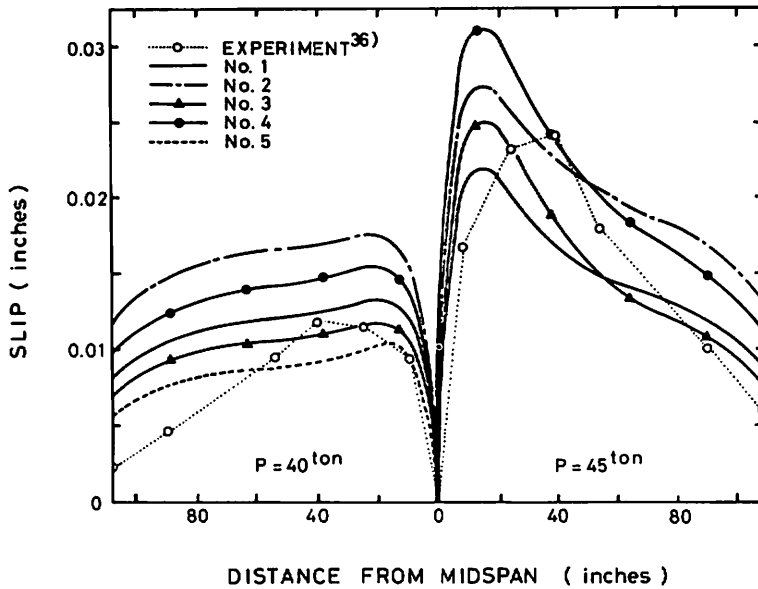


Fig. 10 Slip Distribution

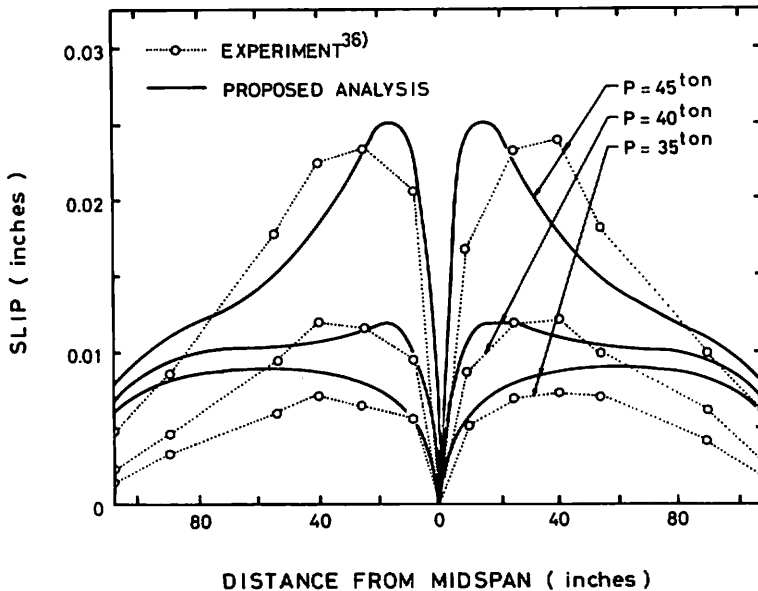


Fig. 11 Slip Distribution

一方、径の違うスタッドジベルについてもこれと似たようなカーブ曲線が得られることが知られているので、他の径のスタッドジベルについても $\frac{1}{2}$ in 径スタッドジベルと同様な仮定を用いることができると思われる。すなわち、Fig. 2 (C) に示すように弾性限の力 Q_y を最大荷重の70%に取り、弾性限の最大ズレ $(\Delta s)_{\max}$ を、最大

荷重の70%に対応するズレの60%を用い bilinear で表示する。この仮定を用いると、一般に多く用いられている $\frac{3}{4} \times 4$ in. スタッドジベルについては、Mainstone³⁷⁾ の実験結果より、 $Q_y = 7.5 \text{ ton}$ 、 $(\Delta s)_{\max} = 0.014 \text{ in.}$ となる。

Fig. 12 に Teraszkiewicz (Yam²⁹⁾ による 2

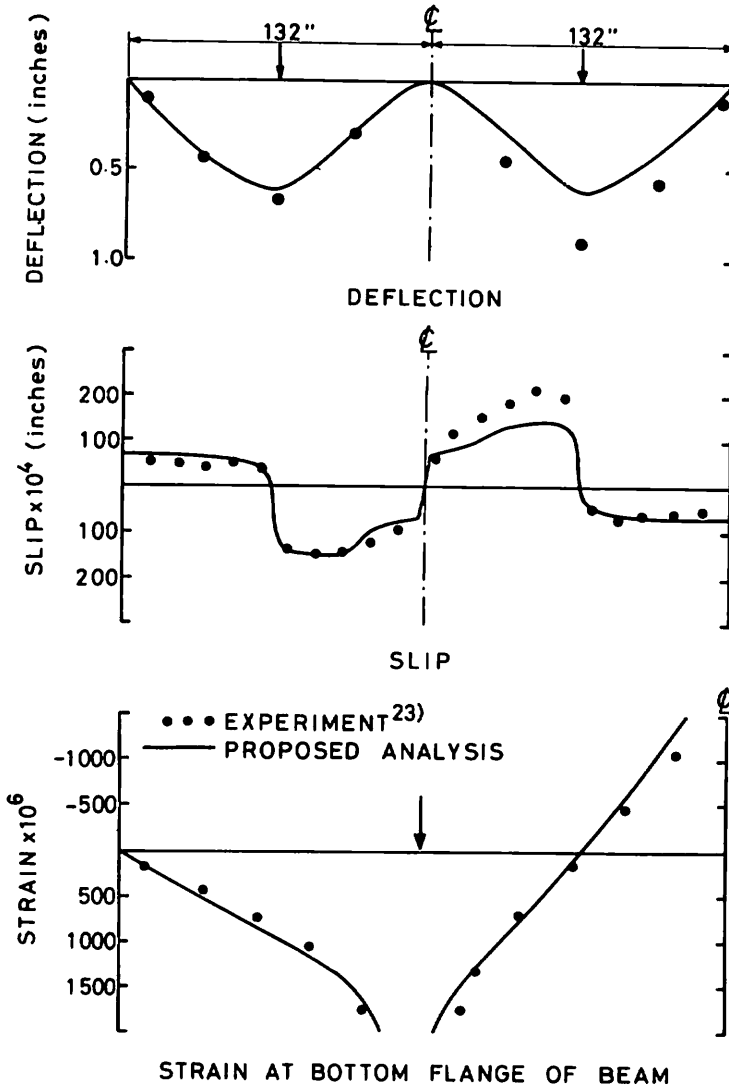


Fig. 12 Longitudinal Deflection, Slip and Strain at Lower Flange Profile ($P=12.2$ ton, $P_u=14.0$ ton)

スパン連続合成桁の実験結果と著者らの解析結果との比較を示す。図には、終局荷重 ($P_u=14.0$ ton) に近い荷重 $P=12.2$ ton の場合について、たわみ、ズレ、および鋼桁下フランジのひずみ分布が示されている。ズレ分布 ($3/8 \times 2$ in. スタッドジベル) について見ると、解析結果は実験結果とよく一致しており、他の径のスタッドジベルについても $1/2$ in 径スタッドジベルと同様な力-ズレ曲線の仮定を用いてよいものとする。また、たわみおよび鋼桁下フランジのひずみ分布も、解析結果は実験結果と比較的によく一致しており、著者らの解析法は、連続合成桁の弾塑性挙動もよく把握できるものと思われる。

(2) 解析例

ジベル配置の異なる合成桁の弾塑性挙動を調べるため単純合成桁および2スパン連続合成桁について解析を行った。単純合成桁に対し、Fig. 13 に示すように、ジベルを桁全長にわたって等間隔に配置した桁 (MODEL-A) とジベルを支点上に多く、スパン中央に少なく三角形分布に配置した桁 (MODEL-B) を対象に、集中荷重および等分布荷重を載荷した場合について解析を行った。また、連続合成桁では、スパン全長にわたってジベルを等間隔に配置した桁 (MODEL-C) と中央支点付近の負の曲げモーメント域でジベルを配置しない、いわゆる断続合成桁 (MODEL-D) について

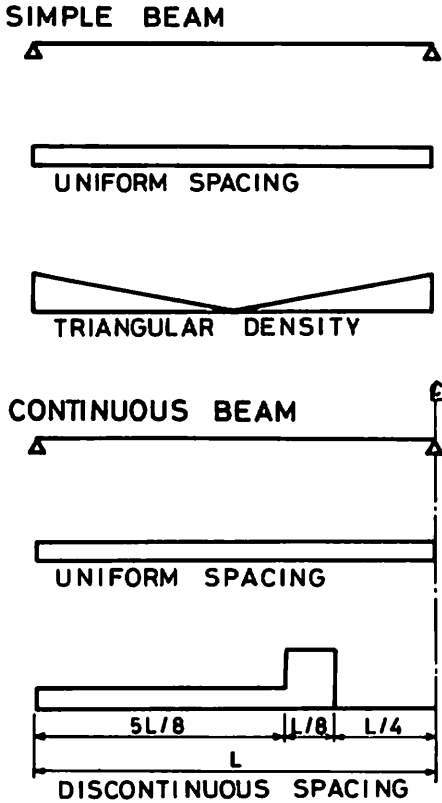


Fig. 13 Connector Density for Standard Composite Beams

て、桁中央に集中荷重が作用した場合について解析を行った。

Table 2 に解析に用いた桁の断面および材料の諸量を示す。

(a) 単純合成桁

Fig. 14,15 に集中荷重および等分布荷重を荷重した場合の荷重たわみ曲線を示す。これより、ジベル配置の違いによる桁剛性の差はさほど見られない。MODEL-A について、集中荷重および等分布荷重を受けた場合の塑性域の進展状況を Fig. 16 に示す。荷重された荷重の違いによって塑性域の広がりには差が見られる。この単純合成桁では、荷重が降伏荷重を越えて増加するにともなって、桁中央の鋼桁下フランジより塑性域が進展し、最後にコンクリートスラブが圧壊して桁は破壊すると考えられる。なお、MODEL-B の破壊形態についても MODEL-A と同様な結果であった。Fig. 17 に集中荷重 $p=60, 80, 100\text{ton}$ を受けた場合の軸力の分布を、Fig. 18 に等分布荷重 $q=48, 60\text{kg/cm}$ を受けた場合の軸力の分布を示す。図より、軸力についてモジベル配置の違いによる差はほとんど見られない。Fig. 19 および Fig. 20 に集中荷重および等分布荷重を受けた場合のズレ分布を示す。これから明らかのように、スパン中央の塑性域の進展によってズレが大きくなり、その影響は、スパン中央より多少離れた場所において顕著に現われる。現道路橋示方書³⁰⁾では、ジベルはせん断力に比例して配置するよう規定されてい

Table 2 Summary of Section and Material Properties

(a) Section Properties

	SPAN	CONCRETE		STEEL	SHEAR CONNECTOR			
		WIDTH	THICKNESS		NUMBER	DIMENSION	SPACING	
MODEL A	32m	250cm	20cm	Fig.Pl. 40×2.5	378	19×100	CONTINUOUS	
MODEL B	32m				378		TRIANGULAR	
MODEL C	2×32m				2×378		(mm)	CONTINUOUS
MODEL D	2×32m				2×378			DISCONTINUOUS

(b) Material Properties

CONCRETE			STEEL	
YOUNG'S MODULUS E_c	COMPRESSIVE STRESS σ_{cy}	SPLITTING TENSILE STRESS σ_{ct}	YOUNG'S MODULUS E_s	YIELD STRESS σ_y
2.1×10^4 (kg/cm ²)	300 (kg/cm ²)	30 (kg/cm ²)	2.1×10^6 (kg/cm ²)	2400 (kg/cm ²)

MODEL A and B : Simply Supported Composite Beams

MODEL C and D : 2-Span Continuous Composite Beams

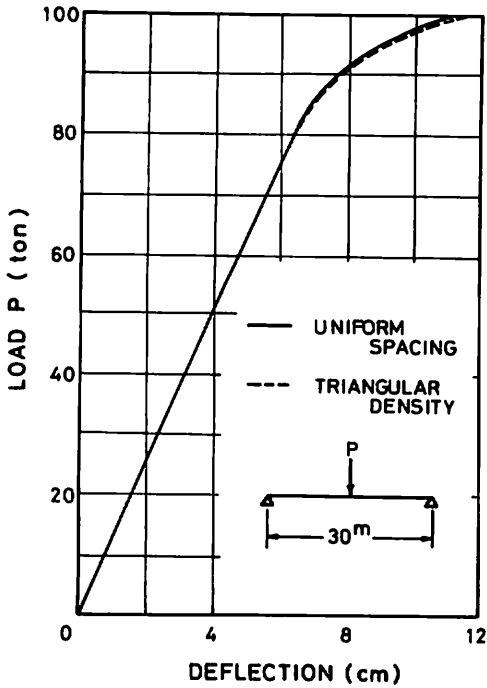


Fig. 14 Load-Deflection Relationships for MODEL A and MODEL B under Concentrated Load

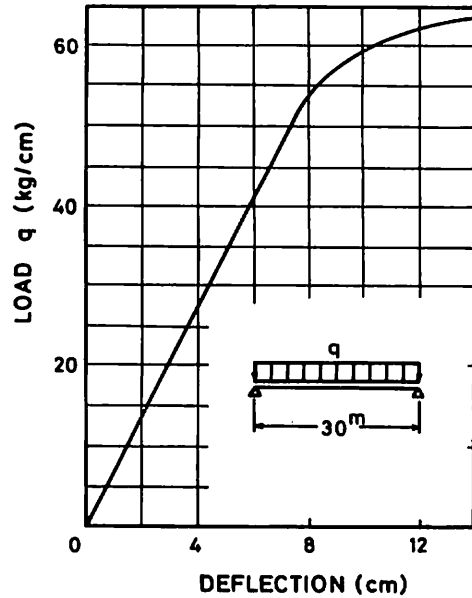


Fig. 15 Load-Deflection Relationship for MODEL A and MODEL B under Uniformly Distributed Load

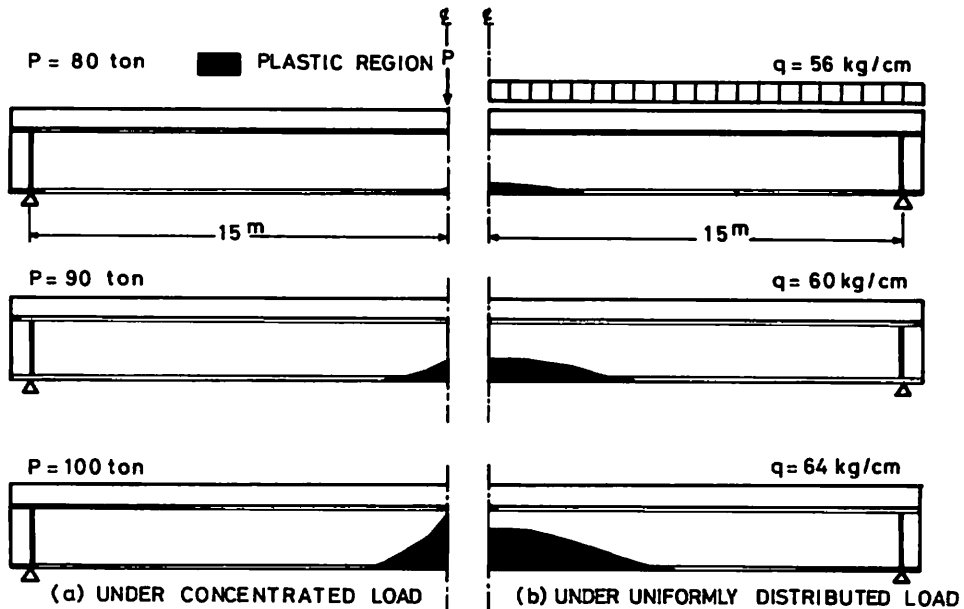


Fig. 16 Yield Progression for Simply Supported Composite Beams under Concentrated Load and Uniformly Distributed Load

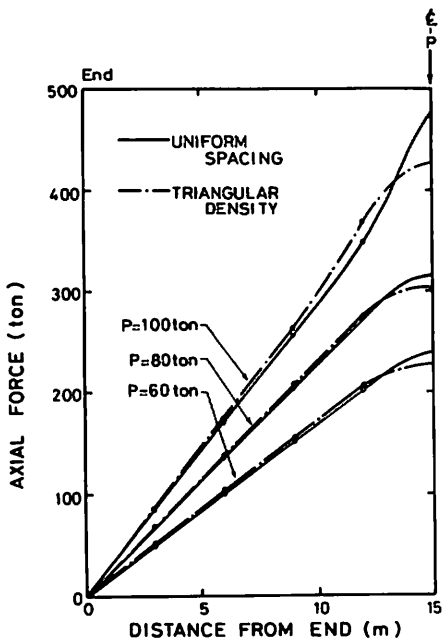


Fig. 17 Axial Force Diagrams for MODEL A and MODEL B under Concentrated Load

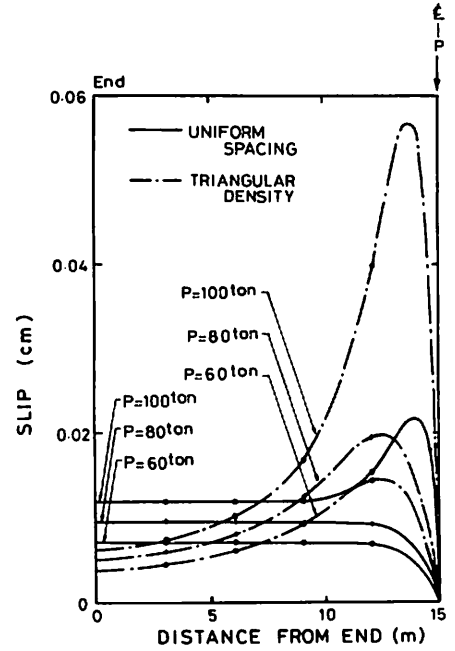


Fig. 19 Slip Diagrams under Concentrated Load

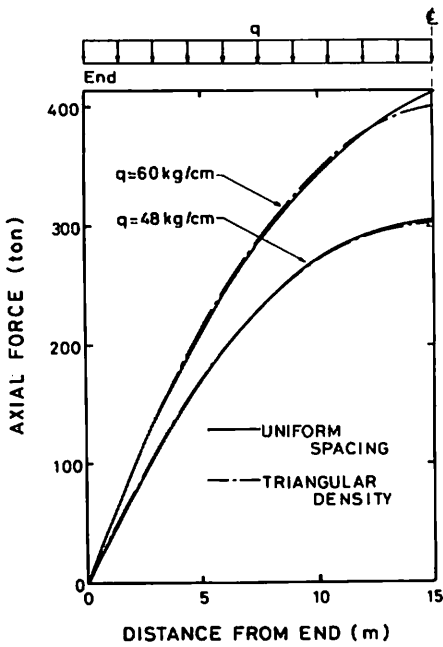


Fig. 18 Axial Force Diagrams for MODEL A and MODEL B under Uniformly Distributed Load

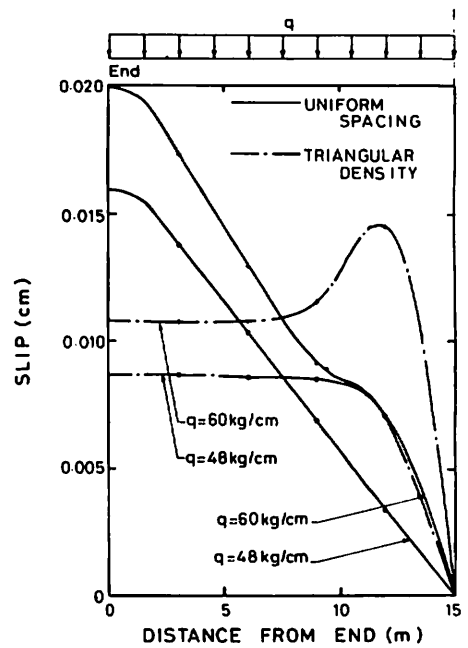


Fig. 20 Slip Diagrams under Uniformly Distributed Load

る。本計算例においても、最大ズレ量に着目するならば、塑性域の進展にかかわらず、集中荷重に対しては等分布配置が、等分布荷重については三角形配置というように、ジベルはせん断力に比例して配置した方が有利であると思われる。しかし、三角形配置については、塑性域の進展によるズレの局部的増加について配慮する必要があると考える。

(b) 連続合成桁

連続合成桁で問題となるのは、中間支点付近で負の曲げを受けることにより、コンクリートスラブにひび割れが生じることである。コンクリートスラブのひび割れの影響を小さくするため、負の曲げモーメント域でジベルを配置せず非合成とする断続合成桁といわれるものがある。²⁰²¹⁾MODEL-Cが桁全長にわたってジベルを配置した桁であり、MODEL-Dが断続合成桁である。解析は、スパン中央に集中荷重が作用する場合について行った。

Fig. 21 にモーメントと中間支点の曲率の関係を示す。図より明らかなように、ジベルを配置した桁の方が断続合成桁より剛性が高い。Fig. 22 にひび割れおよ

び塑性の進展状況を示す。同図より、まず最初に中間支点付近の負の曲げモーメント域のコンクリートスラブにひび割れが生じ、荷重の増加とともにスパン中央および中間支点上の鋼桁下フランジより塑性域が進展する。また、本解析例では、スパン中央において、鋼桁下フランジの塑性域がかなり進展すると、コンクリートスラブ下面に多少ではあるがひび割れが生じた。なお、MODEL-CとMODEL-Dでは、中間支点付近において、鋼桁の塑性域の進展に違いが見られる。

Fig. 23 に鋼桁下フランジのひずみ分布を示す。これより、鋼桁下フランジのひずみ分布については、ジベル配置の違いによる差はほとんど見られない。Fig. 24 に鉄筋のひずみ分布を示す。同図より、鉄筋のひずみは、ジベルが配置されている区間については差は見られないが、断続区間でその違いは大きく、中間支点上でMODEL-Dの鉄筋のひずみはMODEL-Cの40%減となっている。Fig. 25 に軸力の分布を示す。MODEL-Dは非合成区間において一定値となっており、その値は、MODEL-Cのその区間の最大値より小さい。Fig. 26 にズレ分布を示す。同図より明らかなように、非合

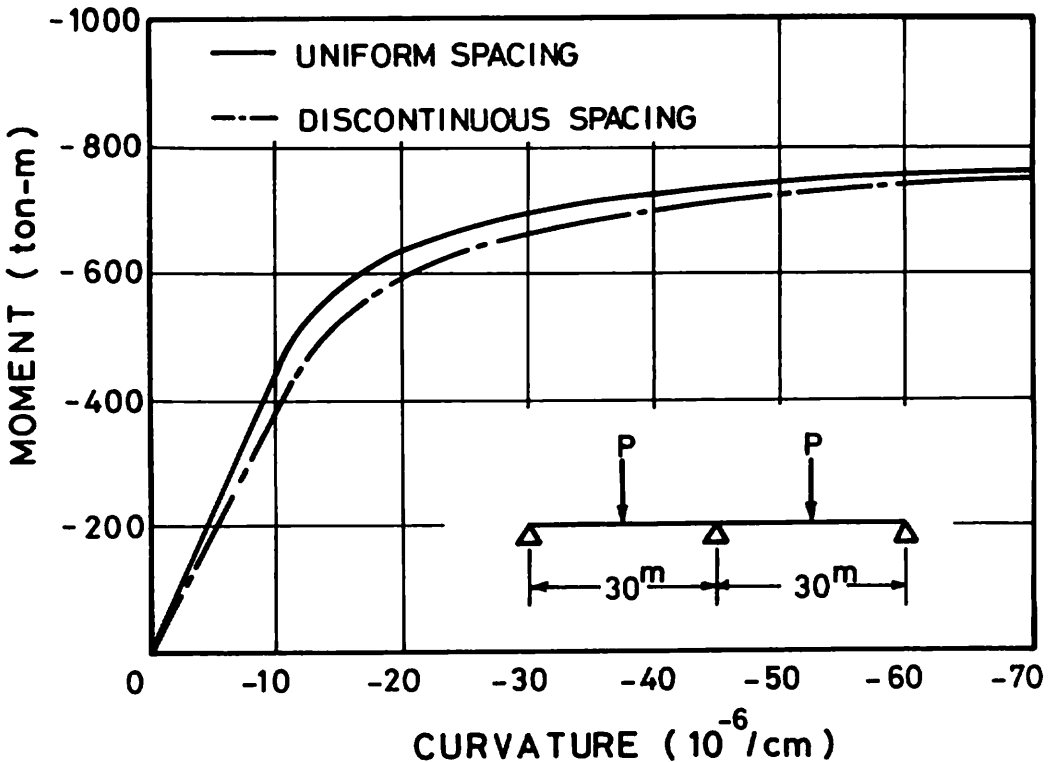


Fig. 21 Moment-Curvature Relationships at the Center Support for 2-Span Continuous Composite Beams

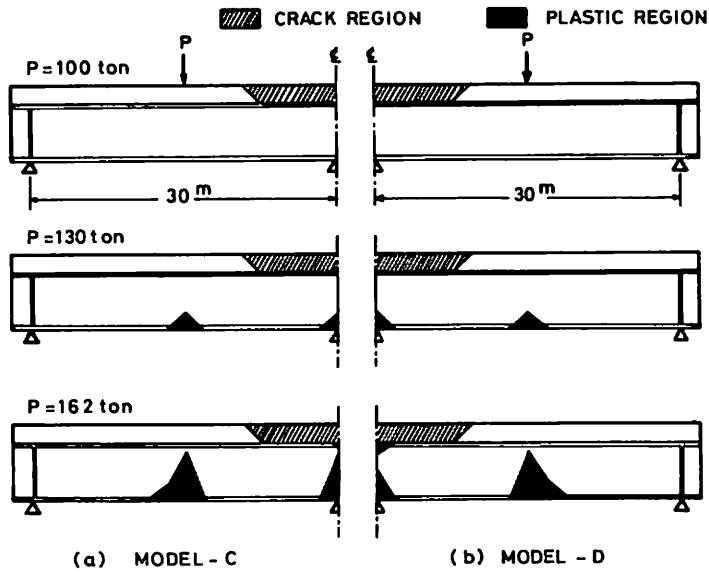


Fig. 22 Crack and Yield Progression for 2-Span Continuous Composite Beams

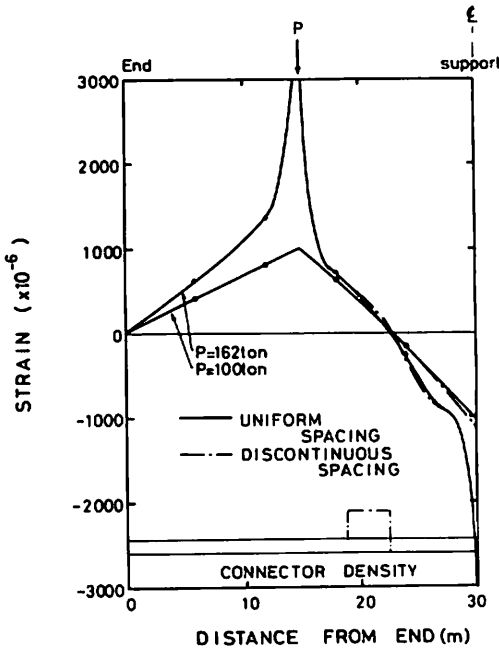


Fig. 23 Strain Diagrams in Lower Flange

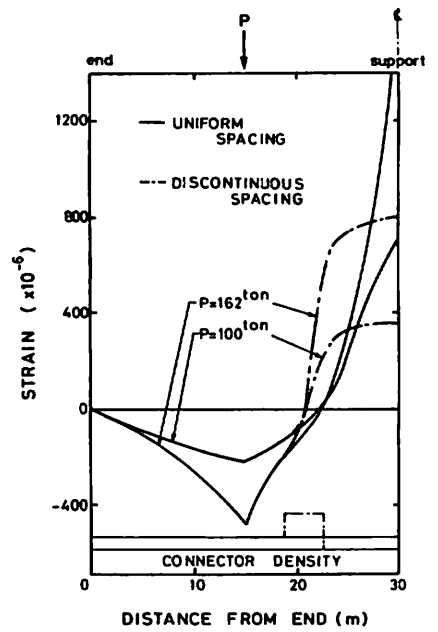


Fig. 24 Strain Diagrams in Reinforcing Bars

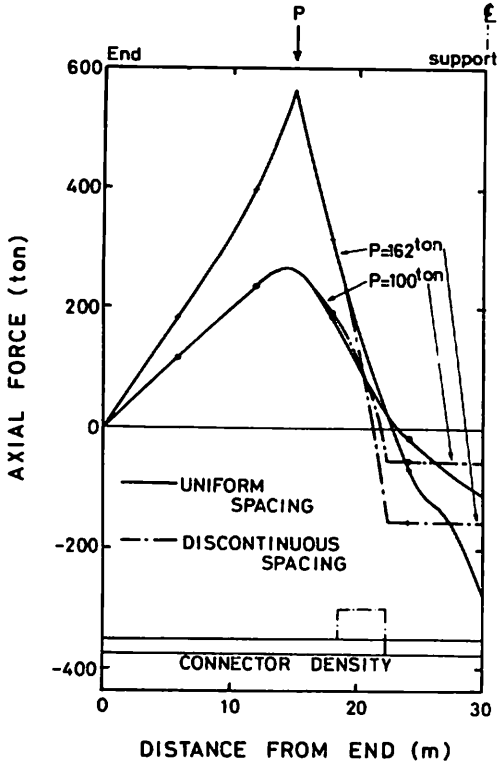


Fig. 25 Axial Force Diagrams

成区間付近において、ジベル配置の違いによる差が現われている。MODEL-D は断続点で大きなズレ、すなわちジベルに大きな力が作用しており、その傾向は、荷重の増加により顕著に現われる。

以上の結果より、断続合成桁は、スパン全長にわたってジベルを配置した合成桁と比較して、桁の剛性は多少低下するが、負の曲げモーメント域の鉄筋ひずみの低域という点では理論上有利であると思われる。しかし、断続合成桁は、合成区間と非合成区間の境界付近でジベルに大きな力が作用し、その傾向は塑性域の進展によって顕著に現われる。したがって、断続合成桁では、継続点のジベル補強および非合成区間長等について十分考慮する必要があると思われる。

4. あとがき

この研究では、コンクリートスラブと鋼桁の接合面にズレが生じる不完全合成桁について、コンクリートスラブおよび鋼桁の塑性進展、およびジベルのカーズレ関係の非線形性を考慮できる解析法を示した。また、

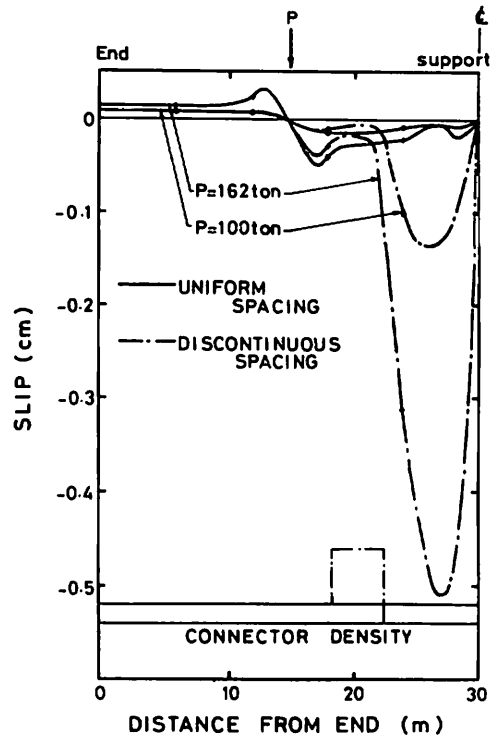


Fig. 26 Slip Diagrams

鉄筋コンクリートばりの曲げによる厚さ方向のひび割れの進展を考慮できる解析法を示し、それを不完全合成桁のコンクリートスラブの解析に適用した。鉄筋コンクリートばり、単純合成桁および2スパン連続合成桁について、実験結果と解析結果の比較を行い、本解析結果が実験結果とよく一致することを示した。

本解析法は、コンクリートおよび鋼材の応力-ひずみ関係、およびジベルのカーズレ関係を簡単な仮定を用いて表わし、それらの材料非線形の影響、およびコンクリートスラブのひび割れの影響をすべて等価な力に置き換え反復計算を行うため、他の非線形解析手法より短い計算時間で結果が得られるものと思われる。また、本解析は、種々のジベル配置された桁についても解析が可能である。

ジベル配置法の違いによる不完全合成桁の非線形挙動を調べるため、単純および連続合成桁について解析を行い、次のような結論を得た。

(1) 単純合成桁について、ジベルを等間隔配置および三角形分布配置した桁を対象に、集中荷重および等分布荷重を載荷した場合について解析した結果、ジベ

ル配置の違いによる桁剛性の差はさほど見られなかった。また、塑性域の進展によって接合面のズレが大きくなり、その影響は桁中央点より多少離れた場所において顕著に現われた。現行の道路橋示方書で規定しているように、ジベルをせん断力に比例して配置した桁が、そうでない桁と比較して、最大ズレ量が小さかった。

(2) 2スパン連続合成桁について解析した結果、断続合成桁は、負の曲げモーメント域において、鋼桁下フランジの応力を増加させることなしに鉄筋の応力を低減させる利点を有するが、断続点でジベルに大きな水平せん断力が作用し、それは塑性域の進展によって顕著に現われることが明らかとなった。今後、断続点のジベル補強、非合成区間長、および非合成区間の鉄筋量等について、十分な実験的および非線形解析を含めた理論的研究が必要であると思われる。

この研究における数値計算には、名古屋大学大型計算機センターのFACOM 230-75を用いた。

最後に、この研究をとりまとめるにあたり、名古屋大学成岡昌夫教授から貴重な助言を賜ったことを記し、謝意を表します。

参考文献

- 1) AASHTO : Standard Specifications for Highway Bridges, Twelfth Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, 1977
- 2) BSI : The Design and Specification of Steel, Concrete and Composite Bridges, Part 5, The Design of Composite Bridges, British Standards Institution, 1976
- 3) 前田幸雄：西ドイツ鋼合成桁設計施工指針(案)について、橋梁と基礎, Vol.10, No.7, pp. 1~6, 1976
- 4) 栗田章光：外国の新しい合成桁の設計法, JSSC Vol.13, No.143, pp.29~39, 1977
- 5) Newmark, N.M., C.P.Siess and I.M.Viest : Test and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol.9, No.1, pp. 75-92, 1951
- 6) Hoishen, A. : Verbundträger mit elastischer und unterbrochener Verdübelung, Der Bauingenieur, Vol.7, pp.241-244, 1954
- 7) Heilig, R. : Theorie des Elastischen Verbunds, Der Stahlbau, Vol.5, pp.104-108, 1953
- 8) Homberg, H. : Brücke mit elastischem Verbund zwischen den Stahlhauptträgern und der Betonfahrbahntafel, Der Bauingenieur, Vol. 6, pp.213-216, 1952
- 9) Plum, D.R. and M.R.Horn : The Analysis of Continuous Composite Beams with Partial Interaction, Proc. ICE, Part 2, No.59, pp.625-643, 1975
- 10) 山本稔：不完全合成桁の曲げ理論, 土木学会論文集, No.67, pp.1~10, 1960
- 11) 橋善雄, 足立義雄：不完全合成桁について, 土木学会論文集, No.112, pp.11~19, 1964
- 12) Taylor, T.P. and H.Matlook : Finite Element Analysis for Composite Beams, Research Report 56-10, The Univ. Texas, Austin, 1968
- 13) Gustofson, W.C. and R.N.Wright : Analysis of Skewed Composite Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol.94, No.ST 4, pp.919-941, 1968
- 14) Moffatt, K.P. and P.T.K.Lim : Finite Element Analysis of Composite Box Girder Bridges Having Complete or Incomplete Interaction, Proc. ICE, Part 2, pp.1-22, 1975
- 15) Ansurian, P. : An Application of the Method of Finite Elements to the Analysis of Composite Floor Systems, Proc. ICE, Part 2, Vol.59, pp.669-726, 1975
- 16) 浜田純夫, 有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析, 土木学会論文報告集, No.265, pp.1~9, 1977
- 17) 有住康則, 浜田純夫, 梶田建夫：不完全合成桁の有効幅, 土木学会論文報告集, No.273, pp.23~33, 1978
- 18) Dai, K.H. and C.P.Siess : Analysis Study of Composite Beams with Inelastic Shear Connection, Structural Research Series No.267, Univ. of Illinois, Urbana, Illinois, 1963
- 19) Hamada, S. and J.Longworth : Ultimate Strength of Continuous Composite Beams, Proc. ASCE, vol.102, No,ST 7, pp.1463-1478, 1976
- 20) 梶川靖治, 前田幸雄：断続合成桁の塑性曲げ性状および曲げ耐力について, 第32回年次学術講演会講演概要集, 1-301., 土木学会, 1977

21) 福井次郎, 前田幸雄, 梶川靖治: 断続合成げたの弾塑性曲げ性状および曲げ耐荷力について, 第33回年次学術講演会講演概要集, 1-228, 土木学会, 1978

22) Yam, L.P.C. and J.C.Chapman: The Inelastic Behaviour of Simply Supported Composite Beams of Steel and Concrete, Proc. ICE, Vol.45, pp.651-683, 1968

23) Yam, L.P.C. and J.C.Chapman: The Inelastic Behaviour of Continuous Composite Beams of Steel and Concrete, Proc. ICE, Part 2, pp.487-501, 1972

24) Ansourian, P. and J.W.Roderiele: Analysis of Composite Beams, Proc. ASCE, Vol.104, No. ST10, pp.1631-1645, 1978

25) 奥村敏恵, 佐藤政勝: 有限要素法によるスタッドジベルを用いた合成桁の弾塑性解析, 東京大学工学部付属総合試験所年報, No.32, pp.59~68, 1973

26) Wegmuller, A.W. and H.N.Amer: Nonlinear Response of Composite Steel-Concrete Bridges, J. of Computers and Structures, Vol.7, pp.161-169, 1977

27) Wegmuller, A.W.: Overload Behavior of Composite Steel and Concrete, Proc. ASCE, Vol.103, No.ST 9, pp.1799-1819, 1977

28) 栖原寿郎, 西牧興 他: 鋼板とコンクリートから構成されるサンドイッチ式複合構造物の強度に関する研究, 日本造船学会論文集, No.142, pp.312~322, 1977

29) Armen, H.Jr., A.Pitco and H.S.Levine: A Finite Element Method for the Plastic Bending Analysis of Structures, NASA Contractors Report, CR-97 375, 1968

30) Ngo, D. and A.C.Scordelis: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, J.of ACI, Vol.64, No.3, pp.152-163, 1967

31) Nilson, A.H.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element, J.of ACI, Vol.65, No.9, pp.757-766, 1968

32) 黒正清治, 滝口克己: 有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元非線形解析, 建築学会論文報告集, No.189, pp.51~57, 1971

33) 磯畑脩: 有限要素法によるコンクリート構造物の2次元弾塑性解析, 建築学会論文報告集, No.189 pp. 43~50, 1971

34) 六車熙, 森田司郎, 富田幸次郎: 曲げひび割れ

を生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究, 建築学会論文報告集, No.200 pp.27~34, 1972

35) Lasi, S.D., N.Macleod and W.Blackwell: High Strength Reinforcement in Reinforced Concrete Beams, Part 2: Crack Width, Deflection, Fatigue, Report No.38, Dept. of Civil Eng., Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1965

36) Chapman, J.C. and S.Balaprishman: Experiments on Composite Beams, The Structural Engineer, Vol.42, No.11, pp.369-382, 1964

37) Mainstone, R.J. and J.B.Menzies: Shear Connectors in Steel Concrete Composite Beams for Bridges, Concrete, Vol.1, No.9, pp.291-302, 1967

38) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, 1973

付録

式(10-b)で示されたはり要素の塑性による初期ひずみマトリックス $[K_0^*]$ は, つぎのように与えられる。

$$[K_0^*] = E b \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \\ -K_{11} & -K_{12} & -K_{13} & -K_{14} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} \\ -K_{31} & -K_{32} & -K_{33} & -K_{34} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} \end{pmatrix} \quad (a)$$

ここで,

$$\begin{aligned} K_{11} &= -(1/10)C_1 - (1/4)C_2 \\ K_{12} &= -(3/20)C_1 - (1/4)C_2 \\ K_{13} &= (1/10)C_3 + (1/4)C_4, \quad K_{14} = (3/20)C_3 + (1/4)C_4 \\ K_{21} &= -(1/120)C_1 + (1/24)C_2 \\ K_{22} &= -(1/30)C_1 - (1/24)C_2 \\ K_{23} &= (1/120)C_3 - (1/24)C_4 \\ K_{24} &= (1/30)C_3 + (1/24)C_4 \\ K_{31} &= -(1/60)C_1 - (1/6)C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{32} &= -(3/20) l C_5 + (1/6) l C_6 + (1/6) l C_7 \\
 K_{33} &= (1/60) l C_8 + (1/6) l C_{10} \\
 K_{34} &= (3/20) l C_8 - (1/6) l C_9 - (1/6) l C_{10} \\
 K_{41} &= (1/180) C_5 - (1/36) C_6 - (1/6) C_7 \\
 K_{42} &= -(1/30) C_5 + (1/36) C_6 \\
 K_{43} &= -(1/180) C_8 + (1/36) C_9 + (1/6) C_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{44} &= (1/30) C_9 - (1/36) C_{10} \\
 K_{61} &= -(l/120) C_1 - (l/24) C_2 \\
 K_{62} &= (l/20) C_1 + (l/24) C_2 \\
 K_{63} &= (l/120) C_3 + (l/24) C_4 \\
 K_{64} &= -(l/20) C_3 - (l/24) C_4 \\
 K_{81} &= -(1/45) C_5 + (1/36) C_6 \\
 K_{82} &= -(7/60) C_5 + (5/36) C_6 + (1/6) C_7 \\
 K_{83} &= (1/45) C_8 - (1/36) C_9 \\
 K_{84} &= (7/60) C_8 - (5/36) C_9 - (1/6) C_{10}
 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
 C_1 &= d_j^y - d_i^y \\
 C_2 &= d_j^y \\
 C_3 &= d_j^x - d_i^x \\
 C_4 &= d_j^x - 2t \\
 C_5 &= (d_j^y - d_i^y)^2 \\
 C_6 &= (d_j^y - d_i^y) (3t - 2d_j^y) \\
 C_7 &= (3t - d_j^y) d_i^y \\
 C_8 &= (d_j^x - d_i^x)^2 \quad C_9 = (d_j^x - d_i^x) (t - 2d_i^x) \\
 C_{10} &= 2t^2 + td_i^x - (d_i^x)^2
 \end{aligned}$$

である。

式(17)のコンクリートスラブのひび割れによる初期ひずみマトリックス $[K_{crack}]$ は、

$$[K_{crack}] = E_c \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{11} & C_{16} & -C_{13} & C_{18} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & -C_{12} & C_{26} & -C_{23} & C_{28} \\ & & C_{33} & C_{34} & -C_{13} & C_{36} & -C_{33} & C_{38} \\ & & & C_{44} & -C_{14} & C_{46} & -C_{34} & C_{48} \\ & & & & C_{11} & -C_{16} & C_{13} & -C_{18} \\ & & & & & C_{66} & -C_{36} & C_{68} \\ & & & & & & C_{33} & -C_{38} \\ & & & & & & & C_{88} \end{pmatrix} \quad (b)$$

symmetric

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (7A_1 + 7A_1) / (5 l) \\
 C_{12} &= A_1 / 10 \\
 C_{13} &= (3G_1 - 3G_1) / (5 l^2) \\
 C_{14} &= -(4G_1 + G_1) / (5 l) \\
 C_{16} &= A_1 / 10 \\
 C_{18} &= (G_1 + 4G_1) / (5 l) \\
 C_{22} &= (3A_1 + A_1) l / 30 \\
 C_{23} &= (7G_1 + 3G_1) / (10 l) \\
 C_{24} &= (13G_1 + 2G_1) / 30 \\
 C_{26} &= -(A_1 + A_1) l / 60 \\
 C_{28} &= (8G_1 + 7G_1) / 30 \\
 C_{33} &= (6I_1 + 6I_1) / l^3 \\
 C_{34} &= (4I_1 + 2I_1) / l^2 \\
 C_{36} &= -(3C_1 + 7G_1) / (10 l) \\
 C_{38} &= (2I_1 + 4I_1) / l^2 \\
 C_{44} &= (3I_1 + I_1) / l \\
 C_{46} &= -(7G_1 + 8G_1) / 30 \\
 C_{48} &= (I_1 + I_1) / l \\
 C_{66} &= (A_1 + 3A_1) l / 30 \\
 C_{88} &= -(2G_1 + 13G_1) / 30 \\
 C_{88} &= (I_1 + 3I_1) / l
 \end{aligned}$$

である。式(23)のジベル要素の初期ひずみマトリックス $[K_s^*]$ は次式で与えられる。

$$[K_s^*]^T = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & -S_{11} & -S_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & -S_{12} & -S_{22} \\ S_{71} & S_{81} & -S_{31} & S_{101} & -S_{71} & -S_{81} \\ S_{72} & S_{82} & -S_{32} & S_{102} & -S_{72} & -S_{82} \end{pmatrix} \quad (c)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= 16 l q_1 + 5 l q_1 \\
 S_{12} &= 5 l q_1 + 4 l q_1 \\
 S_{21} &= 2 l^2 q_1 + l^2 q_1 \\
 S_{22} &= l^2 q_1 + l^2 q_1 \\
 S_{31} &= -18 \bar{y} q_1 - 12 \bar{y} q_1 \\
 S_{32} &= -12 \bar{y} q_1 - 18 \bar{y} q_1 \\
 S_{41} &= 6 l \bar{y} q_1 - l \bar{y} q_1 \\
 S_{42} &= -l \bar{y} q_1 - 4 l \bar{y} q_1 \\
 S_{71} &= 4 l q_1 + 5 l q_1 \\
 S_{72} &= 5 l q_1 + 16 l q_1 \\
 S_{81} &= -l^2 q_1 - l^2 q_1 \\
 S_{82} &= -l^2 q_1 - 2 l^2 q_1 \\
 S_{101} &= -4 l \bar{y} q_1 - l \bar{y} q_1 \\
 S_{102} &= -l \bar{y} q_1 + 6 l \bar{y} q_1
 \end{aligned}$$

である。